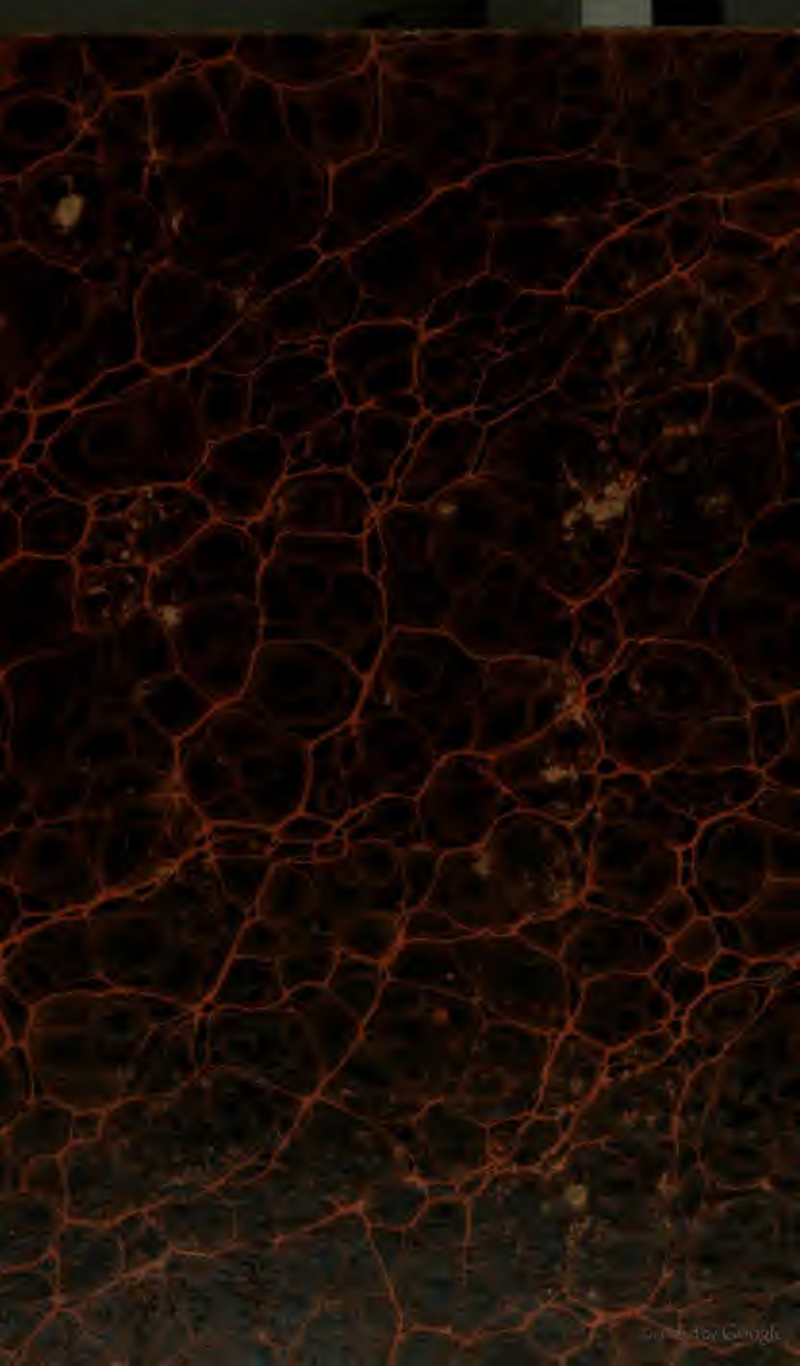
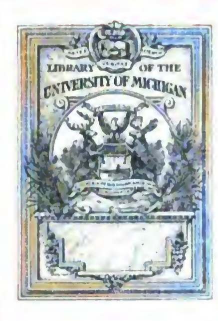





LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN



Physikalisches Wörterbuch

IX. Band.

Zweite Abtheilung.

Thermom. —— U.

Johann Samuel Traugott Gehler's

Physikalisches Wörterbuch

neu bearbeitet

von

Gmelin. Littrow. Muncke. Pfaff.

Neunter Band.

Zweite Abtheilung.

Thermom. —— U.

Mit Kupfertafeln XI bis XXXIV.

Leipzig,
bei E. B. Schwickert.
1839.

Thermometer.

Thermoskop, Wärmemesser; *Thermoscopium, Thermometrum;* Thermomètre; *Thermometer.*

Was ein Thermometer (von θερμός warm und μετρέω ich messe oder σκοπέω ich sehe) dem gewöhnlichen Sprachgebrauche nach sey und wozu man dasselbe meistens anwende, bedarf keiner Erklärung; interessanter ist es dagegen, zu wissen, durch wie vielfache Abstufungen dasselbe zu seiner gegenwärtigen Vollendung gelangt ist. Viele wirkliche oder vermeintliche Verbesserungen werden aber besser im Verlaufe der Untersuchung erwähnt, so daſs also vorläufig nur von den frühesten Einrichtungen die Rede seyn kann.

1) Man schreibt die Erfindung desselben meistens nach Dalencé[1] dem Cornelius Drebbel, einem wegen verschiedener mechanischer Erfindungen berühmten Landmanne zu Alkmaar in Nordholland, zu, durch den es in der letzten Hälfte des vorletzten Jahrhunderts in Holland und England bekannt wurde. Dem Engländer Robert Fludd (oder de Fluctibus) zu Oxford (geb. um 1584) hat man die Erfindung desselben gleichfalls zueignen wollen; allein es ist schwer zu entziffern, was die Ausdrücke in seinen vielen mystischen Schriften eigentlich bezeichnen sollen. Der Arzt Sanctorius[2] erwähnt selbst ein von ihm um 1600 erfundenes Instrument, womit er die Wärme des menschlichen Körpers zu messen im

1 Traité des baromètres, thermomètres et notiomètres. Amst. 1688. 8.

2 Comm. in Galeni Art. Med. Lugd. 1631. 4. und Comm. in Avicennae Canon. Venet. 1646. 4.

Stande sey, und daher haben POLENI[1], MALPIGHI[2] und BORELLI[3] ihm die Erfindung zugeschrieben, auch meint MUSSCHENBROEK[4], das Instrument desselben sey auswärts nicht bekannt geworden und es lasse sich daher die frühe Verbreitung des Thermometers durch England und Holland aus dieser Quelle nicht ableiten. Dafs SANCTORIUS bei der Menge und Ausführlichkeit seiner Schriften das Thermometer, wenn er dieses Werkzeug mit seiner eigenthümlichen Construction wirklich erfunden und angewandt hätte, nicht genauer beschrieben haben sollte, ist auf keine Weise glaublich, und ebenso halte ich es für unwahrscheinlich, dafs GALILEI der Erfinder desselben seyn soll, obgleich VIVIANI und CASTELLI dieses behaupten, indem sie die Erfindung desselben in das Jahr 1597 setzen, wie neuerdings LIBRI[5] hervorgehoben hat; denn sonst würden die Mitglieder der Akademie del Cimento, die man für die Erfinder des eigentlichen Thermometers halten mufs, dieses erwähnt haben. Das Instrument, welches CORNELIUS DREBBEL erfand und worauf ihn wahrscheinlich sein vorzügliches mechanisches Talent zufällig um das Jahr 1638 führte, war ein *Manometer*, und zwar nach VARIGNON, indem es die Dichtigkeit der eingeschlossenen Luft zeigte und daher auch die Ausdehnung derselben durch Wärme angeben mufste.

Fig. 69. 2) Das Drebbel'sche Thermometer in seiner einfachen, von DALENCÉ beschriebenen Gestalt besteht aus einer Kugel A mit einer engen Röhre, deren Mündung in ein Gefäfs B mit einer sehr verdünnten Auflösung von Kupfer in Scheidewasser vertical herabgesenkt ist. Die Luft wird in der Kugel durch Wärme so weit ausgedehnt, dafs für mittlere Temperatur die Flüssigkeit ungefähr bis H aufsteigt und dann bei gröfserer Wärme sinkt, bei geringerer steigt, wobei diese Gröfsen an einer willkürlichen Scale gemessen werden. Verschiedene Abänderungen dieser Construction liegen sehr nahe. WOLF[6] unter Andern schlägt vor, statt des unteren Gefäfses gleichfalls eine

1 Institut. philos. exper.
2 Opp. posth. p. 30.
3 De motu animal. P. II. prop. 175.
4 Introd. ad phil. nat. T. II. §. 1565.
5 Ann. de Chim. et Phys. T. XL. p. 355.
6 Nützliche Versuche Th. II. Cap. V. §. 56.

Kugel C zu wählen, wodurch der Apparat zum Aufhängen bequemer wird. Becher[1] liefs die untere Kugel C weg, bog den Schenkel der beträchtlich weiten Röhre in die Höhe, füllte sie mit Quecksilber und senkte einen Körper hinein, welcher auf dem Metalle schwimmend vermittelst eines über eine Rolle gehenden Fadens ein Gegengewicht bald aufwärts zog, bald herabsinken liefs, je nachdem die Luft in der oberen Kugel mehr oder weniger ausgedehnt war. Das Gewicht sollte eine Uhr aufziehn und in steter Bewegung erhalten, weswegen er den Apparat ein *perpetuum mobile physico-mechanicum* nannte. Von dieser Art mufs auch nach Kaestner's[2] Ansicht die Vorrichtung gewesen seyn, die Becher schon 1656 verfertigte, wobei ein auf Glas gemaltes Bild Kaiser Ferdinand's III. sich im Sonnenscheine frei zeigte, bei trübem Wetter aber durch eine Wolke bedeckt wurde. Fig. 70.

3) Das Thermometer der Florentiner Akademie oder der *Accademia del Cimento*[3] erhielt zuerst diejenige Gestalt, welche man seitdem beibehalten hat. Es bestand aus einer Kugel B mit einer sogenannten Thermometerröhre, war mit Weingeist gefüllt und auf einer Scale befestigt, welche in Folge der Ausdehnung oder Zusammenziehung dieser Flüssigkeit die Vermehrung oder Verminderung der Wärme anzeigte. Insofern hiermit also die wesentliche, noch jetzt bestehende Construction der Thermometer gegeben ist, wird es angemessen seyn, die einzelnen Theile dieses wichtigen Apparates mit Rücksicht auf das Geschichtliche der nach und nach hinzugekommenen Bestimmungen und Verbesserungen näher zu untersuchen. Fig. 71.

A. Flüssigkeiten im Thermometer.

4) Mit Uebergehung der Metallthermometer, von denen später die Rede seyn wird, wählt man zur thermometrischen Substanz irgend eine Flüssigkeit, weil deren Beschaffenheit

---

1 De nova temporis dimetiendi ratione et accurata horologiorum constructione. Lond. 1680. 4.

2 Anfangsgründe d. angewandten Mathem. 4te Aufl. Gött. 1792. Aerometrie §. 85. Vergl. Leupold Theatrum Aerostat. Tab. X.

3 Tentamina Ac. del Cimento ed. Musschenbroek. P. I. p. 2.

gestattet, eine grofse Quantität derselben in eine Kugel einzuschliefsen und die Ausdehnung durch den Zuwachs oder die Abnahme des dünnen Fadens im engen Rohre bequemer zu messen. Allgemein geht man von dem Grundsatze aus, dafs die Vermehrung des Volumens des sich ausdehnenden Körpers dem Zuwachse der Wärme proportional sey. Dieser Satz ist blofs hypothetisch und wird dieses so lange seyn, als wir das Verhältnifs der Wärmequantität und ihrer Repulsion gegen die Molecüle der Körper noch nicht kennen, welches man bisher vergebens zu erforschen suchte[1]. Wir finden jedoch bei den verschiedensten Körpern und sogar von ungleichem Aggregationszustande, also bei festen, flüssigen und expansibeln, innerhalb gewisser Grenzen, ein gleiches Verhältnifs zwischen dem Zuwachse ihres Volumens und der Vermehrung der Wärmemenge, so dafs sie alle, wenn auch in etwas verschiedenem Grade, zu thermometrischen Mefswerkzeugen dienen könnten, und dürfen aus dieser Uebereinstimmung schliefsen, dafs, mindestens innerhalb der Grenzen dieser letzteren, die Vergröfserungen des Volumens der thermoskopischen Körper den Vermehrungen der Wärme direct proportional und somit unsere Thermometer nicht blofs Thermoskope, sondern eigentliche Wärmemesser sind. Von der andern Seite belehrt uns aber die Erfahrung, dafs die Verhältnisse der Volumensvermehrungen zu den Zunahmen der Wärme bei verschiedenen Aggregatzuständen der nämlichen Körper sehr ungleich sind, denn anders sind für gleiche Mengen von Thermometergraden die Zunahmen des Volumens z. B. bei flüssigem und geschmolzenem Blei, bei tropfbar-flüssigem und in Dampf verwandeltem Weingeiste, und viele Physiker nehmen daher an, dafs die Gesetze der regelmäfsigen Zunahme oder Abnahme des Volumens für gleiche Wärmegrade beim Uebergange zu einem andern Aggregatzustande und in der Nähe dieser Veränderung aufhören. Ein Grund für diese Ansicht läfst sich

---

1 Vergl. Art. *Gas*, *Wesen der Gasform*. Bd. IV. S. 1048. Die verschiedenen gehaltreichen Untersuchungen über das Verhältnifs der Volumensvermehrung der Körper zu den Incrementen der Wärme, namentlich von Schitko, verspare ich auf den Art. *Wärme*, und bleibe hier der bisher herrschenden Ansicht um so mehr getreu, als sonst die Thermometrie im Ganzen eine wesentliche Veränderung erleiden würde.

aus der Wahrscheinlichkeit hernehmen, dafs solche Uebergänge nicht plötzlich statt finden, ja bei vielen Körpern sogar eine Menge von Abstufungen durchlaufen; aufserdem aber zeigt die Erfahrung ein auffallend starkes Zusammenziehn des Quecksilbers beim Festwerden desselben und eine beträchtliche Ausdehnung des Wassers bei seiner Verwandlung in Eis, anderer Beispiele nicht zu gedenken. Ganz dieser Ansicht zuwider und daher im hohen Grade auffallend war dagegen die Erfahrung, welche aufser Anderen ich selbst zu wiederholten Malen beim Schwefeläther gemacht habe, dessen Siedepunct genau bei 35° C. lag, und dennoch liefs er sich in dem thermometerähnlichen Apparate sogar bis 50° C. erwärmen, ohne von dem regelmäfsigen Gesetze der Ausdehnung abzuweichen[1]. Das hieraus hervorgehende Resultat, dafs die tropfbaren Flüssigkeiten beim Uebergange aus dem tropfbar-flüssigen in den expansibeln Zustand vom regelmäfsigen Gesetze ihrer Ausdehnung durch Wärme so lange nicht abweichen, als ihr Aggregatzustand nicht wirklich verändert ist, möchte ich für allgemein halten, denn auch beim Wasser schien sich etwas Aehnliches zu zeigen und sowohl beim Schwefelkohlenstoff als auch beim absoluten Alkohol ist die Sache in Gemäfsheit absichtlich angestellter Versuche[2] aufser Streit. Mit weit geringerer Sicherheit läfst sich jener Satz für den Uebergang aus dem tropfbar-flüssigen in den festen Zustand aufstellen; denn wenn man gleich in Beziehung auf die beobachtete sehr grofse Zusammenziehung des Quecksilbers sagen könnte, dafs diese erst im Momente der Erstarrung plötzlich und ohne einen allmäligen Uebergang eintrete, so zeigt doch das Wasser ein hiervon abweichendes Verhalten in seiner allmäligen Volumens-Vermehrung vor dem Gefrieren und es können daher auch bei andern Flüssigkeiten ähnliche Erscheinungen vorkommen.

Läfst sich gleich hierauf kein absolutes Argument gründen, so zeigen doch alle feste und alle flüssige Körper bei der Zunahme der Wärme eine in mehr als einfachem Verhält-

---

1 S. meine Abhandl. über die Ausdehnung der tropfbaren Flüssigkeiten. In Mém. présentés à l'Acad. Imp. des Sc. de Petersb. T. I. p. 93.

2 S. meine Abhandlung Sur la Dilatation de l'Alcool absolu. In Mém. de l'Acad. de St. Petersb. 1834.

nisse wachsende Vermehrung ihres Volumens, wie man sowohl aus ihrer Vergleichung unter einander, als auch mit der atmosphärischen Luft oder den sogenannten permanenten Gasarten wahrnimmt, und da diese expansibeln Flüssigkeiten nach überwiegenden Wahrscheinlichkeitsgründen durch keine im möglichen Bereiche der Erfahrung liegenden Veränderungen der Wärme einem Wechsel ihres Aggregatzustandes unterliegen und somit ein constantes Verhältnifs des Quantitativen der in ihnen enthaltenen Molecüle und des diese umgebenden, die Expansion bewirkenden Wärmestoffes vorhanden zu seyn scheint, so folgt hieraus, dafs die Luft oder die permanenten Gasarten die einzigen absolut genauen thermometrischen Flüssigkeiten sind und dafs alle übrige Thermometer auf das Luftthermometer reducirt werden müssen. Erst in den neuesten Zeiten ist dieser Satz mit Bestimmtheit anerkannt worden, aber auch schon ältere Physiker haben die Wahrheit desselben eingesehn, wie namentlich LAMBERT[1], welcher hierauf die Construction des *Luftthermometers* gründete, und DANIEL BERNOULLI[2].

5) Man hält zuweilen das von C. DREBBEL construirte Thermometer für ein Luftthermometer; das war es jedoch nicht, denn die Luft in der Kugel wurde stets mit Dämpfen der sperrenden Flüssigkeit erfüllt, und da diese bekanntlich ein anderes Gesetz der Ausdehnung befolgen[3], als die trockne Luft, wenn bei verschiedenen Wärmegraden hinlängliche Flüssigkeit zur Bildung neuen Dampfes vorhanden ist, so kann hierbei die verlangte regelmäfsige Ausdehnung der Luft, als das geforderte Mafs der Wärme, nicht statt finden. Schon HALLEY[4] schlug im Jahre 1680 für das ihm bekannt gewordene Florentiner Thermometer die Luft statt des Weingeistes zu wählen vor, weil er die Regelmäfsigkeit der Ausdehnung des letzteren in Zweifel zog, das eigentliche, zuerst construirte Luftthermometer ist aber von AMONTONS[5]. Nach seiner Angabe besteht dasselbe aus einer sehr langen engen Glasröhre AB, welche unten heberförmig gebogen und mit einer grofsen Ku-

Fig. 72.

1 Abhandl. d. Churbai. Ak. d. Wiss. T. III. P. II. p. 89.
2 Hydrodyn. Sect. X. §. 8.
3 S. *Dampf*. Bd. II. S. 281. Vergl. G. XV. 39.
4 Philos. Trans. N. 197. p. 650.
5 Mém. de l'Acad. de Par. 1702. p. 1.

gel D versehn ist, worin sich Luft befindet. Die Menge der letzteren und die Verhältnisse des Rauminhalts der Kugel und der Röhre sollen so seyn, dafs im siedenden Wasser die Länge der Quecksilbersäule vom Niveau EC bis H oder HE 73 Par. Zoll beträgt, wovon 28 Zoll auf die Barometerhöhe und 45 Zoll auf die Ausdehnung der Luft bis zur Siedehitze kommen. Mit der Abnahme der Temperatur unter die Siedehitze sank das Quecksilber, und um seinen Stand zu messen, mufste man den jedesmaligen Barometerstand abziehn oder die gemessenen Zolle nach dem Unterschiede der Barometerhöhe und der Normalgröfse derselben von 28 Zoll corrigiren. Auf diese Weise fand er die Wärme in den Kellern unter der Sternwarte zu Paris = 54 Zoll und die des gefrierenden Wassers = 51,5 Zoll[1]. Dieses Instrument, dessen unbehülfliche Gröfse und ausnehmend schwierige Construction sogleich in die Augen fällt, wobei der vom Erfinder nicht gekannte Umstand nicht zu übersehn ist, dafs die eingeschlossene Luft nothwendig trokken seyn mufs, sollte blofs ein *Normalthermometer* seyn, um die Florentiner danach zu graduiren, wobei Amontons glaubte, die constante Wärme des siedenden Wassers aufgefunden zu haben, obgleich man dieses Gesetz schon weit früher kannte[2]. Aufserdem glaubte er, dafs die Erhöhung der Elasticität durch Wärme bei der Luft mit ihrer Zusammendrückung wachse[3], wonach also die Regelmäfsigkeit der thermometrischen Wirkung wegen Ungleichheit des äufsern Luftdruckes von selbst hätte aufhören müssen.

Das beschriebene Thermometer unterliegt hauptsächlich dem Fehler, dafs es eigentlich nur ein *Manometer* ist und dafs seine Veränderungen vom gemeinschaftlichen Einflusse der Wärme und des äufseren Luftdruckes abhängen, wobei man sich wundern mufs, dafs sein Erfinder beim Nachdenken über dessen Construction nicht sofort auf das nahe liegende Mittel verfiel, den veränderlichen Druck der atmosphärischen Luft auszuschliefsen, da dieses so leicht durch das Zuschmelzen des langen Rohres an seinem Ende bewerkstelligt wird. Ein solches Luftthermometer brachte Hermann[4] in Vorschlag, um

1 Vergl. Comment. Soc. Bonon. T. II. P. I. p. 303.
2 Vergl. *Wärme. Sieden.*
3 Mém. de Par. 1703. p. 260.
4 Phoronomia Lib. II. Prop. 85. Schol. p. 377.

die mittlere Geschwindigkeit der Theilchen zu finden, in deren Bewegung die Cartesianer das Wesen der Wärme und Elasticität setzten. Zu diesem Ende verschlofs er das weite Gefäfs H, welches mit der Barometerröhre AB verbunden war, wonach dann die unveränderliche Menge der abgesperrten Luft in Folge ihrer Ausdehnung durch Wärme die zusammendrükkende Quecksilbersäule verlängern und nach dem Erkalten wieder sinken lassen mufste. Es ist merkwürdig, dafs die Gelehrten bei der Construction der Luftthermometer da Fehler suchen, wo sie gar nicht vorhanden sind, und den eigentlichen Mangel übersehn. So glaubte AMONTONS, es entstehe eine Unrichtigkeit durch die Verlängerung der Quecksilbersäule in Folge des Einflusses der Wärme; allein wenn gewisse feste Puncte einmal richtig bestimmt waren, so war hierin diese Correction schon enthalten, vorausgesetzt, dafs das zur Controle gebrauchte Barometer auf die bei der Bestimmung jener Puncte statt gefundene Wärme reducirt wurde und dafs die ungleiche Ausdehnung des Quecksilbers in höherer Temperatur als unbedeutende Gröfse und auf jeden Fall für die mit diesem Apparate zu messenden Temperaturen vernachlässigt werden kann. GEHLER[1] meint, das Gefäfs des Thermometers müsse sehr grofs seyn, damit sich das Volumen der eingeschlossenen Luft nur wenig ändere und man die Zunahme der Länge der Quecksilbersäule der Vermehrung der Wärme proportional setzen könne; allein selbst dieses genügt zur völligen Genauigkeit nicht, sondern giebt nur annähernd richtige Werthe; denn es fällt in die Augen, dafs die Volumensvermehrung der Luft im Gefäfse immer dieselbe seyn mufs, wenn die Quecksilbersäule im engeren Rohre um eine gewisse Gröfse wachsen soll, und dafs daher die Grade vom tiefsten bis zum höchsten in dem Mafse kleiner werden müssen, als die wachsende Quecksilbersäule die eingeschlossene Luft stärker zusammendrückt. DANIEL BERNOULLI[2] fafste diesen Umstand besonders ins Auge, und indem er einsah, dafs das Niveau des Quecksilbers EF sich nothwendig verändern müsse, schlug er vor, den Punct M zu bestimmen, welchen das lothrecht ge-

Fig. 73.

1 Alte Ausg. Th. IV. S. 356.

2 Vergl. KARSTEN Lehrbegriff d. ges. Matth. Th. III. Aerost. §. 107.

haltene Thermometer im siedenden Wasser erreiche, und dann dasselbe so einzurichten, dafs man es in die schräge Lage a b bringen könne. Fiele bei verminderter Temperatur die Quecksilbersäule von dem Puncte M bei der Siedhitze bis G, so müfste man die Röhre so lange neigen, bis das Quecksilber von G bis g steigt, indem Eg = EM, mithin das Volumen der Luft im Gefäfse EHF unveränderlich ist, die bei der Siedehitze des Wassers aber gefundene Wärme sich zu der gemessenen verhält wie ME:gh. Nach diesem Satze lassen sich dann verschiedene Scalen herstellen, je nachdem man andere Bestimmungen dabei zum Grunde legt; auch hat Segner[1] gezeigt, wie man, ohne das Thermometer jederzeit in die geneigte Lage zu bringen, die Gröfse GE auf die Gröfse gh durch Rechnung reduciren könne. Lambert[2] kehrte wieder zu der von Amontons vorgeschlagenen Einrichtung zurück, theilte aber die Scale nicht in Zolle, sondern in Grade, deren jeder 0,001 des Volumens der in der Kugel eingeschlossenen Luft betragen sollte. Zu diesem Ende bestimmte er die Gröfse der Räume durch Anfüllen mit sorgfältig abgewogenen Mengen Quecksilber und wählte genau calibrirte Röhren. Indem er dann ferner die Wirkung des Luftdruckes und der durch Wärme veränderlichen Höhe der Quecksilbersäule berücksichtigte, fand er, dafs ein Volumen Luft, welches im zergehenden Eise 1000 betrug, durch die Wärme des siedenden Wassers bis 1375 wuchs, wofür er hernach in runder Zahl 1370 setzte. Nach dieser merkwürdig genauen Bestimmung der Ausdehnung trockner Luft gab er seiner Scale für die Wärme des schmelzenden Eises 1000 und für die des siedenden Wassers 1370 Grade, welche nach seiner Ansicht das Verhältnifs der Wärmemengen genau angeben sollen, sofern die Vermehrung der Wärme der Zunahme des Volumens bei der Luft direct proportional ist, ein auch später beibehaltener und von La Place zur Bestimmung des *absoluten Nullpunctes* benutzter Satz. Ein solches Thermometer sollte eigentlich nur ein *Normalthermometer* seyn und wäre dieses auch wirklich, wenn man die gefundene Gröfse der Ausdehnung der Luft um 0,370 ihres Volumens zwischen den beiden

---

1 Progr. de aequandis thermom. aëreis. Gott. 1739. 4.

2 Pyrometrie. Berl. 1779. 4.

festen Puncten des Thermometers für absolut genau ansehn könnte; da aber dieses durch die neuesten Versuche Rudberg's zweifelhaft gemacht worden ist[1], so würden alle Thermometergrade dadurch eine, wiewohl nur sehr geringe, Abänderung erleiden, wenn sie ursprünglich nach diesem Principe eingerichtet wären. Gehler zieht das Princip überhaupt in Zweifel, weil es sich auf das Mariotte'sche Gesetz stütze, welches unmöglich absolut richtig seyn könne, und nach dem aufgestellten Satze das Volumen der Luft beim absoluten Nullpuncte der Wärme = 0 seyn müsse, was doch nicht statt finden könne; auch scheinen ihm die Versuche von Roy[2] und Lutz[3] die der Wärme stets genau gleiche Ausdehnung der Luft zweifelhaft zu machen. Wenn aber auch dieses Instrument für den Bereich unserer Erfahrungen wirkliche Grade der Wärme zeigte, so würde doch die nothwendige Bedingung, stets gleich feuchte und gleich gemischte Luft in das Gefäfs zu bringen und den Einflufs des Luftdruckes und der Ausdehnung des Quecksilbers genau zu bestimmen, unüberwindliche Schwierigkeiten entgegensetzen, zu geschweigen, dafs die täglichen Beobachtungen desselben mit vielen Unbequemlichkeiten verbunden seyn müfsten. Gehler hält es daher für gerathener, wieder zum Manometer zurückzukehren und den Einflufs des veränderlichen Luftdruckes bei diesem zu corrigiren[4].

In diesem letzteren Puncte wird ihm schwerlich jemand nach den jetzt sehr erweiterten und berichtigten Ansichten beistimmen, vielmehr ist wohl gewifs, dafs Lambert unter Allen, welche sich mit der Construction der Thermometer beschäftigt hatten, allein den richtigen Weg nicht verfehlte. Wäre es ihm gelungen, die Gröfse der Ausdehnung der Luft oder irgend einer permanenten Gasart durch Wärme mit absoluter Schärfe zu finden, so wären seine Grade eigentliche

---

1 S. Art. *Wärme. Ausdehnung durch dieselbe.*

2 Philos. Trans. 1777. N. 34.

3 Vollständige Beschreibung von Barometern. Nürnb. u. Leipz. 1784. 8. Anh. S. 45.

4 Der Einwurf, welcher aus der beschränkten Gültigkeit des Mariotte'schen Gesetzes hergenommen ist, fällt übrigens weg, da es in dem hier erforderlichen Bereiche unbedenklich als richtig gelten kann.

Maſse der Wärme und das so graduirte Thermometer könnte als allein richtiger Wärmemesser gelten, ungeachtet des von Gehler gemachten Einwurfes, daſs beim absoluten Nullpuncte der Wärme das Volumen der Luft = 0 werden müſste. Verlangte man nämlich ganz einfach ein richtige Grade der Wärme zeigendes Thermometer, so ist die Luft oder, wenn man Absorption des Sauerstoffgases fürchtet, Stickgas unstreitig die hierzu geeignetste Substanz und die Aufgabe, sie gehörig ausgetrocknet in die Kugel zu bringen, nicht einmal sehr schwierig. Man darf zu diesem Ende nur die verschlossene Kugel mit ihrem Rohre gehörig biegen, dann mit ausgetrocknetem Quecksilber füllen, die anzuwendende trockne Luft in gehöriger Menge hineinbringen, das obere Ende der Röhre in eine feine Spitze ausziehn, die Kugel erwärmen und mit Rücksicht darauf, daſs nach dem Zuschmelzen der Röhre der äuſsere Luftdruck wegfällt, das Quecksilber bis in die Spitze treiben, auch allenfalls eine erforderliche Menge desselben auslaufen lassen, die Spitze mit Siegellack verschlieſsen und endlich nach gehörigem Probiren die Röhre an der geeigneten Stelle mit der Blaslampe zuschmelzen. Werden alsdann bei diesem Apparate, wobei man etwa in die Röhre eingetretene Lufttheilchen *leicht* durch Schütteln wieder in das Gefäſs bringen kann, die festen Puncte genau bestimmt und wird der Einfluſs der durch die wachsende Quecksilbersäule statt findenden Zusammendrückung des eingeschlossenen Luftvolumens gehörig corrigirt, so hat man allerdings ein sehr richtiges Thermometer, seinem Gebrauche aber stehn zwei wesentliche Hindernisse entgegen. Zuerst muſs dasselbe nothwendig stets genau lothrecht hängen, weil sonst die Grade desselben im Verhältnisse der Secanten des Neigungswinkels gegen die Verticale wachsen, was jedoch leicht durch ein Senkel zu vermeiden wäre. Ein zweites weit gröſseres und gar nicht ganz zu beseitigendes Hinderniſs liegt aber in der ausnehmenden Federkraft der Luft, welcher die Reibung des Quecksilbers in der Röhre entgegenwirkt, so daſs man ungeachtet einer Erschütterung des Instrumentes doch nie genau die gemessenen Grade finden und die eigentlichen Bestimmungen der Wärme erhalten würde. Bei einem auf diese Weise construirten Thermometer habe ich diese Wahrheit mehr als genügend durch die Erfahrung bestätigt gefunden.

6) Gay-Lussac [1] beschreibt ein Luftthermometer, welches dazu dienen soll, sehr hohe Grade der Kälte zu messen, z. B. wenn man den Kältegrad wissen will, den stark verdampfende Flüssigkeiten, namentlich schwefelige Säure, erzeugen, womit etwas die Kugel umgebendes Musselin oder ein auf sie gesteckter Schwamm getränkt ist. Dasselbe besteht aus einer Kugel B an einer wohl calibrirten Glasröhre T, welche letztere wenigstens halb so viel Rauminhalt hat, als die erstere. Vor dem Gebrauche muſs gesorgt werden, daſs der Apparat inwendig keine Feuchtigkeit enthalte, zu welchem Ende man oben eine Röhre mit Chlorcalcium gefüllt aufsteckt, das Ganze unter die Luftpumpe bringt und etliche Male exantlirt. In die Röhre wird dann ein etwa zwei Centimeter langer Cylinder von Quecksilber gebracht, der sogenannte *Zeiger* oder *Index*, welchen man vermittelst einer doppelten zusammengedrehten Claviersaite F an jeder willkürlichen Stelle der Röhre zum Stillstande bringen kann [2]. Vor dem Gebrauche bringt man den Index in den oberen Theil der Röhre, benetzt die Kugel mit der verdampfenden Flüssigkeit, hält den Apparat so weit geneigt, daſs der Index eben hinabgleiten kann, und wenn er zum Stillstande gekommen ist, bringt man denselben mittelst des Drahtes auf den tiefsten Punct, damit alle durch ihn abgeschnittene Luft gleichmäſsig erkaltet sey. Oft ist der untere Theil der Röhre mit Dunst beschlagen oder mit Eis überzogen, so daſs man das Ende des Index nicht sehn kann. In diesem Falle genügt es, den Draht mit einem Sperrhaken zu versehn, so daſs er nur bis zu einer gewissen Tiefe eindringen und den Index nur bis zu dieser bringen kann, auſserdem muſs das Herabgleiten des Index langsam bewerkstelligt und durch einige leichte Erschütterungen der Röhre befördert werden, damit er genau an die richtige Stelle gelange. Die Kugel kann auch mit einem kurzen sehr engen Haarröhrchen G unmittelbar verbunden und an dieses erst die graduirte weitere Röhre angebracht werden, da-

Fig. 74.

1 Ann. Chim. Phys. T. LI. p. 435. Poggendorff Ann. XXVII. 681.

2 Der Eisendraht müſste vorher geglüht seyn, weil er sonst leicht ritzt und die Röhre springen macht. Ein dünner Grashalm würde auf jeden Fall geeigneter seyn.

mit es für den Index unmöglich werde, tiefer als bis an das Haarröhrchen herabzugleiten, was insbesondere für den Fall sehr nützlich ist, wenn das Quecksilber gefrieren sollte. Nach Erreichung der gröfsten Kälte wird das untere Ende des Index abgelesen, oder wenn man dieses nicht sehn kann und der Index eine bestimmte Länge in Theilen der Scale hat, so kann man auch den Stand des oberen Endes ablesen und daraus den des unteren finden. Alsdann läfst man den Apparat in einer mittleren gegebenen Temperatur erkalten, was am besten durch Eintauchen in Wasser von bestimmter Wärme geschieht. Gesetzt der Index hätte auf 208 gestanden und sey in Wasser von 13° Wärme bei 274,7 Theilstrichen stehn geblieben, welcher Punct gleichfalls durch leichte Erschütterungen des Röhrchens genau bestimmt werden mufs; nimmt man nun 267 für das Luftvolumen der Kugel bis an den Index bei 0° C., so wird die Temperatur des Wassers bei diesem Thermometer durch $267 + 13 = 280$ ausgedrückt, und da die Temperaturen dem Volumen der Luft proportional sind, so hat man die Proportion

$$274{,}7 : 208 = 280 : x, \text{ also } x = 212.$$

Die beobachtete Kälte ist daher 212°, und um sie in Centesimalgraden auszudrücken, darf man nur 212 von 267 abziehn, welches 55° giebt. Es scheint mir übrigens, als ob dieses Thermometer bei schwieriger Behandlung dennoch nicht hinlängliche Sicherheit gewähre, denn es unterliegt auf jeden Fall dem Fehler, dafs die Luft durch Adhäsion des Quecksilbers an den Röhrenwandungen und dessen Gewicht eine ungleiche Zusammendrückung erleiden könne, und wenn das Quecksilber gefriert, so ist es entweder unbeweglich oder schliefst wegen starker Zusammenziehung nicht luftdicht; bis zum Gefrierpuncte des Quecksilbers sind aber die höheren Kältegrade mit gewöhnlichen feinen Thermometern ohne grofse Schwierigkeiten leicht mefsbar, für noch tiefere Temperaturen würden selbst vorzüglich gute feine Weingeistthermometer, noch besser aber Thermometer mit Schwefelkohlenstoff gefüllt, leichter zu behandeln seyn und sicherere Resultate geben.

7) Weit zweckmäfsiger hat Mitscherlich[1] ein Luftther-

---

1 Poggendorff Ann. XXIX. 203. Geiger's Ann. d. Pharmac. Th. XII. Hft. 2.

mometer angewandt, um höhere, über dem Siedepuncte des Quecksilbers liegende Grade der Hitze zu messen, denn es hält schwer, hierfür ein geeignetes Mittel zu finden, und die Luft wird in dieser Beziehung schwerlich von irgend einem andern Körper übertroffen. Da aber der Apparat bloſs für einen speciellen Zweck, nämlich die Bestimmung des specifischen Gewichtes der Gasarten im Verhältniſs zu ihren chemischen Proportionen, construirt war und in dieser seiner Form nicht wohl als ein allgemein anwendbarer physikalischer Apparat gelten kann, seine Beschreibung auſserdem der Deutlichkeit wegen viel Raum erfordern würde, so begnüge ich mich, die Idee im Allgemeinen zu bezeichnen. Derselbe besteht aus einer etwas weiten Glasröhre mit einem angeschmolzenen engen Thermometerröhrchen, welches in eine sehr feine Spitze ausgezogen wird. Kennt man den Inhalt dieses Apparates und ist die Luft in demselben durch Hitze, die jedoch nicht so stark seyn darf, um das Glas zu erweichen, ausgedehnt, wird dann die untere Spitze im Maximum der untersuchten Temperatur zugeschmolzen, was unter verschiedenen Bedingungen mit ungleichen Schwierigkeiten verbunden seyn dürfte, so giebt die bekannte Ausdehnung der Luft, corrigirt für die gleichzeitige Ausdehnung des Glases und den etwa wechselnden Barometerstand, ein sehr zuverlässiges Maſs der Wärme. Die Messung der statt gefundenen Ausdehnung läſst sich leicht mit groſser Genauigkeit bewerkstelligen. Man darf zu diesem Zweck nur die feine Spitze, deren Inhalt als verschwindende Gröſse vernachlässigt werden kann, unter Quecksilber abbrechen, so wird das Quecksilber eindringen und der Theil der Röhre, welchen dasselbe einnimmt, giebt dann das Maſs der Ausdehnung derselben und somit die Gröſse der statt gefundenen Hitze. Daſs diese Messungen mit der erforderlichen Schärfe geschehn müssen, wozu jedoch die geeigneten Vorrichtungen aus anderen bekannten Apparaten leicht zu entnehmen sind, bedarf keiner besonderen Erwähnung.

8) Noch ein Luftthermometer, dessen sich Haycraft[1] bei seinen Untersuchungen über die specifische Wärme der Gasarten bediente und welches nur ein abgeändertes *Differentialthermometer* nach Leslie ist, unterliegt nach dem ei-

---

1 Edinb. Philos. Trans. T. X. p. 195. G. LXXVI. 311.

genen Geständniſs des Erfinders Veränderungen und kann daher nicht unbedingt empfohlen werden[1].

9) Das berühmte Thermometer der Florentiner Akademie war ein *Weingeistthermometer* und von dieser Zeit an hat man den Weingeist als thermoskopische Flüssigkeit beibehalten. So waren auch Reaumur's Normalthermometer und die ersten von Fahrenheit verfertigten, die wegen ihrer Uebereinstimmung so groſses Aufsehn erregten, mit Weingeist gefüllt und die Anwendung des Quecksilbers durch Fahrenheit fällt nach Musschenbroek erst in das Jahr 1709 oder nach der richtiger scheinenden Vermuthung Gehler's in das Jahr 1714. Aber auch nach dieser Zeit galt der Weingeist für die vorzüglichste thermoskopische Substanz, zum Theil wegen der sehr umfassenden und schätzbaren Untersuchungen, wodurch Reaumur die absolute Ausdehnung desselben bei zunehmender Wärme aufzufinden sich bemüht hatte und welche, namentlich in Frankreich und Deutschland, überschätzt wurden, ungeachtet sie einer für die damaligen Zeiten allzuschwierigen Aufgabe zugehörten und somit keine genügenden Resultate liefern konnten. Insbesondere hat sich Micheli Duchest[2] sehr entschieden über die Vorzüge des Weingeistes ausgesprochen, die jedoch, wenn man den unbedeutenden Umstand des geringeren Preises übersieht, in nichts Anderem bestehn, als in seiner stärkeren Ausdehnung[3], die man für die Wärmevermehrung vom Gefrierpuncte bis zum Siedepuncte = 0,121 seines Volumens annahm, statt daſs sie für das Quecksilber nur 0,015 betragen sollte, eine Bestimmung, die nach den neuesten Untersuchungen über die Schwierigkeit, die Reinheit des gebrauchten Weingeistes zu ermitteln und die von letzterer abhängende Gröſse seiner Ausdehnung aufzufinden, gar nicht genau seyn konnte. Es ist indeſs sicher, daſs die auf jeden Fall ungleich gröſsere Ausdehnung des Weingeistes ihm einen Vorzug vor dem Quecksilber giebt, aber auch den einzigen; denn das schärfere Ablesen der Grade, was man gleich-

---

1 Ueber Pouillet's Luftpyrometer, welches auch als Thermometer dient, wird später geredet werden.

2 Description de la Méthode d'un thermomètre universel. Par. 1742. 8.

3 S. Landriani in Brugnatelli Giorn. 1818. p. 338.

falls angeführt hat, findet höchstens nur beim gefärbten statt, und diese Färbung ist dann in anderer Hinsicht nachtheilig; das leichtere Füllen der Röhrchen mit dieser Flüssigkeit kommt aber gar nicht in Betrachtung. Inzwischen konnte bis auf die neuesten Zeiten herab der Weingeist durch das Quecksilber nicht ganz verdrängt werden, weil letzteres bei der hohen natürlichen Kälte mancher Gegenden gefriert und daher keine weitere Messung tieferer Temperaturen gestattet, wozu dann noch der Umstand kommt, daſs der Druck einer Quecksilbersäule von 20 bis 24 Fuſs Länge, die man neuerdings den in die Erde gegrabenen Thermometern gegeben hat, ohne übergroſse Dicke der Gefäſse das Glas zersprengen und dadurch die Herstellung solcher Apparate unmöglich machen würde.

10) Die Hauptbedingung, worauf der Vorzug einer thermoskopischen Substanz beruht, nämlich die Regelmäſsigkeit oder Gleichmäſsigkeit der Ausdehnung durch zunehmende Wärme, wurde von Anfang an nicht übersehn, sondern war vorzüglichster Gegenstand des Streites bei den Vertheidigern der Vorzüge des Weingeistes und des Quecksilbers, denn diese beiden allein kamen zur Untersuchung, wobei man zugleich von der Voraussetzung ausging, daſs die Ausdehnungen den wirklichen Vermehrungen der Wärme proportional seyn und also die Thermometer die absoluten Quantitäten der vorhandenen Wärme messen müſsten. Insbesondere war es DE LUC[1], welcher sich in dieser Beziehung entschieden für den Vorzug des Quecksilbers aussprach. Von ihm ging dann die oben erwähnte, seitdem als gültig betrachtete Behauptung aus, daſs Flüssigkeiten, die sich beim Gefrieren zusammenziehn und zugleich bei höheren Temperaturen stark verdampfen, sich ebenso wenig bei der Verminderung der Temperatur regelmäſsig zusammenziehn, als bei der Vermehrung regelmäſsig ausdehnen können. Das Verhalten des Quecksilbers unter dem Einflusse veränderter Wärme muſs daher in jeder Beziehung ein regelmäſsiges seyn, weil dasselbe sich beim Gefrieren nicht ausdehnt und nur durch groſse Hitze siedet. Die Richtigkeit der aus diesen Betrachtungen gefolgerten regelmäſsigen Ausdehnung des Quecksilbers fand DE LUC durch die oben[2] be-

1 Recherches cet. T. I. §. 410. Deutsche Ueb. S. 355.

2 S. Art. *Ausdehnung*. Bd. I. S. 590.

reits erwähnten Versuche über die Ausdehnungen verschiedener Flüssigkeiten bestätigt. Versparen wir die weiteren Untersuchungen über diesen Gegenstand bis zur Würdigung der entschiedenen Vorzüge des Quecksilbers, so liegt eine nicht zu beseitigende Mangelhaftigkeit des Weingeists in der höchst schwierigen und vielleicht gar nicht zu erreichenden gleichen Beschaffenheit des anzuwendenden Alkohols. Reaumur[1] nahm, als normal, Weingeist, welcher Schiefspulver entzündete, und mischte ihn wegen des schwerern Siedens mit 0,2 Wasser. Eine solche Bestimmung würde man in der gegenwärtigen Zeit schon unbedingt verwerfen, allein die Erfahrung ergiebt zugleich[2], dafs absoluter Alkohol, wenn er längere Zeit, obgleich in wohl verstopften Flaschen, aufbewahrt oder wiederholt durch das Oeffnen derselben mit atmosphärischer Luft in Berührung gebracht wird, Wasser aus dieser anzieht und von seiner ursprünglichen, nur durch geübte Chemiker zu erhaltenden Reinheit mehr oder minder abweicht; jeder in verschiedenem Mafse mit Wasser gemischte Alkohol befolgt aber eigenthümliche Gesetze der Ausdehnung und alle weichen von der regelmäfsigen in einem nicht unbedeutenden Grade ab. Die genaue Bestimmung der Reinheit des zu verwendenden Alkohols, die schon für einen geübten Physiker eine nicht ganz leichte Aufgabe ist, darf man von dem praktischen Künstler um so weniger erwarten, als die Processe des Füllens der Thermometerröhren, wobei wiederholt neue Quantitäten hineingebracht und wieder herausgenommen werden müssen, die Sache noch um ein Bedeutendes erschweren. Endlich ist es ausnehmend schwer, die letzten Antheile von Luft, welche dem Weingeiste, wie allen Flüssigkeiten, gern anhängt, wegzuschaffen. Ich selbst wurde vor einigen Jahren veranlafst, ein treffliches Weingeistthermometer vom jüngeren Greiner etwas anhaltend zu schütteln, und fand den Stand desselben nachher um 1° R. vermindert, was nicht wohl durch etwas Anderes, als das Entweichen von Luft bewirkt worden seyn konnte, und ich gestehe, dafs seitdem mein Vertrauen zu diesen Thermometern sehr abgenommen hat.

11) Man hat dem Weingeiste den Vorwurf gemacht, dafs

1 Mém. de l'Acad. de Par. 1730. p. 452. 1731. p. 250.

2 S. meine oben genannten Abhandlungen.

er nach langer Zeit seine regelmäſsige Ausdehnung verliere. Dieses ist schon durch HALLEY[1], MUSSCHENBROEK[2] und HAUBOLD[3] geschehen, später aber hat FLAUGERGUES[4] eine mit der Länge der Zeit wachsende Unempfindlichkeit des Weingeistes gegen Wärme behauptet, vermöge welcher seine Ausdehnung abnehmen soll, was jedoch COTTE[5] als einen dadurch veranlaſsten trüglichen Schluſs betrachtet, daſs die von FLAUGERGUES benutzten Thermometer nach älterer Sitte die Temperatur des gefrierenden Wassers als Nullpunct gehabt hätten, welchen DE LUC[6] bei — 0°,8 der achtzigtheiligen Scale setzt. Dagegen behauptet PICTET[7], ein von ihm beobachtetes Weingeistthermometer habe sich von 1743 bis 1822 unverändert erhalten. Im hiesigen Cabinette befindet sich ein sogenanntes Normalthermometer[8] mit sehr dunkel gefärbtem Weingeist von BRANDER, welches nicht früher als 1766 verfertigt seyn kann, jetzt aber so unempfindlich ist, daſs es seinen Stand nur sehr langsam ändert; auch scheint es mir, ohne genauere Messung, eine geringere Ausdehnung zu haben, da es in höheren Graden stets hinter andern genauen Thermometern zurückbleibt; ein zweites von 1783, worin sich die färbende Substanz fast gänzlich abgesondert hat, ist weniger träge, doch scheint auch in ihm der Weingeist von seiner normalen Ausdehnung verloren zu haben. Wenn man aber diese Mangelhaftigkeit als unbedeutend übersieht, da Thermometer, auf deren Genauigkeit gerechnet werden soll, wohl nie ein solches Alter erreichen, so ist doch ohne Widerrede ausgemacht, daſs der Weingeist in höheren Wärmegraden sich nicht gleichmäſsig, sondern zunehmend ausdehnt, aber auch bei tiefen Graden groſser Kälte zeigen sich solche Thermometer ausnehmend unzuverlässig, wie hauptsächlich aus den Beobachtungen in den nördlichsten Thei-

---

1 Philos. Trans. N. 197. Comm. Petrop. T. IX. p. 345.

2 Cours de Phys. T. II. p. 363.

3 Dissertatio de Thermometro Reaumuriano. Lips. 1771. 4.

4 Journ. de Phys. T. LXVI. p. 295. T. LXVII. p. 123.

5 Journ. de Phys. T. LXVI. p. 463.

6 Recherches sur les Modif. de l'Atmosph. T. I. p. 378.

7 Bibl. univ. T. XIX. p. 62.

8 So pflegt man zuweilen die mit allen bekannten Scalen versehenen zu nennen.

len von America deutlich hervorgeht. PARRY[1] hatte bei seinem Aufenthalte auf Melville zehn Weingeistthermometer von gleicher Gestalt und von dem nämlichen Künstler, die aber, oft mit einander verglichen, bei den tiefsten Kältegraden große Differenzen zeigten. Einmal zeigten fünf, mit ungefärbtem Weingeist gefüllte und an demselben Gerüste aufgehangene, gleichzeitig: N. 1. = — 48°,89 C.; N. 2. = — 48°,89; N. 3. = — 44°,99; N. 4. = — 44°,99; N. 5. = — 46°,66 C.; fünf andere mit gefärbtem Alkohol dagegen zeigten: N. 6. = — 39°,99; N. 7. = — 39°,99; N. 8. = — 42°,21; N. 9. = — 42°,21 und N. 10. = — 43°,32 C. Eine Vergleichung des Thermometers N. 5. und N. 10. mit einem Quecksilberthermometer zwischen — 32°,21 und — 34°,44 C. ergab, daſs N. 5. um 1°,22 niedriger und N. 10. um 2°,22 C. höher stand. Im Allgemeinen zeigten sich die Thermometer mit gefärbtem Weingeist schlechter, als die mit ungefärbtem, und meistens blieb die färbende Substanz in der Röhre zurück, wenn das Thermometer plötzlich einer sehr niedrigen Temperatur ausgesetzt wurde. Dieser Umstand und die Angabe von PARRY, daſs der Cognac auf dem Verdecke des Schiffes in starker Kälte Syrupsdicke annahm, so wie die Behauptung HUTTON's, daſs der absolute Alkohol sich vor dem Gefrieren in dickflüssige Lagen von ungleicher Farbe verwandelt habe, und die von mir selbst gemachte Erfahrung[2], daſs gewöhnlich verkäuflicher Spiritus in einer Kälte von — 28° C. schon sehr dickflüssig zu werden beginnt, scheint mir zu beweisen, daſs der Einfluſs groſser Kälte eine Zersetzung des Alkohols oder Ausscheidung der färbenden Substanz und des Wassers verursacht, die schon mehrere, vielleicht viele Grade über dem Gefrierpuncte desselben anfängt und eine regelmäſsige Zusammenziehung desselben hindert, wonach also keine genauen thermometrischen Bestimmungen zu erwarten sind. Auch FRANKLIN[3] erzählt, daſs die von ihm mitgenommenen Weingeistthermometer beim Schmelzpuncte

---

1 Appendix to Capt. PARRY's second Voyage cet. Lond. 1825. 4. p. 252.

2 Sur la dilatation de l'alcool pur. In Mém. de l'Ac. de Pet. p. 16.

3 Narrative of a Journey to the shores of the Polar-Sea cet. Lond. 1823. 4. Ap. p. VII.

des Eises correspondirten, unter diesem Puncte aber merklich differirten und bei — 42°,77 C. bis auf 4°,44 C. steigende Abweichungen zeigten. Ueber dem Puncte des schmelzenden Schnees differirten sie zwar gleichfalls, aber mit sehr unbedeutenden Unterschieden. Diese gewichtigen Zeugnisse müssen das bisher in die Richtigkeit der Weingeistthermometer gesetzte Vertrauen bedeutend schwächen, im Allgemeinen aber darf man nach den über die Ausdehnung dieser Flüssigkeit aufgefundenen Gesetzen wohl annehmen, daſs es räthlich seyn würde, sie mit einer andern geeignetern zu vertauschen, wenn dieses aber nicht geschieht, dafür Sorge zu tragen, daſs die Künstler zum Füllen der Thermometer für sehr hohe Kältegrade möglichst reinen und ungefärbten Weingeist wählen. Zum Messen mittlerer und höherer Wärmegrade wird man sich in allen Fällen, wo es auf etwas höhere Genauigkeit ankommt, dieser Thermometer nicht bedienen.

12) Das *Quecksilber*, welches zuerst Fahrenheit seit 1709 oder 1714 als thermometrische Flüssigkeit gebrauchte, fand hauptsächlich an de Luc einen lebhaften Vertheidiger, wie bereits erwähnt worden ist. Weil es sich nicht sowohl um eine stets gleichmäſsige, als um eine den wirklichen Zunahmen der Wärme proportionale Ausdehnung der thermoskopischen Flüssigkeiten handelte, so lieſs sich de Luc auf ein von Renaldini[1] zuerst vorgeschlagenes, von Wolf[2] und Bülfinger[3] gebilligtes und von Le Sage zur Erhaltung sogenannter *äquidifferentialer Thermometer* empfohlenes Verfahren ein, um die Frage über das Verhältniſs der Ausdehnung des Quecksilbers zu den Incrementen der Wärme bestimmt zu entscheiden. Er mischte zu diesem Ende gleiche Mengen Wasser von ungleichen Temperaturen = m und n zusammen und muſste dann nach Richmann's Gesetze und der Theorie gemäſs an einem richtigen Thermometer, welches die Zunahmen der Wärme durch die Vergröſserung seines Volumens zeigte, $\frac{m+n}{2}$ Grade erhalten. Bezeichneten m und n auch nicht die absoluten Wärmequantitäten der vereinten Massen einzeln

1 Philosophia naturalis. Patav. 1694. fol. T. III. p. 285.
2 Elementa Aerom. Lips. 1709. 12. p. 209.
3 Elementa Phys. Lips. 1742. 8.

genommen, so konnte dieses dem Resultate keinen Abbruch thun; denn gesetzt es sey die Menge der einen $= z + m$, der andern $= z + n$ gewesen, so mufsten in der Mischung $= z + \frac{m+n}{2}$ Wärmemengen vorhanden seyn und das messende Thermometer dennoch $\frac{m+n}{2}$ zeigen. Zum Messen bediente er sich eines in 80 Grade getheilten Quecksilberthermometers. Wurden gleiche Massen von 6° und von 75° vereint, so hätte die entstandene Temperatur = 40°,5 seyn müssen; sie war aber nur 39°,2. Um den Einflufs des Gefäfses zu entfernen, da bei dem genannten Versuche das heifse Wasser in das kalte Gefäfs gegossen worden war, wurde jetzt umgekehrt das kältere Wasser von 5°,2 in das heifsere von 75° gegossen und die Mischung zeigte statt 40°,1 nur 39°,3. De Luc argumentirte hiernach, dafs die wahre Wärme um mehr als den halben Unterschied der Temperaturen $\left(= \frac{75 - 5,2}{2} = 34,9\right)$ abgenommen, das Quecksilber sich also um mehr als den halben Unterschied (75 — 39,3 = 35,7) verdichtet habe, und es blieb ihm also für die andere Hälfte bis zur völligen Erreichung der kälteren Temperatur weniger Verdichtung (39,3 – 5,2 = 34,1) übrig. Das Volumen des Quecksilbers zeigt sich also bei gleichen Verminderungen der Wärme wirklich abnehmend, was deutlich zeigt, dafs der Gang der Verminderung seines Volumens den Veränderungen der Wärme näher kommt, als dieses bei andern Flüssigkeiten der Fall ist. Denn da dieser Gang mit den Verdichtungen anderer Flüssigkeiten bei gleichen Verminderungen der Wärme verglichen zunehmend, mit der Wärme selbst aber verglichen stets noch abnehmend ist, so müssen sich alle andere vom Gange der Wärme noch weiter als das Quecksilber entfernen. Es läfst sich aus diesen Versuchen sogar folgern, dafs der Gang des Quecksilbers von dem der Wärme überhaupt nur wenig abweiche. Werden die erhaltenen Gröfsen für den Einflufs des Ausgiefsens und der Gefäfse nach Wahrscheinlichkeit corrigirt, so mufste das Thermometer statt 39°,3 vielmehr 40°,3 zeigen, wenn seine Grade wirkliche Wärmemengen ausdrücken sollten. Der Gang der Oele wich wiederum nur wenig von dem des Quecksilbers ab und namentlich ergab eine Verglei-

chung, dafs das Chamillenöl bei der Temperatur der genannten Mischung gerade ebenso weit vom Quecksilber, als dieses von der Wärme selbst abwich. Aus mehreren Versuchen glaubte daher DE LUC die in nachstehender Tabelle bezeichneten Gröſsen erhalten zu haben, worin z die beim schmelzenden Eise noch vorhandene wirkliche Wärme angiebt.

	Quecksilbertherm. 80th. Scale	Wirkliche Wärme	Unterschiede d.wirkl. Wärme
Siedepunct	80	z + 80,00	4,72
	75	z + 75,28	4,72
	70	z + 70,56	4,79
	65	z + 65,77	4,81
	60	z + 60,96	4,81
	55	z + 56,15	4,89
	50	z + 51,26	4,89
	45	z + 46,37	4,97
	40	z + 41,40	5,00
	35	z + 36,40	5,08
	30	z + 31,32	5,10
	25	z + 26,22	5,10
	20	z + 21,12	5,18
	15	z + 15,94	5,20
	10	z + 10,74	5,31
	5	z + 5,43	5,43
Eispunct	0	z + 0,00	80,00

Für sonstige Flüssigkeiten will DE LUC folgende Bestimmungen gefunden haben, die aus den Graden hervorgehn, welche mit ihnen gefüllte Thermometer zeigen, wenn das Quecksilberthermometer auf $38^0,6$ steht, also die wirkliche Wärme $= z + 40^0$ ist. Dabei ist auch das Verhältniſs ihrer Verdichtungen vom Puncte des siedenden Wassers bis zu $z + 40^\circ$ und von hier an bis zum Puncte des schmelzenden Eises gegeben.

Flüssigkeiten in d. Thermometern	Stand bei der Wärme z + 40°	Verhältnifs d. Verdichtungen in d. 1sten u. 2ten Hälfte
Quecksilber . . .	38°,6	15 : 14,0
Baumöl u. Leinöl	37,8	15 : 13,4
Chamillenöl . . .	37,2	15 : 13,0
Quendelöl	37,0	15 : 12,9
Gesätt. Salzwasser	34,9	15 : 11,6
Weingeist	33,7	15 : 10,9
Wasser	19,2	15 : 4,7

Sofern daher die Thermometerscalen gleichmäfsige Grade erfordern, ist das Quecksilber unter allen Flüssigkeiten bei weitem am geeignetsten.

Die hier mitgetheilten Bemühungen von DE LUC sind zwar sehr schätzbar, allein schon eine oberflächliche Betrachtung führt sehr bald die Ueberzeugung herbei, dafs kein genaues Resultat von ihnen zu erwarten sey. Zwar scheint das gewählte Mittel der Mischungen sehr geeignet zu seyn, und es wurde daher schon früher durch MORINUS[1] in Vorschlag gebracht, welcher zugleich eine allgemeine Formel zur Berechnung der Differenzen angab, auch prüfte KRAFT[2] die Sache durch Versuche, indem er von dem Grundsatze ausging, dafs das gewählte Mittel für den beabsichtigten Zweck völlig geeignet sey, allein er erhielt Werthe, die von den theoretischen Bestimmungen sich um mehrere Grade entfernten. Dieses ist wohl allzunatürlich und geht aus den unüberwindlichen Schwierigkeiten dieser Versuche von selbst hervor. Nicht genug, dafs die Wärme der Gefäfse nach ihrer specifischen Wärmecapacität mit in Rechnung zu nehmen wäre, müfste auch die an das Thermometer abzugebende oder von ihm erhaltene Wärme, der Verlust durch Verdampfung, der Zugang oder Abgang durch die äufsere Umgebung u. s. w. berücksichtigt werden, Gröfsen, deren genauere Bestimmung nicht selten aufser dem Bereiche der Messung liegt.

13) Die übrigen Vorzüge des Quecksilbers, welche DE LUC anführt, sind zuerst, dafs dasselbe sich am leichtesten

1 Astrologia gallica. p. 158.
2 Comment. Petrop. T. XIV. p. 229.

von der anhängenden Luft befreien lasse, wobei er nicht hätte übersehn sollen, dafs dasselbe, als einfacher Körper, keiner Zersetzung unterliegen kann; zweitens erträgt dasselbe hohe Grade der Hitze; drittens ist es weit empfindlicher und zwar, seiner Annahme gemäfs, sechsmal empfindlicher als Weingeist. Von der Genauigkeit dieser Bestimmung abgesehn ist die Sache selbst unzweifelhaft und in der geringeren specifischen Wärmecapacität dieses Metalls sowohl, als auch in seiner grofsen Leitungsfähigkeit gegründet. Sehr unwissenschaftlich ist daher die Angabe von Luz[1], dafs Quecksilberthermometer und Weingeistthermometer in freier Luft und in langsam erwärmtem oder erkaltendem Wasser gleich empfindlich seyen, bei plötzlich abnehmender Wärme aber das erstere sich doppelt und bei plötzlich zunehmender sich dreimal empfindlicher zeige, als das letztere. Endlich liegt ein Hauptvorzug des Quecksilbers vor dem Weingeiste darin, dafs es sich rein und stets von gleicher Beschaffenheit darstellen läfst, was beim Weingeist nur schwer oder überhaupt nicht erreichbar ist, ein Umstand, dessen Möglichkeit de Luc kaum hinlänglich gewürdigt hat.

14) Micheli Ducrest[2] giebt dem Weingeiste den Vorzug vor dem Quecksilber, weil seine Ausdehnung regelmäfsiger seyn soll. Hierbei geht er aber von dem seltsamen Grundsatze aus, dafs die Temperatur der Erde ein gemäfsigtes Mittel sey, über welches sich die Wärme am Senegal so erhebe, als die Kälte in Kamtschatka unter dieselbe herabgehe, welche letztere damals durch das Quecksilberthermometer, in Folge der Zusammenziehung dieses Metalls, unnatürlich tief gefunden worden war. Hiernach schliefst er, dafs der Weingeist sich regelmäfsig, das Quecksilber aber unregelmäfsig verändere, und hierauf gründet er die thermometrischen Werthe beider Substanzen. Strohmeyer[3] äufserte gegen die Versuche und Schlüsse de Luc's, dafs der Weingeist auf alle Fälle für tiefe

---

1 Vollständige Anweisung, die Thermometer zu verfertigen. Cap. 8. S. 159. Eine 2te vermehrte Aufl. 1823.

2 Description de la méthode d'un thermomètre universel. Par. 1742. 8.

3 Anleitung übereinstimmende Therm. zu verfertigen. Gött. 1775. 8. S. 12.

Kältegrade den Vorzug habe, weil er gefunden hatte, dafs in einer Mischung von Schnee und rauchendem Salpetergeist bei —26°,66 C. der Weingeist noch vollkommen flüssig blieb, während das Quecksilber schon zu einem weichen Amalgama (vermuthlich wegen Verunreinigung) gerann, sich dann stark zusammenzog und bei noch gröfserer Kälte wie ein Faden hängen blieb. Die Resultate der Versuche von Ducrest, die hauptsächlich gegen de Luc entscheiden sollen, weichen nach einer Zusammenstellung derselben durch Luz, der er noch seine eigenen hinzufügt, keineswegs bedeutend ab, wie folgende Tabelle zeigt[1].

	Weingeistthermometer.		
Quecksilbertherm.	Ducrest	de Luc	Luz
Siedepunct 80	80,00	80,00	80,00
75	73,21	73,80	73,82
70	66,83	67,80	67,80
65	60,80	61,90	61,90
60	55,06	56,20	56,10
55	49,57	50,70	50,40
50	44,31	45,30	44,90
45	39,24	40,20	39,60
40	34,36	35,10	34,70
35	29,63	30,30	29,90
30	25,05	25,60	25,30
25	20,60	21,00	20,90
20	16,27	16,50	16,50
15	12,05	12,20	12,20
10	7,94	7,90	7,90
5	3,93	3,90	3,90
0	0,00	0,00	0,00
— 5	——	——	— 3,90
— 10	——	——	— 7,60
— 15	——	——	—11,20
— 20	——	——	—14,50

1 Auch Wildt hat neuerdings ein Weingeistthermometer mit einem Quecksilberthermometer verglichen und ungefähr gleiche, als die in der Tabelle enthaltenen Abweichungen gefunden. S. Kastner Archiv 1825. Dec. Edinb. New Phil. Journ. N. II. p. 327. Die Unterschiede sind aber gröfser, als sie nach meinen Versuchen bei guten Thermometern seyn können.

Die hier gefundenen Unterschiede sind so grofs, dafs man sich unter der Voraussetzung ihrer vollkommenen Genauigkeit unmöglich dieser zwei Thermometer zur Messung der Wärme bedienen könnte, wie noch jetzt sehr häufig geschieht. Die ungleich genaueren Versuche von Flaugergues[1] zeigen bei weitem geringere Abweichungen beider unterhalb des Gefrierpunctes, aber noch gröfsere oberhalb desselben, wovon die Ursache darin liegt, dafs bei jenen der Siedepunct für beide Arten von Thermometern auf 80° gesetzt, bei diesen aber der eigentliche Siedepunct des Weingeistes genommen worden ist. Das hier gebrauchte Weingeistthermometer war unter den Augen Reaumur's durch Nollet verfertigt worden, das Quecksilberthermometer von einem bewährten neueren Künstler. Beide zeigten unter gleichen Bedingungen folgende Temperaturen:

	Thermometer	
	Weingeist	Quecksilber
Zwei Theile zerstofsenes Eis und ein Theil Kochsalz	—17°,4	—16°,6
Zwei Theile zerstofsenes Eis und ein Theil Salmiak	— 12,7	— 12,4
Zwei Theile zerstofsenes Eis und ein Theil Zucker	— 5,0	— 4,9
Zwei Theile zerstofsenes Eis und ein Theil Salpeter	— 3,5	— 3,42
Schmelzendes Eis	0,0	0,0
Sechsjährige Messungen des Wassers in einem 34 Fufs tiefen Brunnen	10,47	9,64
Wärme in einem Keller	13,8	12,7
Wärme des menschlichen Körpers	32,7	29,8
Schmelzpunct des gelben Wachses	56,25	49,6
Siedender Alkohol von 0,851 spec. Gew. bei 28 Z. Barometerhöhe .	75,6	63,5
Siedepunct einer Mischung aus 3 Theilen jenes Alkohols und einem Theil Regenwasser bei gleicher Barometerhöhe	80	66,8

1 Correspond. Astronom. T. IX. N. 5. p. 435. Edinb. Journ. of Sc. N. II. p. 374.

15) Nach den oben über Luftthermometer mitgetheilten Untersuchungen giebt die Luft die Zunahmen der Wärme genau an und die übrigen Flüssigkeiten müssen hiernach geprüft werden, was in den neuesten Zeiten mit ungemeiner Sorgfalt geschehn ist und sehr zum Vortheil des Quecksilbers entschieden hat. So fand FLAUGERGUES[1] die Ausdehnung des Quecksilbers von — 20° R. bis 160° und selbst 180° R. ganz gleichmäfsig, mit den Graden des Luftthermometers übereinstimmend und also den Vermehrungen der Wärme direct proportional, was aber wohl nicht für absolut genau gelten kann; richtiger dagegen ist die Angabe ebendieses Gelehrten, wonach zwischen — 25° C. und + 100° C. keine Abweichung des Quecksilberthermometers vom Luftthermometer wahrnehmbar ist, denn hiermit stimmen die Resultate der Versuche von GAY-LUSSAC und die vorzüglich schätzbaren von DULONG und PETIT vollkommen überein[2]. Innerhalb dieser Temperaturen haben daher die Quecksilberthermometer so entschiedene Vorzüge, dafs sie nicht wohl durch andere und namentlich nicht durch Weingeistthermometer verdrängt werden können; für tiefere Grade der Kälte, jedoch nur für solche, bei denen das Quecksilber zu gefrieren anfängt[3], sind sie ganz unbrauchbar, für höhere aber und wegen des hoch liegenden Siedepunctes selbst für sehr hohe dürfen sie als sehr brauchbar gelten, um so mehr, als es leicht ist, sie durch eine einfache Correction auf das Luftthermometer zu reduciren, wovon später die Rede seyn wird. Ueber das Verhalten derselben in tiefer Kälte hat PARRY[4] schätzbare Beobachtungen mitgetheilt. Hiernach gefror das Quecksilber bei — 37°,77 bis — 38°,88 C. oder nach einer andern Angabe bei — 39°,15 bis 39°,52 C., denn es blieb flüssig bei — 38°,88, wenn es sich lange in dieser Temperatur befand, und gestand sogleich, wenn es etwa drei Stunden lang einer Kälte von — 39°,44 ausgesetzt gewesen war. Lagen die Thermometer horizontal, so zeigten sie die Temperaturen bis — 37°,77 oder — 38°,88 genau übereinstimmend, hingen sie aber lothrecht oder wurden sie erschüttert, so sank das Quecksilber bis — 43° C.

1 Journal de Phys. T. LXXXII. p. 401.

2 S. *Ausdehnung.* Bd. I. S. 598.

3 Man setzt den Gefrierpunct des Quecksilbers = — 39°,44 C.

4 Second Voyage cet. Lond. 1825. 4. Append. p. 254. 262.

und noch weiter herab und gefror dann. Das Hängenbleiben des Quecksilbers in den Röhren der horizontal liegenden Thermometer, ohne dafs man selbst mit der Loupe Zwischenräume wahrnehmen konnte, wird von einer verminderten Cohäsion seiner Theile bei unveränderter Contraction abgeleitet, was aber wohl nicht scharf genug aufgefafst ist. Gelegentlich wurde auch die absolute Zusammenziehung des Quecksilbers vermittelst einer Röhre mit daran befindlicher Kugel gemessen und zwischen $-1^{\circ},57$ und $-33^{\circ},89$ gleich $\frac{1}{4804,5}$ für 1° C. gefunden, was von der durch Dulong und Petit[1] gefundenen Gröfse $= \frac{1}{5550}$ nicht unbeträchtlich abweicht. Jedoch kann die erstere Bestimmung wohl auf gleiche Genauigkeit, wie die letztere, keine Ansprüche machen.

16) Als *sonstige Flüssigkeiten*, die sich zur Füllung der Thermometerröhren eignen sollen, finde ich blofs den Salmiakgeist durch Luz empfohlen, weil dieser mit dem Weingeist gleichmäfsige Ausdehnung zeige und sich durch etwas Grünspan schön färben lasse. Ob man einen wirklichen weiteren Gebrauch von dieser Substanz zu dem genannten Zwecke gemacht habe, finde ich nirgends ausdrücklich angegeben, auch habe ich selbst keine Erfahrung hierüber. Newton[2] schlug bekanntlich Leinöl als thermometrische Substanz vor, weil diese Flüssigkeit weit schwerer siede, als Weingeist; er scheint aber die Aufgabe nicht weiter ins Einzelne verfolgt zu haben. Die oben[3] bereits ausführlich erwähnten, von de Luc und Gay-Lussac angestellten Versuche mit Thermometern, die mit verschiedenen Flüssigkeiten gefüllt waren, hatten nicht sowohl den Zweck, die Brauchbarkeit dieser Substanzen zur Verfertigung von Beobachtungsapparaten aufzufinden, als vielmehr den Gang ihrer Ausdehnungen auszumitteln. Im Ganzen hat das Quecksilber für mittlere und höhere Temperaturen, genauer für -30° bis $+100^{\circ}$ C. so entschiedene Vorzüge, dafs man dasselbe bei guten Apparaten schwerlich mit irgend einer andern Flüssigkeit vertauschen wird, es sey denn,

1 S. Art. *Ausdehnung*. Bd. I. S. 600.
2 Phil. Trans. 1701. N. 270.
3 S. Art. *Ausdehnung*. Bd. I. S. 590.

dafs besondere Zwecke, wie beim Six-Thermometer, beim Thermometrographen u. s. w., dieses fordern. Da es aber für die in vielen Gegenden unter höheren Breiten häufig vorkommenden tiefen Kältegrade durchaus nicht ausreicht, so mufste man nothwendig eine andere Substanz wählen, und hierzu diente fortwährend der Weingeist, hauptsächlich wohl deswegen, weil dieser seit den frühesten Zeiten als thermoskopische Substanz bekannt war und weil man weifs, dafs er den höchsten Kältegraden widersteht. Dafs er ursprünglich zu dieser Bestimmung verwandt wurde, davon liegt die Ursache noch aufserdem ohne Zweifel in der allgemeinen Bekanntschaft desselben und in dem vielfachen Gebrauche, welchen die Chemiker stets von ihm gemacht haben.

Meine bereits erwähnten Untersuchungen über die Ausdehnung der tropfbaren Flüssigkeiten führten unmittelbar zur Beantwortung der Frage, welche Flüssigkeiten sich vorzugsweise zur Füllung der Thermometer eignen. Die erste, wesentlich hierzu erforderliche Eigenschaft einer für beträchtliche Unterschiede der Temperaturen möglichst gleichmäfsigen Ausdehnung durch Wärme besitzt das Quecksilber in einem so vorzüglichen Grade, dafs es nicht wohl in dieser Beziehung durch irgend eine andere Flüssigkeit ersetzt, geschweige denn verdrängt werden sollte. Ihm am nächsten hierin kommt die Schwefelsäure (vom spec. Gew. = 1,836 bei 12°,5 C.), allein beide Flüssigkeiten widerstehen tiefen Kältegraden nicht und obendrein sind die Gefrierpuncte der Schwefelsäuren (oder vielmehr der Schwefelsäure-Hydrate) nach ungleichen Mengen des enthaltenen Wassers so verschieden, dafs schon hierin ein genügender Grund liegt, ihre Anwendung für Thermometer unbedingt zu verwerfen. Ueberhaupt mufs die Aufgabe gegenwärtig blofs darauf beschränkt werden, eine Flüssigkeit zu haben, die sich zur Messung tiefer Kältegrade am besten eignet, und in dieser Beziehung können blofs das rectificirte Steinöl (*petroleum rectif.*) und der Schwefelkohlenstoff mit dem Weingeist um den Vorzug streiten. Nach der Zusammenstellung der hierzu erforderlichen Bedingungen[1] fällt aber der Vorzug weit mehr auf die Seite des Steinöls und, wenn es sich blofs um hohe Kältegrade handelt, noch mehr auf die Seite

1 S. meine Abhandl. Sur la dilatation de l'Alcool absolu. p. 34.

des Schwefelkohlenstoffs, als auf die des Weingeistes, wie aus folgender Vergleichung dieser drei Flüssigkeiten evident hervorgeht.

a) Der Weingeist ist nur mit großer Mühe und durch sorgfältiges Operiren völlig rein zu erhalten, verliert aber seine Reinheit durch längeres Stehen, ja sogar durch den Zutritt feuchter atmosphärischer Luft während der Operation des Füllens der Thermometerröhren, wenn diese Arbeit nicht absichtlich beschleunigt wird[1]. Die Ausdehnung desselben wird aber um so viel unregelmäßsiger, je größer die Menge des in ihm enthaltenen Wassers ist, und es kann wohl seyn, daß die oben erwähnten Unterschiede der verschiedenen, von PARRY gebrauchten Thermometer hierin ihren Grund hatten. Das Petroleum kann zwar gleichfalls durch ungleich öftere und mehr oder minder sorgfältige Rectificationen von etwas verschiedener Beschaffenheit seyn, im Ganzen ist aber seine Darstellung von einer gewissen für diesen Zweck zu bestimmenden Reinheit keineswegs schwierig. Der Schwefelkohlenstoff, vorschriftsmäßsig bereitet, ist stets von gleicher Beschaffenheit und hat daher in dieser Beziehung den Vorzug.

b) Die absolute Größe der Ausdehnung für gleiche Unterschiede der Wärme giebt zwar keinen sehr wesentlichen Vortheil, immer aber einigen, sofern durch längere Grade die Beobachtungen schärfer werden, bei gleichen Graden aber das Volumen der thermometrischen Flüssigkeit so viel kleiner seyn darf, je größer die Ausdehnung desselben ist. Es verhalten sich aber die Ausdehnungen des Schwefelkohlenstoffes, des Alkohols und des Petroleums für 50° C. wie 60723 : 56071 : 52652 und es übertrifft also der Schwefelkohlenstoff den Weingeist sehr nahe um ebenso viel, als dieser das Petroleum.

c) Eine wesentliche Bedingung ist die Gleichmäßsigkeit der Ausdehnung; denn obgleich man die regelmäßsigen Zunahmen der Ausdehnung in die zu verfertigenden Scalen aufnehmen oder die in gleiche Theile getheilten hiernach cor-

---

1 Der von mir bei den ersten Versuchen angewandte Alkohol von 0,808 spec. Gewicht bei 12°,5 C. war als absoluter Alkohol bereitet, hatte aber mehrere Monate in einer mit einem Glasstöpsel verschlossenen Flasche gestanden und war häufig geöffnet worden. S. über die Ausdehnung der tropfb. Flüssigk. S. 73.

rigiren kann, so gewährt doch die gröfsere Gleichmäfsigkeit der Ausdehnung den bedeutenden Vortheil der Einfachheit und daraus folgenden Bequemlichkeit. Wie gleichmäfsig die Ausdehnung sey, übersieht man am besten, wenn man die Formeln für die Volumensvermehrungen mit einander vergleicht. Bezeichnet man das Volumen bei 0° C. = V durch 1 und heifst dann ΔV die Vergröfserung dieses Volumens für t Grade der Centesimalscale, so ist für Schwefelkohlenstoff

$$\Delta V = 0,0011256\,t + 0,000001715\,t^2 + 0,00000000121166\,t^3,$$

für Petroleum

$$\Delta V = 0,00098855\,t + 0,00000212\,t^2 - 0,0000000267\,6t^3 + 0,000000000195\,t^4,$$

für absoluten Alkohol

$$\Delta V = 0,00101511\,t + 0,0000030884\,t^2 - 0,000000019245\,t^3.$$

Könnten alle folgende Glieder aufser dem ersten vernachlässigt werden, so setzte dieses eine ganz gleichmäfsige Ausdehnung voraus, und um zu bestimmen, wie weit man sich hierdurch von der Wahrheit entfernt, darf man nur die Werthe des ersten Gliedes und die Summe der Werthe der übrigen Glieder für eine gewisse Menge Grade der Centesimalscale mit einander vergleichen. Es ist aber für 10° C.

	Werth des ersten Gliedes	Summe der Werthe d. übrigen Glieder	Unterschied
Schwefelkohlenstoff	=0,011256	0,00017271	0,0110833
Petroleum	=0,009885	0,00018725	0,0096977
Alkohol	=0,010151	0,00028960	0,0098614
und für 100 Grade der Centesimalscale			
Schwefelkohlenstoff	0,112560	0,018361	0,094199
Petroleum	0,098855	0,013950	0,084905
Alkohol	0,101511	0,011639	0,089872

Der Werth des ersten Gliedes übertrifft beim Schwefelkohlenstoff die Summe der Werthe der andern Glieder am meisten, beim Petroleum und Alkohol sind die Unterschiede fast gleich, doch hat in dieser Beziehung der letztere einen geringen Vorzug.

d) Man setzt zwar den Siedepunct des Schwefelkohlenstoffs auf 46°,6 und den des Petroleums auf 85°,56, allein dem oben aufgestellten Satze gemäfs, dafs leicht siedende Flüssigkeiten sich in thermometerartigen Apparaten bis weit über

ihren Siedepunct erhitzen lassen und auch in den höheren Temperaturen ihre gesetzmäſsige Ausdehnung nicht ändern, habe ich namentlich auch den Schwefelkohlenstoff bis 65° C. erhitzt, ohne daſs er zu sieden anfing, und sein Verhalten in dieser Beziehung übertrifft also das ähnliche, beim Schwefeläther wahrgenommene bedeutend. Es unterliegt aber hiernach gar keinem Zweifel, daſs Thermometer, aus dieser Flüssigkeit bereitet, bis zum genannten Puncte von 65° C. graduirt werden können, und dieses genügt vollkommen, sobald man mit solchen Thermometern nichts weiter beabsichtigt, als die Temperaturen der Luft und die tiefsten Grade natürlicher und künstlicher Kälte zu messen. Der Siedepunct des Steinöls wird bei 85°,5 C. gesetzt, was an sich schon hinreichend seyn würde; inzwischen habe ich die Erhitzung auch dieser Flüssigkeit bis 95° C. getrieben und die Brauchbarkeit derselben zu Thermometern unterliegt also in dieser Beziehung durchaus keinem Zweifel.

e) Der Gefrierpunct des absoluten Alkohols liegt so tief, daſs höchst wahrscheinlich keine natürliche Kälte hinreicht, ihn gefrieren zu machen. Nach der aus meinen Versuchen[1] entnommenen Berechnung liegt der Punct seiner gröſsten Dichtigkeit bei — 90° C., einige Grade unter dieser Temperatur müſste er also der Analogie nach gefrieren, was nahe genug mit den neuesten Versuchen übereinstimmt, wonach er in runder Zahl bei —100° durch Anwendung der liquiden Kohlensäure gefroren seyn soll, sofern man bei solchen Messungen doch schwerlich für etwa 6 bis 8 Grade einstehen kann. Für das Steinöl giebt die Curve seiner Ausdehnung — 71° C. als den Punct seiner gröſsten Dichtigkeit, und somit muſs sein Gefrierpunct noch tiefer liegen, übereinstimmend mit der Erfahrung, wonach dasselbe bis jetzt noch nicht zum Gestehen gebracht worden ist. Auf jeden Fall würde dasselbe hiernach zur Messung der natürlichen Kältegrade ausreichen, worauf es zunächst vorzüglich ankommt. Die Ausdehnungscurve des Schwefelkohlenstoffes giebt keinen Punct der gröſsten Dichtigkeit, und indem er hiernach sich vorzugsweise zur thermometrischen Flüssigkeit eignet, bleibt zugleich sein Gefrierpunct ungewiſs, muſs aber gleichfalls sehr tief liegen, weil er durch künstliche Kälte bis jetzt nicht aufgefunden worden ist.

---

1 Sur la Dilatation de l'Alcool pur. p. 25.

Alles dieses zusammengenommen verdient der Alkohol den Vorzug, welchen man ihm bisher mehr nach Verjährung, als nach genauer Prüfung beigelegt hat, keineswegs, vielmehr ist das Quecksilber für mittlere und höhere Wärmegrade ohne allen Vergleich bei weitem vorzuziehn, für hohe Kältegrade dagegen gebührt dem Schwefelkohlenstoff der erste, dem rectificirten Steinöl der zweite und dem Alkohol erst der dritte Rang, wobei ein merkliches Uebergewicht noch immer auf die Seite der ersten dieser drei Flüssigkeiten fällt.

B. Eintheilung der verschiedenen Scalen.

17) Das Drebbel'sche Thermometer war ein bloſs empirisch construirtes Werkzeug, den unvollkommenen Wettergläsern nach Otto v. Guericke und den noch jetzt gangbaren Hygrometern aus Darmsaiten zu vergleichen, sofern diese Instrumente bloſs die vorhandenen Veränderungen anzeigen, ohne die Gröſse derselben genau zu messen. Es liegt in der Natur der Sache, daſs man gerade beim Thermometer zuerst eine bestimmte Sprache und ein genaues Maſs verlangte, und daher wurden sofort verschiedene Vorschläge gemacht, dieses zu erreichen. Die Mitglieder der Akademie del Cimento gaben ihrem Thermometer einen Punct H der mittleren Wärme, die sie als die Wärme der Erde ansahn und in tiefen Kellern, wo sie das ganze Jahr hindurch constant blieb, zu finden glaubten. Von diesem Puncte aus nahmen sie willkürliche Grade nach oben der Wärme, nach unten der Kälte an, meistens 100 nach jeder Seite. Es leuchtet ein, daſs auf diesem Wege keine übereinstimmenden Thermometer zu erhalten sind, jedoch waren jene Gelehrten vorsichtig genug, alle ihre Thermometer, deren eine groſse Menge verfertigt und zum Theil versandt wurden, nach einem Normalapparate zu graduiren, wodurch man mindestens eine nahe Uebereinstimmung derselben unter einander erreichte. Inzwischen scheint die Technik damals noch nicht ausgereicht zu haben, diese Uebereinstimmung hervorzubringen, denn Wolf[1] klagt sehr über die Abweichungen

Fig. 71.

1 Nützliche Versuche Th. II. Cap. V. §. 67.

in den Angaben seiner vier Florentiner Thermometer. Dennoch konnte Libri[1] bei denen, deren mehrere er in einer Kiste zufällig wieder auffand, die Scalen prüfen und mit den jetzt üblichen vergleichen. Es existirten zwei Arten solcher Thermometer, grofse, die bis 100 Grade, und kleinere, die bis 50 reichten. Die letzteren hat Libri verglichen und gefunden, dafs ihr Nullpunct mit 15° R., ihr 50ster Grad mit 44° R. und ihr 13,5 Kältegrad mit 0° R. zusammenfällt. Wenn man berücksichtigt, dafs das Ziel des damaligen Strebens eigentlich darauf gerichtet war, ein Mafs der absoluten Wärmemengen zu haben, so kann man den Vorschlag Renaldini's[2] besser würdigen und es begreiflich finden, dafs er so nahe bei der Sache diese dennoch verfehlte. Er schlug vor, man solle die Kugel des Thermometers mit Eis umgeben und diesen Stand desselben mit 0 bezeichnen, dann das Thermometer in eine Mischung von 11 Theilen siedenden und 1 Theil kalten Wassers (*aqua gelida*) senken und seinen Stand mit 1 bezeichnen; ebendieses solle man mit 10, 9, 8.... und mit 2, 3, 4.... vereinten Theilen wiederholen, um dadurch 2, 3, 4.... Grade zu erhalten, oder man solle nur 12 solche Theile, als den zuerst gefundenen, auftragen, so habe man wirkliche Grade der Wärme, indem die des siedenden Wassers in 12 gleiche Theile getheilt sey. Hierbei wird aber vorausgesetzt, dafs die *aqua gelida*, deren eigentliche Temperatur sogar nicht einmal genau bestimmt ist, gar keine Wärme habe. Merkwürdig bleibt dabei, dafs man diesen sinnreichen Gedanken, der durch blofse geschickte Manipulation zum richtigen Resultate der Erhaltung zweier unwandelbarer Puncte führen mufste, zwischen denen bekanntlich eine willkürliche Menge gleicher Theile liegen kann, damals ganz unbeachtet liefs, weil man beim Suchen nach dem Verborgenen das einfach Vorliegende gewöhnlich zu übersehn pflegt. Newton's[3] Scharfsinn führte ihn, ohne der Aufgabe mehr als eine nur beiläufige Aufmerksamkeit zu schenken, auf einen sehr richtigen Weg, durch dessen weitere Verfolgung man gleichfalls

1 Ann. Chim. et Phys. T. XLV. p. 354. Poggendorff Ann. XXI. 325.

2 Philosophia naturalis. Patav. 1694. fol. T. III. p. 276.

3 Philos. Transact. 1701. N. 270.

das gesuchte Ziel erreicht haben würde. Er schlug Leinöl als besser geeignete Substanz vor, weil diese Flüssigkeit höhere Grade der Hitze erträgt, als der damals allein bekannte Weingeist. Auch ihm galt der Punct, welchen ein solches Thermometer im zergehenden Schnee zeigte, für den eigentlichen Nullpunct der Wärme, und als zweiten festen Punct nahm er die Wärme des menschlichen Körpers an, die er bei 12° setzte, dann habe das siedende Wasser 34 und das eben zu gestehen anfangende Zinn 72 solcher Grade. Da man voraussetzen darf, dafs Newton alle Sätze dieser Art auf wirklich angestellte Versuche stützte, so mufs man sich über die Schärfe dieser Bestimmungen ernstlich wundern. Setzt man nämlich die mittlere Wärme des menschlichen Körpers nach John Davy auf 36°,66 C., so giebt die Proportion

$$12 : x = 34 : 100$$

statt dieser Bestimmung 35°,3 der Centesimalscale nach Newton oder die andere

$$12 : 36{,}66 = 34 : x$$

den Siedepunct bei 104°,03 der Centesimalscale. Diese geringen Abweichungen sind aber so viel leichter erklärlich, als man die Wärme des menschlichen Körpers ohne die jetzt aufgefundenen Vorsichtsmafsregeln leicht zu gering findet.

18) Daniel Gabriel Fahrenheit in Danzig hat das unleugbare Verdienst, durch Benutzung einiger vor ihm bekannter Angaben und durch praktisches Talent, verbunden mit beharrlichem Fleifse, die Construction der Thermometer zuerst auf eine sichere Grundlage gebaut zu haben. Als Verfertiger von Wettergläsern machte er auch Thermometer und zwar nach dem damaligen Gebrauche aus Weingeist mit Wasser verdünnt oder aus unreinem Alkohol. Dafs er keinen absoluten Alkohol angewandt habe, ist wohl gewifs, von welcher Reinheit derselbe aber gewesen sey, finde ich nicht angegeben; die gewöhnliche Probe damals war, zu versuchen, ob derselbe Schiefspulver entzünde, und solcher wurde dann zuweilen noch mit etwas Wasser gemischt. Der strenge Winter von 1709, wobei er sicher die Temperatur mit seinen noch unvollkommenen Thermometern mafs, führte ihn auf den wichtigen Schlufs, dafs der Punct des schmelzenden Eises nicht der eigentliche Nullpunct der Wärme sey, aber leider glaubte er, in der damals erlebten gröfsten Kälte diesen Punct gefun-

den zu haben, und nahm ihn daher als den Anfangspunct seiner Thermometerscale. Was er hierüber selbst angiebt[1], dient zum Theil nur irre zu machen, sofern er die damals herrschenden Meinungen von einem absoluten Nullpuncte und wirklichen Messungen der Wärmemengen zur Schau trägt, es ist jedoch nicht schwer herauszufinden, wie er wirklich verfahren sey und dafs es ihm hiernach gelingen mufste, das damals so schwierige Problem, übereinstimmende Thermometer zu verfertigen, wirklich zu lösen. Nach seiner Angabe dienten ihm als Grundlage drei Puncte, zuerst der *absolute Nullpunct* von 1709, welchen er durch eine Mischung von Eis, Wasser und Salmiak oder Seesalz zu erzeugen vorgab, und hinzufügte, er sey leichter im Winter als im Sommer zu erhalten; zweitens der Punct, welchen Eis und Wasser vereint geben, den er den *Punct des anfangenden Gefrierens* nennt und bei 32° seiner Scale setzt, und drittens den Punct der *menschlichen Wärme*, welcher erhalten wird, wenn ein gesunder Mensch das Thermometer so lange unter dem Arme oder im Munde hält, bis es seine Wärme vollkommen angenommen hat, in welchem Falle es 96 Grade zeigt. Fahrenheit nennt also den Siedepunct des Wassers nicht, und der Schmelzpunct des Eises erscheint bei ihm nur als ein für die schon gegebene Scale gefundener; seine Normalpuncte sollen der von ihm angenommene Nullpunct und der für die menschliche Wärme gefundene seyn, allein man kann darüber gegenwärtig gar nicht in Zweifel seyn, dafs er weder den einen noch den andern wirklich benutzte, denn sein Nullpunct ist auf keine Weise nur mit annähernder Genauigkeit zu erhalten und der Punct der menschlichen Wärme wird von ihm sogar unrichtig zu 96° angegeben, welches = 35°,56 C., also, wie bei Newton, zu niedrig ist. Die Wahrscheinlichkeit, dafs Fahrenheit die jetzt gebräuchlichen festen Puncte gekannt und zur Regulirung seiner Scale benutzt habe, wird jedoch zur Gewifsheit, wenn man weifs, dafs seine Thermometer wirklich übereinstimmten und dafs er über die Fixität der jetzigen Normalpuncte Versuche angestellt habe; denn angenommen, er

1 Philos. Trans. 1724. N. 381 u. 382. p. 1 u. 78. Eine ausführliche Prüfung des Verfahrens, welches Fahrenheit wirklich befolgte, findet man in Annals of Philos. T. VIII. p. 26.

habe die ersten Thermometer durch Regulirung nach einem anfänglichen Normalthermometer zur Uebereinstimmung gebracht, so mufsten diese von den nachherigen mit richtigem Gange abweichen, zu welcher Annahme jedoch kein Grund vorhanden ist. Er erzählt aber, dafs er aus der Abhandlung von AMONTONS[1] die Fixität des Siedepunctes vor etwa zehn Jahren (was also in das Jahr 1714 fällt) kennen gelernt und auch Quecksilber zu seinen Thermometern genommen habe, weil nach der Behauptung jenes Gelehrten auch dieses sich durch Wärme ausdehne. Durch Benutzung eines solchen Thermometers habe er dann folgende Bestimmungen erhalten:

Flüssigkeiten	spec. Gew. bei 48° F.	Siedehitze
Alkohol	8260	176°
Regenwasser	10000	212
Salpetergeist	12935	242
Pottaschenlauge	15634	240
Vitriolöl	18775	546

Die ersten Thermometer FAHRENHEIT's waren nicht bis zum Siedepuncte des Wassers graduirt, dieses geschah erst bei den späteren mit Quecksilber gefüllten; vermuthlich aber waren die ersten, von ihm versandten, nach einem solchen normalen Quecksilberthermometer graduirt. Im Jahre 1714 schenkte FAHRENHEIT zwei Thermometer, die noch mit Weingeist gefüllt waren, an WOLF, welcher den übereinstimmenden Gang derselben mit Verwunderung wahrnahm und einer besonderen Beschaffenheit des Weingeistes zuschrieb[2]. Zehn Jahre nachher wurde das von ihm angewandte Verfahren in der angegebenen Abhandlung durch ihn selbst, durch BOERHAAVE[3] und MUSSCHENBROEK[4] allgemein bekannt und der Nullpunct seines Thermometers erhielt den Namen des *künstlichen Eispunctes*

---

1 Mém. de Paris. 1703.

2 Acta Erud. Lips. 1714. Aug. p. 380. Nützliche Versuche. Th. II. Cap. V. §. 71.

3 Chemia T. I. Expos. de igne. Ed. Lugd. Bat. 1732. 4. p. 174.

4 Tentam. Acad. del Cimento. L. B. 1731. 4. p. 8. Introd. T. II. §. 1568.

(*terme de congélation artificielle*). Um diese nämliche Zeit fing Fahrenheit an, seine Thermometer mit Quecksilber zu füllen, und weil damals die absolute Ausdehnung der Flüssigkeiten bei diesen Apparaten nicht übersehn werden durfte, so nahm er an, dafs, wenn das Volumen des Quecksilbers beim Nullpuncte seiner Scale zu 11124 Theilen angenommen würde, es sich um 32 solcher Theile bis zum Schmelzpuncte des Eises und um 600 bis zum Puncte seines Siedens ausdehne, die Ausdehnung beim Siedepuncte des Wassers betrug dann 212 solcher Theile, und bis dahin reichte die Scale seiner verbesserten Thermometer.

19) Ehe die eben beschriebenen Thermometer in allgemeinen Gebrauch kamen, bemühte sich Reaumur[1], auf dem damals bereits betretenen Wege und nach den als Grundlage angenommenen Regeln diese Apparate zu vervollkommnen, wobei er allerdings wissenschaftlicher verfuhr, als sein Nebenbuhler, aber dennoch die eigentliche Aufgabe weit weniger löste. Unglücklich war schon die Wahl der thermometrischen Flüssigkeit, die in Weingeist bestand, welcher Schiefspulver zündete und mit 0,2 seines Volumens Wasser verdünnt wurde, um weniger leicht zu sieden. Allerdings mufs man sich wundern, dafs in jenen Zeiten die wissenschaftlichen Untersuchungen in so beschränktem Umfange angestellt wurden, denn sonst konnte Reaumur das Quecksilber unmöglich unbeachtet lassen, da Fahrenheit als blofs praktischer Künstler ihm sogar den Vorzug gab, nachdem er durch seine ersten Thermometer schon so berühmt geworden war. Das Ganze läfst sich erklären, wenn man berücksichtigt, dafs Reaumur dem herrschenden Vorurtheile gemäfs das eigentliche Ziel gar nicht verfehlen zu können glaubte, wenn er nur die absolute Ausdehnung des Weingeistes durch Wärme genau erforscht habe, als aber sein Thermometer einmal bekannt geworden war, bewirkte Nationaleitelkeit, dafs man die unverkennbaren Fehler durch trügerische Mittel zu verschleiern suchte. Reaumur nahm ein Thermometer von aufserordentlicher Gröfse[2], senkte

1 Mém. de Paris 1730. p. 452. 1731. p. 250.

2 Bei einem von mir einmal gesehenen solchen Fundamentalthermometer hatte die Kugel über 2 Zoll und die mehr als 2 Fufs lange Röhre ungefähr 2 Lin. im Durchmesser.

dessen Kugel in ein Gefäfs mit Wasser, welches mit einer Mischung von Eis und Salz umgeben war, und nahm das Volumen des Weingeistes dann, wenn die Eisbildung eintrat, zu 1000 an. Demnächst senkte er den Apparat in siedendes Wasser, bezeichnete den Stand des Weingeistes und ermittelte durch mühsame Messungen mit kleinen Bechern, dafs 80 Tausendstel des Volumens der Flüssigkeit beim Eispuncte (*punctum congelationis s. regelationis; terme de la glace ou de congélation naturelle*) hinzugesetzt werden mufsten, um das Volumen desselben beim Siedepuncte des Wassers zu erhalten. Dieses Resultat ist genau genug [1], wenn man berücksichtigt, dafs so gemischter Weingeist sich weniger als absoluter Alkohol ausdehnt und dafs bei den Versuchen die Ausdehnung des Glases unberücksichtigt blieb, allein der Nullpunct konnte durch das angewandte Verfahren auf keine Weise genau gefunden werden. Inzwischen beruhte auf dieser Grundlage die Construction der nach ihm benannten Thermometer, die für den gewöhnlichen Gebrauch von geringerer Gröfse verfertigt wurden. Reaumur bestimmte den Nullpunct derselben, hielt sie dann in siedendes Wasser, und blies das Röhrchen an der Lampe zu, wenn der Weingeist die gröfste Höhe erreicht hatte; den Zwischenraum zwischen beiden Puncten theilte er in 80 Theile.

20) Diese ächten Reaumur'schen Thermometer wurden in Frankreich mit grofsem Beifall aufgenommen und namentlich von Nollet [2] ausnehmend gelobt, allein sie hielten die Vergleichung mit den weit richtigern, hauptsächlich den Quecksilberthermometern, von Fahrenheit nicht aus, wie namentlich Martine [3], Desaguliers [4], Musschenbroek [5] und Haubold [6] zeigten, insbesondere aber ergab sich aus den bereits erwähnten gründlichen Untersuchungen von de Luc [7], dafs

1 Vergl. meine Abhandlung über die Ausdehnung der tropfbaren Flüssigkeiten S. 85.

2 Leçons de Phys. exp. Par. 1753. T. IV. p. 397.

3 Essay medical and philosophical. Lond. 1740. 8. p. 200.

4 Course of exper. Philos. Lond. 1744. 4. T. II. p. 292.

5 Essay de Phys. Leid. 1751. T. I. p. 457. Introd. T. II. §. 1573.

6 Dissert. de Thermom. Reaumuriano. Lips. 1771. 4.

7 Unters. über d. Atmosph. Th. I. S. 554.

durch das angegebene Verfahren übereinstimmende und richtige Thermometer gar nicht zu erhalten seyen. Das einzige Verdienst, welches sich Reaumur um die Thermometrie erworben hat, besteht also blofs darin, dafs er seinem Thermometer die beiden noch jetzt üblichen festen Puncte gab, da es ohne Widerrede sehr wünschenswerth und gegenwärtig auch zu hoffen ist, dafs diese den Fahrenheit'schen, auf keinen eigentlichen Grund gestützten und durchaus willkürlichen Nullpunct, und somit dessen unbehülfliche Scale ganz verdrängen werden, denn selbst die Engländer, welche das Fahrenheit'sche Thermometer am beharrlichsten festhielten, fangen bereits an, sich des centesimalen zu bedienen. Die überwiegenden Vorzüge des Quecksilbers als thermometrischer Substanz leuchteten aufserdem bald ein, allein weil man beharrlich nicht blofs die jetzt übliche Reaumür'sche Scale, sondern auch sogar den ursprünglich gewählten Weingeist beibehalten wollte, so entstanden hieraus zahllose Verwirrungen. Reaumur[1] selbst meinte, man müsse das Fahrenheit'sche Quecksilberthermometer nach seinem Weingeistthermometer reguliren, und Nollet fand, dafs 10 Grade nach Reaumur 20¼ Grade nach Fahrenheit betrügen, was aber entweder ganz falsch oder mindestens nur für die Grade unmittelbar über dem Gefrierpuncte nahe richtig ist. Unter Andern nahm Maupertuis zwei sogenannte Reaumür'sche Thermometer, eins mit Quecksilber, das andere mit Weingeist gefüllt, mit sich nach Lappland. Am 3ten Dec. 1736 zeigte der Weingeist — 18°, das Quecksilber — 22°, am 2ten Jan. 1737 aber jenes — 25° und dieses —29°, am 6ten Jan. jenes —29°, dieses — 37°, am andern Morgen endlich war der Weingeist gefroren und bis zum Wärmepuncte in den Kellern zu Paris in die Höhe gegangen. Dafs auch das Quecksilber gefroren sey, wie bei dieser Temperatur nothwendig war (Gefrierpunct 31°,2 R.), wird nicht erwähnt, und daraus geht um so mehr die Unrichtigkeit der Scale hervor. Haubold[2] erwähnt, dafs er zwei solche Thermometer erhalten habe, wie Reaumur und Nollet sie zu versenden pflegten, die wirklich mit einander übereinzustimmen schienen, indem beide den Eispunct und den Siedepunct des

1 Mém. de Paris. 1739.
2 A. a. O.

Wassers richtig zeigten; allein bei genauerer Untersuchung entdeckte er, dafs die ersten 40 Grade des Quecksilberthermometers zu den zweiten 40 Graden im Verhältnifs von 8 zu 9 kleiner gezeichnet waren, und ebenso die unter Null, wonach also die ersten Grade über und unter Null in dem angegebenen Verhältnisse ungleich waren. Hieraus ergab sich also, dafs beide empirisch graduirt seyn mufsten, um die Mängel des Weingeistthermometers zu verhüllen. Auch v. Berger[1] erhielt durch Nollet ein Thermometer, welches im siedenden Wasser bei 29 Z. 0,5 Lin. engl. genau 5 Grade über dem mit 80° bezeichneten Siedepuncte stand, wobei man also absichtlich diesen Punct um so viele Grade herabgerückt hatte. Die Resultate endlich, welche de Luc durch Vergleichung eines achtzigtheiligen Quecksilberthermometers mit einem ächten Reaumür'schen Weingeistthermometer erhalten zu haben angiebt, deuten auf einen Grad der Unrichtigkeit, den man kaum für möglich halten sollte. Beide zeigten folgende correspondirende Grade:

	Quecksilber-thermometer	Reaum. Wein-geisttherm.
Siedepunct des Wassers	80° . . .	100°,4
	70 . . .	85,2
Siedepunct des Weingeisttherm.	66,6 . . .	80,0
	60	70,8
	50	56,8
	40	44,2
	30	32,6
Wärme des menschl. Körp. . .	29,9 . . .	32,5
	20	21,1
	10	10,6
Temp. des Kellers d. Sternw. . .	9,6	10,25
Zergehendes Eis.	0	0,8
Null d. Weingeisttherm.	— 0,8	0
	— 10	— 8,5
	— 15	—13,1
2 Theile Eis, 1 Theil Salz	— 17	— 15

21) Weil de Luc die Fehler des Reaumür'schen Wein-

1 Dissertatio de thermometris mensurae constantis. p. 25.

geistthermometers genau aufsuchte und mit überwiegenden Gründen die Vorzüge des Quecksilbers nachwies, so hat man das mit der achtzigtheiligen Scale versehene Thermometer nach ihm benannt, wonach wir jetzt gar kein Reaumür'sches Thermometer mehr hätten, da solche eigentliche Weingeistthermometer gegenwärtig nicht mehr verfertigt werden und nur in sehr alten Exemplaren noch existiren; inzwischen hat dieser Sprachgebrauch nicht allgemeinen Eingang gefunden, obgleich zuweilen von DE LUC's *Thermometern* oder *Thermometern nach* DE LUC die Rede ist, vielmehr nennt man fast allgemein diese noch fortdauernd *Reaumür'sche* und die ihnen zugehörige achtzigtheilige Scale gleichfalls die *Reaumür'sche Scale*. Dieses ist allerdings zu verwundern, wenn man berücksichtigt, wie sehr man bemüht war, diese in ihrer Aechtheit zu retten. Dahin gehört der Vorschlag, dem Weingeistthermometer 90 Grade zwischen beiden festen Puncten zu geben, wovon das Umgekehrte in dem von NOLLET angewandten Verfahren liegt, die untere Hälfte der Scale um $\frac{1}{9}$ zu verkleinern, wie bei dem an HAUBOLD gesandten Thermometer geschehn war. Später änderte GOUBERT[1] diesen Vorschlag ab und wollte den Raum zwischen den festen Puncten zuerst in 90 Theile, dann drei Abtheilungen dieses Raumes, zuerst von 0 bis 25,5, dann von 25,5 bis 54,75 und endlich von 54,75 bis 90, jede für sich in 30 gleiche Grade theilen. REAUMUR hatte unter andern auch eine Sorte Weingeist gebraucht, dessen Volumen im gefrierenden Wasser 400 und im siedenden 437 betrug. Da aber $400:437 = 1000:1092{,}5$, so gründete hierauf BRAUN[2] den Vorschlag, dem Reaumür'schen Weingeistthermometer 80 und dem Quecksilberthermometer 93 Grade zu geben.

22) Unter den übrigen in Vorschlag gebrachten Thermometern hat das *de l'Isle'sche* die meiste Celebrität erlangt. Der Erfinder desselben, DE L'ISLE[3], legte im Jahre 1733 der Akademie zu Petersburg die Theorie desselben vor und be-

1 Recherches sur les différences, qui existent entre les thermomètres de Mercure et ceux d'esprit-de-vin. Par. 1789. 8.

2 Nov. Comm. Petrop. T. VII.

3 Mém. pour servir à l'hist. et aux progrès de l'Astron. et géogr. phys. A St. Petersb. 1738. 4. p. 267.

mühte sich dann, dieselbe in Ausführung zu bringen. Auch diese war auf das Princip gegründet, dafs die Zunahmen der Wärme und somit die Thermometergrade aus den Volumensvermehrungen der thermoskopischen Flüssigkeit bestimmt werden müfsten. Zu letzterer wählte er Quecksilber, glaubte aber, man müsse von demjenigen Volumen desselben ausgehn, welches es bei der Hitze des siedenden Wassers habe, und von diesem Nullpuncte an die Zehntausendstel seiner Zusammenziehung als einzelne Grade der Thermometerscale annehmen. Begreiflicher Weise sollte durch dieses mühsame Verfahren nur ein Normalthermometer verfertigt werden, um nach einem solchen dann die übrigen zu graduiren. Zu diesem Ende sollte zuerst das leere Thermometer, dann das mit Quecksilber ganz gefüllte gewogen werden, um das absolute Gewicht des Quecksilbers zu erhalten. Hierauf sollte man dasselbe in siedendes Wasser bringen, das hierbei ausgelaufene Quecksilber abermals wägen, um das Verhältnifs beider zu ermitteln, und dann 0,0001 der Volumensverminderung als das Mafs eines Wärmegrades annehmen. Hiernach mufsten die Grade vom Nullpuncte bei der Siedehitze an abwärts ohne Unterbrechung weiter gezählt werden und waren somit wachsend selbst bis zum absoluten Nullpuncte oder dem Puncte der Abwesenheit aller Wärme.

Es ist in der That zu verwundern, dafs weder der Erfinder selbst die völlige Verkehrtheit dieses Vorschlags einsah, noch dafs irgend jemand diese rügte, während man stets das Problem verfolgte, die absolute Volumensvermehrung des Quecksilbers durch Wärme aufzufinden. Das Widersinnige, wie man wohl sagen darf, liegt offenbar darin, die Abnahme der Wärme einer wachsenden positiven Zahl proportional zu setzen, woraus dann folgte, dafs man bis unter den absoluten Nullpunct oder zum Weniger als dem Nichts der Wärme herabgehend diesen Mangel durch fortlaufend gröfsere Zahlen bezeichnen müfste. Auffallender wird dieses, wenn man berücksichtigt, dafs die in Wirklichkeit vorhandenen und wachsenden Zunahmen der Wärme über der Siedehitze des Wassers, also dem Null der neuen Scale, nothwendig negative Gröfsen wurden. Hiergegen verschwindet die kaum zu erreichende Ausführung des Vorschlags, welche vor allen Dingen erfordert, dafs beide Wägungen des Quecksilbers, der

vollen Röhre und nach dem Auslaufen des bestimmten Theiles der Flüssigkeit, bei gleicher Temperatur vorgenommen wurden. Weitbrecht[1] bediente sich dazu des Mittels, das Thermometer in das Wasser der grofsentheils gefrorenen Newa zu senken und die Wägungen vorzunehmen, wenn es die Temperatur desselben angenommen hatte. Auf diese Weise fand er, dafs die Zusammenziehungen des Quecksilbers vom Siedepuncte des Wassers bis zum Gefrieren desselben zwischen 148,2 und 161,5 Zehntausendstel des ganzen Volumens betrugen[2]; de l'Isle nahm etwas weniger, als das Mittel aus beiden Gröfsen, nämlich 153, setzte aber statt dessen auf seinen Scalen 150, was jedoch nach den neuesten Bestimmungen von Dulong und Petit[3] gleichfalls nicht richtig ist, denn danach dehnt sich dieses Metall um $\frac{150}{8325}$ statt um $\frac{150}{10000}$ seines Volumens aus.

23) Zunächst verdient noch Celsius[4] genannt zu werden, welcher einsah, dafs das Bestreben, die Wärmezunahmen nach der Vergröfserung des Volumens zu messen, wegen unüberwindlicher Schwierigkeiten nie zum Ziele führen werde und dafs es daher am zweckmäfsigsten sey, die Temperatur des schmelzenden Eises und des siedenden Wassers als Normalpuncte anzunehmen, das Intervall dazwischen aber zu gröfserer Bequemlichkeit in 100 gleiche Theile zu theilen. Dieser Vorschlag hätte schon seiner Einfachheit wegen allgemeinen Eingang finden sollen, allein, wie man gewöhnlich das Einfachste vernachlässigt und nach dem Dunkleren, als dem tiefer Gedachten, hascht, so fand auch diese Scale nur in Schweden Anhänger, bis sie erst in den neuesten Zeiten sehr allgemein, insbesondere in Frankreich, aufgenommen wurde. Sie heifst die *schwedische* oder die *Celsius'sche* oder auch die *Christin'sche*, weil auch Christin in Lyon vorschlug, die Scale zwischen den beiden Normalpuncten in 100 gleiche Theile zu theilen; gewöhnlich wird sie die *hunderttheilige* oder *Centesimalscale* genannt.

---

1 Comm. Petrop. T. VIII. p. 310.

2 Im Mittel wog das gesammte Quecksilber 66,5 Unzen und eine Unze flofs aus. Setzt man das Ganze = 10000, so giebt die Proportion $1:66,5 = x:10000$ den Werth von $x = 150,37$.

3 S. Art. *Ausdehnung; des Quecksilbers.* Bd. I. S. 600.

4 Schwedische Abhandl. 1742. p. 197.

Die zahlreichen Schriftsteller über die Thermometrie aus jenen früheren Zeiten, als LEUTMANN[1], BÜLFINGER[2], v. BERGEN[3], HENNERT[4], VAN SWINDEN[5], COTTE[6] und Andere, nennen noch eine Menge von Vorschlägen zur Construction und Verbesserung der Thermometer, die kaum der Beachtung werth sind. Von den *Florentiner Thermometern* gab es zwei Arten, eine gröfsere und eine kleinere; die gröfsere zeigte im schmelzenden Eise 20 und als Wärme des menschlichen Körpers 80 Grad, die kleinere 13,5 und 40 Grad. Das berühmte, unter der Aufsicht von LA HIRE im Jahre 1678 durch HUBER verfertigte Thermometer der Pariser Sternwarte zeigte im gefrierenden Wasser 28 Grad, in den Kellern 48 Grad, nach BRISSON[7] aber lag sein Eispunct bei 32, in einer Mischung aus Eis und Salz zeigte es 5, in den Kellern der Sternwarte 48 und als menschliche Wärme 86 Grad[8]. Der Marchese POLENI stellte seine Wetterbeobachtungen mit einem Luftthermometer an, worin die Quecksilbersäule kürzer war, als in dem von AMONTONS, indem nach MARTINE[9] 47 Zoll bei jenem 51 Z. bei diesem, und 53 bei jenem 59,5 bei diesem betrugen. In England bediente man sich gewisser Weingeistthermometer, die nach einem normalen der kön. Societät graduirt waren; die Grade nahmen von der höheren Wärme an abwärts zu, 0 bezeichnete sehr warm, 25 warm, 45 gemäfsigt und 65 Gefrierung. Nach MARTINE fiel ihr Null mit 89° F. und ihr 34,5 mit 64° F. zusammen. In den englischen Gewächshäusern waren die sogenannten *Fowler'schen*, gleichfalls nach einem normalen graduirten gebräuchlich, deren Null nach MARTINE eine gemäfsigte Wärme anzeigte und die im zergehenden Eise 34° unter Null, bei 64° F. aber 16 Grad über Null

1 Instrumenta meteorologiae inservientia. Witeb. 1725. 8.

2 Comm. Petrop. T. III. p. 196.

3 Comment. de Thermometris mensurae constantis. Norimb. 1757. 4.

4 Traité des Thermomètres. à la Haye 1758. 8.

5 Dissertation sur la Comparaison des Thermomètres. Amst. 1778. 8.

6 Traité de Météorologie. Par. 1774. 4.

7 Dict. de Phys. T. II. p. 636.

8 Es kam 1754 abhanden, war aber vorher mit einem andern verglichen worden. S. BEAUMÉ in Journ. de Phys. T. XLVIII. p. 282.

9 Essay medical and philosophical. Lond. 1740. 8. p. 200.

zeigten. Hales[1] macht seine Bestimmungen nach einem Weingeistthermometer, welches im schmelzenden Eise Null, in der Wärme des schmelzenden Wachses (bei 142° F. nach Martine) 100 zeigte. Die in den alten Edinburger Medical Essays angegebenen Temperaturen beziehn sich auf ein Thermometer, welches in Zolle abgetheilt war; es zeigte nach Martine im schmelzenden Schnee 2,2 Zoll und bei der menschlichen Wärme 22,2 Zoll. Micheli Ducrest[2] construirte 1740 ein eigentliches Thermometer. Dabei nahm er eine Wärme- und eine Kältematerie an, deren Wirkungen sich im Innern der Erde aufheben sollten, weswegen er die Erdtemperatur, die er als überall gleich betrachtete und in den Kellern der Pariser Sternwarte zu finden glaubte, mit Null bezeichnete und *le tempéré* nannte; als zweiter Punct diente ihm die Siedehitze des Wassers, und damit der Weingeist diese aushalten möge, versah er das obere Ende der Röhre mit einer verschlossenen Kugel, worin die Luft bei hohen Temperaturen comprimirt wurde; den Raum zwischen beiden Puncten theilte er in 100 Grade.

24) Man mufs sich in der That freuen, dafs alle diese nutzlosen und zeitraubenden Untersuchungen endlich aufgehört haben, und so ist auch leicht erklärlich, dafs der neueste Vorschlag von La Lande[3] gar keinen Beifall gefunden hat und eigentlich ganz unbeachtet geblieben ist; doch möge er der Vollständigkeit wegen und aus Achtung gegen den berühmten Erfinder hier erwähnt werden. An allen bekannten Thermometern findet er auszusetzen, dafs die festen Puncte nicht gehörig begründet und die Eintheilungen ganz willkürlich sind, denn der Siedepunct des Quecksilbers werde nie beobachtet,

---

1 Vegetable Statics. Lond. 1731. 8.

2 Description de la méthode d'un thermomètre universel. Par. 1742. 8. Recueil des pièces sur les Thermomètres et Barom. Bâle 1757. 4. Mich. du Crest kleine Schriften von den Thermometern und Barometern. Uebers. von J. C. Thenn. 3te Aufl. Augsb. 1770. 8.

3 Journ. de Phys. An 12. Frim. (1803). T. LVII. p. 457. G. XVII. 102. Voigt's Mag. Th. VII. S. 465. Ein Vorschlag von Andrew Skene in Monthly Magaz. 1826. Sept., wonach der Schmelzpunct des Quecksilbers und der des Eises als feste Puncte der Thermometerscalen dienen sollen, verdient kaum erwähnt zu werden, weil das Ganze auf falschen Principien beruht.

der Fahrenheit'sche Frostpunct beruhe blofs auf Einbildung, und wie das Reaumür'sche Thermometer beschaffen gewesen sey, wisse man überhaupt nicht. Am besten sey es daher, mit DE L'ISLE die Ausdehnung des Quecksilbers zwischen den Puncten des gefrierenden und des siedenden Wassers zu 150 Zehntausendstel des ganzen Volumens anzunehmen und dann einen natürlichen Wärmepunct, welcher in der constanten Erdwärme liege, die in den Kellern der Sternwarte zu Paris 9°,5 R. betrage, als den eigentlichen Scheidepunct zwischen Wärme und Kälte festzusetzen. Hieraus entsteht dann folgende, mit der achtzigtheiligen verglichene Scale:

Grade d. Wärme. Reaum.	Lalande	
80°	+ 132,8	Siedendes Wasser.
36	49,9	Wärme am Senegal.
32,5	43,3	
32	42,3	Sommer 1753, 1765, 1793.
31	40,4	
30	38,5	Menschliche Wärme.
29	36,7	
28	34,8	
27	32,9	
26	31,0	Mittlerer Sommer zu Paris.
25	29,1	Unter dem Aequator auf der See.
24	27,3	
23	25,3	
22	23,5	Kalter Sommer zu Paris.
21	21,6	
20	19,7	
19	17,9	Seidenwürmer-Wärme.
18	16,0	
17	14,1	
16	12,2	
15	10,3	Wärme der Treibhäuser.
14	8,5	
13	6,6	
12	4,7	
11	2,8	
10	1,0	
9,5	0,0	Mittlere Temperatur.

Grade der Kälte Reaum.	Lalande	
9°	— 1,0°	
8	— 2,9	
7	— 4,7	
6	— 6,6	
5	— 8,5	
4	—10,3	
3	—12,2	
2	—14,1	
1	—16,0	
0	—17,9	Schmelzendes Eis.
— 1	—19,8	
— 2	—21,5	
— 3	—23,5	
— 4	—25,4	Gelinder Winter zu Paris.
— 5	—27,4	
— 6	—29,2	
— 7	—31,0	Mittlerer Winter zu Paris.
— 8	—32,9	
— 9	—34,8	
—10	—36,7	
—11	—38,6	Kälte des Winters 1740 zu Paris.
—12	—40,4	
—13	—42,3	
—14	—44,2	Fahrenheit's Nullpunct.
—15	—46,1	
—16	—48,0	
—17	—49,9	Kälte von 1709 und 1776 zu Paris.
—17,5	—50,8	Kälte von 1788 zu Paris.
—30	—74,4	Gefrierpunct des Quecksilbers.

Diese Scale gleicht vollkommen denen, die man nach der Mitte des vorigen Jahrhunderts den grofsen und vorzüglich seyn sollenden Thermometern zu geben pflegte, und mufs um so weniger zweckmäfsig erscheinen, je mehr es auffällt, dafs die nach den früheren Thermometern bekannten ausgezeichneten Temperaturen sämmtlich auf Bruchtheile bei diesem fallen. Angemessener würde es seyn, nach dem Vorschlage von Murray[1] den Gefrierpunct und Siedepunct des Quecksilbers als Normalpuncte anzunehmen und den Zwischenraum in 1000 Theile zu theilen, wonach jeder Grad etwas über halb so grofs, als ein Fahrenheit'scher werden würde; allein am Queck-

1 Chemistry. T. I. p. 201.

silberthermometer sind diese beiden Puncte auf keine Weise scharf bestimmbar, und aufserdem ist die Ausdehnung des Quecksilbers keineswegs eine gleichmäfsige, so dafs es weit rathsamer erscheinen mufs, die Thermometerscale auf diejenigen Grenzen zu beschränken, innerhalb deren seine Ausdehnung als gleichmäfsig gelten kann. Den sinnreichsten Vorschlag unter allen, wonach die absolute Ausdehnung des Quecksilbers die Grundlage der thermometrischen Messung seyn soll und wobei man nur einen festen Punct, den Frostpunct, bedarf, der Bestimmung des Siedepunctes aber, die vom Luftdrucke und andern Bedingungen abhängt, gänzlich überhoben ist, hat Sulzer[1] bekannt gemacht, und es würde allerdings möglich seyn, hiernach übereinstimmende Thermometer zu erhalten, wenn nicht die an sich schon sehr mühsame Methode einen so aufserordentlichen Grad von Genauigkeit erforderte. Hiernach wird an die calibrirte Röhre eine verhältnifsmäfsig hinlänglich grofse Kugel geblasen und dann ein Theil der Röhre, etwa ac, nach irgend einem Mafsstabe scharf gemessen; dann erhitzt man die Kugel wiederholt, taucht das Ende a in Quecksilber, läfst dieses bis c steigen, und wiederholt dieses so lange, bis die Kugel nahe ganz gefüllt ist. Alsdann taucht man die Kugel in siedendes Wasser, merkt den Punct, bis wohin das Quecksilber steigt, z. B. bis h, läfst das Quecksilber durch Hitze bis zur Oeffnung a steigen, taucht diese in Quecksilber und läfst den Apparat erkalten, so füllt er sich ganz mit einer nach der Länge des Quecksilberfadens im Röhrchen gemessenen Quantität Quecksilber. Wird nämlich die Menge der Füllungen bis c mit den Theilen des gewählten Mafsstabes multiplicirt und die Länge ah hinzuaddirt, so hat man die ganze Länge der im Thermometer befindlichen Quecksilbersäule. Hätte man z. B. für die Länge ac 547 Theile auf dem Mafsstabe gemessen, die Einfüllung dieser Gröfse 69-mal wiederholt und die Länge $ah = 468$ Theile gefunden, so betrüge die ganze Länge des im Thermometer befindlichen Quecksilberfadens $547 \times 69 + 468 = 38211$ Theile des Mafsstabes. Mit Vernachlässigung der beiden letzten Ziffern nimmt man also 382 Theile des Mafsstabes, theilt sie in 100 Theile, trägt diese auf die Scale des Thermometers, läfst durch Ein-

Fig. 75.

---

1 Journ. de Phys. T. XI. p. 371.

tauchen in siedendes Wasser einen Theil Quecksilber auslaufen, und befestigt das Thermometer so auf der Scale, dafs der Gefrierpunct auf 0 derselben zu liegen kommt, so bezeichnet jeder Grad der Scale 0,0001 der wirklichen Ausdehnung des Quecksilbers. BREWSTER's[1] Vorschlag endlich, die Temperatur aus dem Einflusse zu bestimmen, welchen das mehr oder weniger erhitzte Glas auf die Erzeugung einer kenntlichen Farbe im polarisirten Lichte hervorbringt, und wonach er ein Thermometer zu construiren angiebt, ist blofs als ein sinnreicher Gedanke zu betrachten, welcher keine praktische Anwendung gestattet[2].

C. Verfertigung der Thermometer.

Man wird hier keine vollständige Anleitung zur Verfertigung der gewöhnlichen Thermometer erwarten, da der ausübende Künstler dieses praktisch erlernen mufs; aber einige Bemerkungen sind zur besseren Beurtheilung dieser wichtigen Apparate unentbehrlich[3].

25) Die *Form* der gewöhnlichen Thermometer, wenn keine sonstigen Bedingungen eine Abänderung nöthig machen, ist die eines geeigneten Gefäfses an einer engen Glasröhre, einem Haarröhrchen, einer sogenannten Thermometerröhre, damit die gröfsere im Gefäfse enthaltene Masse Quecksilbers, wenn sie sich durch Wärme ausdehnt, in der engen Röhre einen gehörig langen und daher leicht mefsbaren Cylinder bilde. Die Gröfse des Gefäfses und die Weite der Röhre erfordern

---

1 Philos. Trans. 1816. p. 109.

2 Eine ausführliche Musterung der älteren Thermometerscalen und eine Vergleichung derselben, namentlich der Edinburger, der von NEWTON, FOWLER, HALES, der der Königl. Societät, der von CRUQUIUS, CHRISTIN, MICHELI, REAUMUR, DE L'ISLE, FAHRENHEIT, des Pariser, der beiden Florentiner, des von LA HIRE, von AMONTONS und POLENI findet man im Journ. de Phys. Introd. T. II. p. 495. Das Ganze ist meistens ein Auszug aus dem genannten Werke von MARTINE, und es ergiebt sich zugleich aus den bisherigen Untersuchungen, dafs die Bestimmungen nicht genau seyn können.

3 Vergl. BIOT Traité de Phys. expér. et math. T. I. p. 27 ff. KÖRNER's Anleitung zur Verfertigung übereinstimmender Thermometer. Jena 1824.

ein gewisses Verhältniſs; je gröſser das Gefäſs bei gleicher Weite der Röhre, desto länger ist der durch Wärmevermehrung im Röhrchen gebildete Cylinder; es wäre daher räthlich, sehr weite Gefäſse zu wählen, allein dann nimmt erstlich die groſse Masse des Quecksilbers die höhere Wärme nicht leicht an, zweitens ist das Gefäſs dem Einflusse des Luftdruckes oder einer Zusammenziehung des Glases mehr ausgesetzt[1], drittens sind lange Thermometer unbehülflich und zu manchen Zwecken, z. B. zur Untersuchung der thierischen Wärme, minder oder gar nicht brauchbar, viertens aber sind lange Röhren von genauem Caliber schwierig oder gar nicht zu erhalten. Nach den Bedürfnissen beträgt daher die Länge der Thermometer von etwa 3 Zoll bis zu 18 Zoll und wohl noch darüber, die ungewöhnliche, über 8 bis 10 Zoll betragende Gröſse wählt man aber in der Regel nur für Scalen, die beträchtlich über den Siedepunct des Wassers hinausgehn. Als *Gefäſs* dient gewöhnlich eine Kugel, und nach den Resultaten der neuesten Untersuchungen sollte man keine andere Form wählen, weil bei diesen die Oberfläche, also auch die Gröſse der das Quecksilber enthaltenden Hülle im Verhältniſs zum Inhalte am kleinsten, mithin der Luftdruck gegen die Oberfläche und eine mögliche Zusammenziehung derselben am kleinsten ist. Bloſs bei Thermometern mit sehr langen Röhren, z. B. solchen, die man 4 bis 5 und 6, ja 7 bis 24 Fuſs tief in die Erde eingräbt, würde die Dicke des Glases so groſser Kugeln zu gering werden und man muſs daher Cylinder wählen. Gegenwärtig sind Kugeln am gemeinsten, doch trifft man nicht selten auch Cylinder, ehemals aber wählte man auch andere Formen, theils weil man sie für schöner hielt, hauptsächlich aber um dem Einflusse der Wärme auf die thermometrische Flüssigkeit eine gröſsere Oberfläche darzubieten. Zu diesem Ende dienten die spiralförmig gewundenen Röhren, wie sie sich bei den mit Quecksilber und mit Weingeist gefüllten Thermometern der Churpfälzischen meteorologischen Gesellschaft häufig finden und durch diese sehr allgemein bekannt wurden, oder man trennte das Gefäſs in zwei Theile, um in der Mitte einen offenen, dem Zutritte der Luft freien Raum zu erhalten, allein diese und sonstige Aftermittel der Vervoll-

Fig. 76.

Fig. 77.

1 Hierüber unten ausführlicher.

kommnung wendet man jetzt nicht mehr an und verliert dagegen das Streben nach möglichster Genauigkeit nie aus den Augen. Eine der gewöhnlicheren Formen, wodurch man die zu grofsen Kugeln zu vermeiden sucht, die zugleich wegen ihrer Wölbung den Cylindern vorzuziehn seyn dürfte, ist die in der Zeichnung ausgedrückte. Nicht allgemein, wohl aber für einen besonderen Zweck zu verwenden, sind die von MAGELLAN [1] angegebenen sogenannten Muschelthermometer, bei denen die Kugel an der einen Seite wieder eingedrückt wird, so dafs beide Kugelflächen einander parallel laufen und eine muschelförmige Vertiefung entsteht. Das Eindrücken der Kugel geschieht leicht, wenn man die eine Hälfte derselben glühend macht und dann am andern Ende des Röhrchens saugt, so dafs der äufsere Luftdruck den erweichten Theil der Kugelfläche niederdrückt. Solche Thermometer dienen dazu, um in der Vertiefung zu untersuchende Flüssigkeiten aufzunehmen und ihr thermisches Verhalten beim Sieden, bei der Verdampfung, beim Gestehen und sonstigen Veränderungen zu messen. Man hat bis jetzt von ihnen weniger Gebrauch gemacht, als zu erwarten war.

Fig. 78.

Fig. 79.

26) Die *Thermometerröhren* haben einen in ihrer Axe fortlaufenden entweder cylindrischen oder bandförmigen Raum. Letztere Beschaffenheit, wobei die Röhren selbst zugleich nicht rund, sondern flach sind, ist bei weitem vorzuziehn, weil bei geringerem Inhalte unter übrigens gleichen Verhältnissen die Scalentheile länger werden und besser sichtbar sind. Man erhält diese leicht; denn statt dafs bei gewöhnlichen Röhren mit cylindrischen Räumen eine hohle Kugel in die Glasmasse geblasen und letztere dann zu langen Röhren ausgezogen wird, drückt man sie vor dem Ausziehn flach, wodurch die Röhren selbst und die hohlen Räume in denselben abgeplattet werden.

27) Das *Calibriren* der Röhren geht aus dem Wesen der Thermometrie und aus der Art der Verfertigung der Röhren mit absoluter Nothwendigkeit hervor. Abgesehn von der (gegenwärtig nicht weiter zu berücksichtigenden) Messung der absoluten Incremente der Wärme setzt man voraus, dafs gleiche Vermehrungen der Wärme gleichen Zunahmen des Volumens

1 Beschreibung neuer Barometer. D. Uebers. Leipz. 1782. 8.

der Flüssigkeit zugehören, und da die letzteren in Theilen des Quecksilberfadens im Röhrchen gemessen werden, so setzt die Gleichheit der Länge dieser Theile eine Gleichheit der Dicke als nothwendig voraus. Die Fabrication der Röhren aber, bei denen ein gröfserer, mit Luft angefüllter Raum in einen sehr feinen Faden ausgezogen wird, macht die Entstehung einer vollkommenen Cylinderform ganz unmöglich[1], jedoch ist die Abweichung davon für die Länge gewöhnlicher Thermometer so gering, dafs man den Fehler als verschwindend betrachten kann. Der Künstler erhält aber aus einer grofsen Menge von Röhren eine nur geringe Anzahl und von nicht grofser Länge solcher, bei denen dieses der Fall ist, und da auch sonst ungeübte Beobachter den hierauf beruhenden richtigen Gang der Thermometer bei mittleren Temperaturen durch Vergleichung leicht prüfen können, so bringen minder gewissenhafte Thermometermacher den Theil der Röhre, wobei das Caliber richtig ist, in diesen Bereich, und vernachlässigen dieses von etwa — 10° an, weswegen man in den Bestimmungen hoher Kältegrade oft so bedeutende Abweichungen findet. Das Calibriren geschieht dann auf die bereits erwähnte[2], von NOLLET[3] zuerst angegebene Weise, KUMMER[4] dagegen untersucht das Caliber erst nach angeblasener Kugel oder bläst provisorisch eine Kugel an, erwärmt diese, taucht das offene Ende der Röhre in Quecksilber, bis ein Faden von etwa 1 Zoll Länge eingedrungen ist, verschliefst die Oeffnung mit dem Finger, läfst den Faden durch etwas zugelassene Luft sich allmälig bis an die Kugel heben und mifst seine Länge mit einem Federcirkel[5].

28) An das gehörig gewählte Röhrchen wird dann das *Gefäfs*, im Allgemeinen die *Kugel*, angeblasen. Obgleich dieses an sich nicht schwer ist, so wird es doch niemand nach einer blofsen Beschreibung zu bewerkstelligen vermögen; es ist hierzu praktische Anweisung und Uebung erforderlich, und

1 KUMMER liefs sich 600 Fufs Röhren in Stücken von etwa 10 Klafter Länge verfertigen und erhielt daraus nur 40 Fufs in Stücken von 1,5 bis 2 Fufs Länge mit richtigem Caliber. G. LIX. 302.

2 S. Art. *Caliber*. Bd. II. S. 8.

3 Leçons de Phys. 1754. 8. T. IV. p. 376.

4 G. LIX. 301.

5 Sonstige Vorschriften werden weiter unten erörtert werden.

ich überhebe mich daher, weiter hiervon zu reden. Biot[1] hält das gewöhnliche Verfahren der Künstler, wonach sie das eine, an der Glasblaselampe erweichte und etwas gestauchte Ende der Röhre mit dem Munde aufblasen, für ungeeignet, weil dadurch Feuchtigkeit hineinkomme, und verlangt daher, man solle am offenen Ende der Röhre eine Blase von Caoutchouc anbinden und diese zusammendrücken, um die darin enthaltene Luft in die Kugel zu pressen. Dieses Verfahren ist allerdings weitläuftig und die anhängende Blase macht die Manipulation des Röhrchens unsicher, zudem aber wird die Kugel, um die gehörige Form genau anzunehmen, einige Zeit glühend erhalten, befindet sich auch noch im Zustande des Glühens, wenn nicht mehr hineingeblasen wird, so dafs die unbedeutende Menge der eingedrungenen Feuchtigkeit bis auf einen unmerklichen Rest als Dampf entweichen wird. Bei Thermometern mit etwas weiten Röhren, aus denen die Feuchtigkeit wieder entweichen kann, ist daher das gewöhnliche Verfahren unschädlich, bei sehr engen und zugleich langen Röhren fordern aber auch Bellani[2], Landriani[3] und Andere die Anwendung der Caoutchoucblase oder einer kleinen Compressionspumpe als nothwendig. Um für eine Röhre von gegebener Länge und Weite die Gröfse der Kugel zu finden, giebt Luz Regeln an, Gehler[4] theilt eine allgemeine Formel mit und de Luc[5] gleichfalls eine durch Durand aufgestellte; allein eine Messung ist hierbei schon deswegen unmöglich, weil die Kugel ebenso wenig als irgend ein anderweitig gestaltetes Gefäfs je eine völlig regelmäfsige Gestalt annimmt, und alle solche Anweisungen sind daher schon aus diesem Grunde nutzlos, sonstiger Hindernisse nicht zu gedenken. Praktische Künstler erhalten durch die Menge der von ihnen verfertigten, zum Theil sehr gewöhnlichen Thermometer eine solche Fertigkeit im Abmessen der erforderlichen Gröfsen, dafs sie sogar abgebrochene Kugeln an bereits graduirte Röhren zu bla-

1 Traité de Phys. T. I. p. 30.

2 Brugnatelli Giornale Dec. 1. T. IV. p. 89.

3 Ebend. Dec. 11. T. II. p. 292.

4 Alte Ausg. Th. IV. S. 346.

5 Unters. über d. Atmosphäre. Th. I. S. 611. Ebendieses geschieht durch Biot a. a. O. und durch Herschel in Encyclop. metrop. Art. *Heat*.

sen vermögen, ohne dabei eine Unrichtigkeit der neuen Scale von mehr als etwa zwei bis drei Graden hervorzubringen. Dafs letzteres Verfahren übrigens nur einmal als Probe zu versuchen, praktisch aber nicht anwendbar, jede graduirte und bereits mit einer Scale versehene Röhre mit zerbrochener Kugel also für diese nämliche Scale unbrauchbar sey, darf wohl nicht besonders erwähnt werden.

29) In Beziehung auf das *Füllen der Thermometer* genügt es, blofs das Quecksilber zu berücksichtigen, da das Hineinbringen anderer Flüssigkeiten auf eine ähnliche Weise, aber weit leichter bewerkstelligt wird. Vorerst ist erforderlich, dafs das Quecksilber rein sey, weil sonst seine Ausdehnung minder gleichmäfsig seyn und sein Gefrierpunct höher liegen würde. Man darf jedoch voraussetzen, dafs das in gröfseren Quantitäten bei guten Materialisten vorhandene Quecksilber für diesen Zweck als hinlänglich rein gelten könne, denn die Verfälschungen mit Blei geschehen in der Regel nur durch Kleinhändler; will man dasselbe jedoch reinigen, so ist die Anweisung hierzu bereits[1] gegeben. Von gröfserer Wichtigkeit dagegen ist es, dahin zu sehn, dafs das Quecksilber trocken und von Staub frei sey, weil alle Beimengungen dieser Art leicht eine Trennung des Quecksilberfadens im engen Rohre bewirken. Das einfachste und leichteste Mittel der Reinigung von solchen Substanzen, so wie von anhängendem Oele in Folge der Reduction, besteht darin, dafs man dasselbe in einem gewöhnlichen steinernen Kruge, worin es oft aufbewahrt und auch wohl versandt wird, eine Zeit lang mit einigen Stücken trockner Holzkohle, die man auch glühend hineinwerfen kann, anhaltend stark schüttelt und dann mehrmals durch Papierdüten mit sehr enger Oeffnung laufen läfst, um das zerriebene Kohlenpulver gänzlich zu entfernen. Das Verfahren des Füllens, wie Luz und Strohmeyer es vorschreiben, ist meines Wissens jetzt nicht mehr gebräuchlich, denn kleiner Trichterchen zum Einbringen des Quecksilbers bedient man sich auf jeden Fall nicht, bei der Leichtigkeit des Glasblasens dagegen pflegt man am oberen Ende der Röhre eine verhältnifsmäfsig grofse Kugel anzubringen und diese oben in eine feine Spitze auszuziehn. Wird dann der ganze Apparat

1 S. Art. *Barometer*. Bd. I. S. 880.

etwas erhitzt, was meistens mit mehreren zur Ersparung der Zeit zugleich geschieht, und die obere offene Spitze in ein Glas mit gereinigtem Quecksilber gesenkt, so füllt sich nach dem Abkühlen die genannte Hülfskugel mit einer mehr als genügenden Menge Quecksilber. Alsdann wird nach dem Umkehren die eigentliche Kugel über Kohlen abwechselnd erhitzt und wieder abgekühlt, so daſs das Quecksilber allmälig eindringt, bis alle Luft entfernt und Kugel nebst Röhrchen gefüllt sind, wobei es ein Leichtes ist, falls die in der oberen Hülfskugel befindliche Menge Quecksilbers nicht genügen sollte, noch etwas mehr hineinzubringen. Sehr wesentliches Erforderniſs bei den Thermometern ist, daſs das Quecksilber völlig frei von Luft und Feuchtigkeit sey, weil der geringste Rest der einen oder der andern nicht bloſs eine ungleichmäſsige Ausdehnung verursacht, sondern auch leicht eine Trennung des Quecksilberfadens bewirkt, wodurch ein sicheres Ablesen der Grade fast unmöglich, auf jeden Fall höchst schwierig wird. Man begnügt sich daher nicht damit, durch Ausdehnung der Luft und Abkühlung derselben stets neue Portionen Quecksilber in die Kugel zu bringen, sondern man läſst diese Flüssigkeit wirklich zum Sieden kommen und erhält sie darin so lange, bis auch die letzten Antheile von Luft und Feuchtigkeit entwichen sind, worauf dann das vertical gestellte Thermometer sich vollständig füllt und man das überflüssige Quecksilber aus der obern Kugel schüttet. Hiernach untersucht man vorläufig, ob Röhre und Kugel ein solches Verhältniſs haben, daſs der Punct des schmelzenden Schnees an die geeignete Stelle der Scale fällt, und bringt so viel Quecksilber heraus, bis dieses der Fall ist, zieht dann die Röhre unterhalb der oberen Kugel in eine feine Spitze aus, bricht sie dort ab, und vorausgesetzt, daſs die Röhre hinreichende Länge habe, um oben den Siedepunct des Wassers aufzunehmen, unten aber noch eine gehörige Anzahl Grade unter dem Gefrierpuncte des Wassers zu erhalten, erhitzt man die Kugel so lange, bis ein kleines Tröpfchen Quecksilber aus der oberen Spitze heraussteht oder bis der Quecksilberfaden so hoch in die Spitze aufsteigt, daſs der Rest der darin vorhandenen Luft als verschwindend zu betrachten ist, und schmelzt dann schnell die Spitze zu. Endlich folgt das definitive Verschlieſsen der Röhre durch Abschmelzen der oberen Spitze, wobei die Röhre stets

noch einige Grade länger bleibt, als bis an den Siedepunct des Wassers, weil Flüssigkeiten so schwer zusammendrückbar sind, die Ausdehnung derselben aber mit aufserordentlicher Gewalt verbunden ist, folglich das Thermometer sofort zersprengt werden würde, wenn die Wärme nur etwas über den Siedepunct des Wassers stiege. Man hält diesen luftleeren Zustand der Thermometer für nöthig, und prüft sie daher, ob das Quecksilber beim Umkehren derselben bis in die Spitze hinabsinkt, welches dann jederzeit geschieht, aufser bei aufserordentlich feinen Thermometern, wobei die Adhäsion des Quecksilbers am Glase sein Gewicht übertrifft. Biot führt als Grund an, dafs sonst leicht etwas Luft zwischen das Quecksilber kommen könne, allein die innere Weite des Röhrchens ist zu eng, um dieses zu gestatten, und es wäre in Beziehung auf die Unveränderlichkeit des Nullpunctes besser, wenn die atmosphärische Luft auf den Quecksilberfaden drückte. Ein wichtigerer und entscheidender Grund liegt jedoch nach Biot darin, dafs leicht etwas Quecksilber aus dem offenen Röhrchen verloren werden könnte, wozu man noch einen andern setzen kann, dafs unfehlbar Staub und Feuchtigkeit eindringen und die inwendige Oeffnung des Röhrchens verunreinigen würden. Aus dieser Ursache mufs das Ende des Röhrchens verschlossen seyn, und dann würde die mit den Graden der Wärme wachsende Zusammendrückung der eingeschlossenen Luft auf jeden Fall nachtheilig wirken, wenn es nicht luftleer wäre. Wenn aber dennoch der Quecksilberfaden sich trennt, was durch irgend einen verschwindenden Theil von adhärirender Luft oder Feuchtigkeit bei aufgehobenem äufsern Luftdrucke nur noch leichter geschieht, so bewirkt man meistens die Vereinigung des getrennten Quecksilbers dadurch, dafs man, das Thermometer in verticaler Richtung zwischen den Fingern haltend, mit dieser Hand auf die andere Hand schlägt, um durch die Erschütterung den beabsichtigten Zweck zu erreichen; wenn dieses aber nicht erfolgt, so kann man dasselbe in einem Kreise herumschwingen, ja Biot empfiehlt sogar, einen Faden von einem oder zwei Meter Länge anzubinden, um die Wirkung des Schwunges zu vermehren. Soll die Scale des Thermometers bis zum Siedepuncte des Quecksilbers reichen oder reicht die Scale, wenn die Grade sehr grofs und wieder in Theile getheilt werden sollen, wie z. B. bei den

Psychrometern, nicht bis an den Siedepunct, so muſs am oberen Ende des Thermometers eine Kugel angeblasen oder das Ende selbst in einen gehörigen Raum erweitert werden, um das aufsteigende Quecksilber aufzunehmen. Wenn sich bei diesen der Quecksilberfaden trennt, was durch heftige Erschütterung bei denjenigen leicht eintritt, die bis zum Siedepuncte des Quecksilbers reichen[1], weil sie nicht luftleer seyn können, so darf man die untere Kugel nur so lange erhitzen, bis die getrennten Fäden sich in der oberen Kugel wieder vereinigen. Bei solchen, die bis zum Siedepuncte des Quecksilbers reichen, geschieht dieses erst beim Sieden dieser Flüssigkeit, und das Verfahren erfordert daher einige Vorsicht. Man erhitzt deswegen die untere Kugel langsam, bis der Quecksilberfaden dem oberen Ende der Scale nahe ist, beachtet dann bei zunehmender Erhitzung den Augenblick genau, wenn das erste Aufwallen des Quecksilbers eintritt, und zieht sofort das stets vertical gehaltene Thermometer langsam vom Feuer weg, worauf es zu sinken beginnt und man die Vereinigung bewirkt findet. Der Weingeist verstattet solche Operationen nicht und ist daher ohne groſse angewandte Sorgfalt selten ganz frei von Luft.

D. Bestimmung der festen Puncte.

30) Wie man nach vielen vergeblichen Vorschlägen endlich darin übereinkam, daſs das Gefrieren und das Sieden des Wassers bei einer unveränderlichen Temperatur statt finde und hieraus also zwei Normalpuncte zur Erhaltung übereinstimmender Thermometer zu entnehmen seyen, ist oben erwähnt worden. Reaumur war der Erste, welcher dieses bestimmt aussprach, und das Ansehn, welches seine Thermometer in so hohem Grade erhielten, daſs auch die jetzigen wesentlich veränderten noch nach seinem Namen benannt werden, ist nicht bloſs Folge des Eifers, womit die Franzosen sich ihres Landsmannes annahmen, sondern beruht sicher mindestens zum Theil auf diesem Umstande; denn Fahrenheit äuſserte sich darüber keineswegs mit gleicher Bestimmtheit, obgleich er das

1 Ueber die Verfertigung solcher Thermometer s. Placidus Heinrich in Schweigger's Journ. Th. I. S. 214 ff.

schmelzende Eis zur Graduirung seiner Thermometer benutzte. Handelt es sich dann um eine genaue Feststellung und eine dieser angemessene Benennung jener beiden Puncte, so ist Beides in Beziehung auf den einen zwar einfach, auf den andern aber mehr zusammengesetzt. Man nennt den einen *Siedepunct* oder *Punct des siedenden Wassers* (*punctum aquae ebullientis; terme de l'eau bouillante; boiling point*), weil er im siedenden Wasser gefunden wird, den andern aber nannte man anfangs und nennt man auch jetzt noch häufig den *Eispunct* oder *Gefrierpunct* (*punctum congelationis*), weil er durch gefrierendes Wasser gegeben werden sollte. Reaumur[1] erhielt denselben, indem er ein Gefäfs mit Wasser in eine Mischung von 2 Theilen Eis und 1 Theil Kochsalz setzte und den Stand des Weingeistes im Thermometer im Augenblicke, wenn Eisbildung eintrat, als Gefrierpunct bezeichnete. Bald aber fand de Luc[2], dafs dieser Punct veränderlich sey, und gegenwärtig wissen wir, dafs das Wasser nach Umständen mehr oder minder erkalte, und zwar mit sehr bedeutenden Unterschieden, bis die Eisbildung eintritt. Um daher einen unveränderlichen Punct zu haben, wählte man denjenigen, bei welchem das Eis schmilzt, und diesen hat allerdings die Erfahrung als einen unveränderlichen nachgewiesen; allein er kann nun eigentlich nicht mehr Eispunct oder Gefrierpunct heifsen, sondern mufs *Punct des zergehenden Eises*, *Aufthaupunct; température de la glace fondante; melting point of ice* genannt werden, wie auch wirklich geschieht. Dieser Ausdruck ist zwar allerdings richtig und deutlich bezeichnend, allein er ist zu lang und daher zu unbequem. Die französischen und die neueren englischen Schriftsteller bedienen sich daher des Ausdrucks *zero*, die letzteren jedoch nur dann, wenn vom achtzigtheiligen oder hunderttheiligen Thermometer die Rede ist, und es wird hierdurch nicht ausgeschlossen, auch den Nullpunct der Fahrenheit'schen Scale durch zero zu bezeichnen, so wie man auch im Deutschen vom Nullpuncte redet. Sofern es aber jetzt als ausgemacht gilt, dafs

---

1 Schon vor ihm hatte Martine vorgeschlagen, zerstofsenes Eis in kaltes Wasser zu werfen, Lambert aber räth, reines Wasser anzuwenden, welches schon die zum Gefrieren erforderliche Kälte angenommen habe.

2 Untersuchungen über die Atmosph. Th. I. §. 436. h. 443. r.

nur der Punct des schmelzenden Eises als normal gelten kann, sollte man unbedenklich der Kürze wegen den Ausdruck *Gefrierpunct* oder *Eispunct* beibehalten und sich ein für alle Mal über die Bedeutung dieser Ausdrücke verständigen.

31) Die Fixität dieses Punctes und die Unveränderlichkeit desselben im Allgemeinen unterliegt keinem Zweifel und beruht auf dem Naturgesetze, dafs beim Eise alle von aufsen hinzukommende Wärme latent wird, indem sie blofs dazu dient, das Eis in Wasser zu verwandeln. Wasser, in welchem sich noch Eis befindet, kann im Ganzen keine höhere Wärme haben, als 0°, und man nimmt daher auch an, dafs seine Temperatur genau diese sey; wenn man aber berücksichtigt, dafs das Wasser ein schlechter Wärmeleiter ist und bei beträchtlicher Wärme nicht durchaus sofort auf 0° herabgehn würde, wenn man ein Stück Eis hineinwürfe[1], dafs ferner jede Bedingung, welche das Schmelzen des Eises oder Schnees befördert, ein Herabsinken der Temperatur unter den Schmelzpunct desselben bewirkt, so wird man bald zu der Ueberzeugung gelangen, dafs die möglichst genaue Bestimmung eines so wesentlichen Normalpunctes keineswegs so leicht ist, und die Erfahrung bestätigt dieses vollkommen. Wer es je versucht hat, die Gefrierpuncte der Thermometer zu controliren oder Apparate genau bis auf diesen Punct zu erkälten, der wird, ebenso wie ich bei der Aufsuchung der Ausdehnungsgesetze tropfbarer Flüssigkeiten, gewahr werden, dafs man oft Stunden lang dauernde Schwankungen beseitigen mufs, ehe man mit voller Sicherheit sich von der höchsten Genauigkeit des gefundenen Punctes überzeugen kann. Insbesondere ist mir aufgefallen, dafs lockerer Schnee, wenn er, in einem Gefäfse in ein mäfsig warmes Zimmer gebracht, zu schmelzen beginnt, die zugeführte Wärme sehr begierig aufnimmt und dadurch feine Thermometerkugeln wohl bis 0°,5 C. unter den

1 Hiervon überzeugten sich die Mitglieder der Commission des Poids et mesures, indem sie fanden, dafs de Borda durch Eintauchen der Mefsstangen in Wasser mit Eis nicht 0° C., sondern 1°,35 C. erhalten habe; sie konnten die Temperatur von solchem Wasser nicht tiefer als 0°,5 C. herabbringen. S. Base du Syst. metr. T. III. p. 137. 434. Befindet sich das Gefäfs mit solchem Wasser in einer Umgebung von 3 und mehr Graden unter 0° C., so geht seine Temperatur bis — 0°,5 C. und noch beträchtlich tiefer hinab.

Gefrierpunct herabbringt. Ungleich häufiger ist der entgegengesetzte Fehler. Sind die Kugeln der Thermometer etwas gröfser, so haben sie eine merkliche Quantität Wärme in sich und bringen hierdurch nicht blofs eine gewisse Menge Eis zum Schmelzen, sondern erwärmen auch das sie zunächst umgebende Wasser so, defs sie nicht ganz bis auf den gewünschten Normalpunct herabgehn. Aufserdem dauert es bekanntlich sehr lange, bis die Körper ihre letzten Antheile von überschüssiger Wärme an ihre Umgebung abgeben, und man mufs daher auf jeden Fall hinlängliche Zeit und viele Sorgfalt auf die Bestimmung der festen Puncte verwenden.

De Luc[1] erkannte zuerst die Fixität des Schmelzpunctes beim Eise; er füllte daher ein Gefäfs mit zerstofsenem Eise, und brachte das Thermometer so hinein, dafs es bis ans Ende des Quecksilberfadens damit umgeben war. Strohmeyer[2] hält dieses Verfahren bis zu einer Fehlergrenze von 1°,5 für unsicher und zieht Wasser im Eise vor. Zu diesem Ende soll man Wasser in einem Gefäfse ringsum gefrieren lassen, dann die obere Decke einstofsen und das Thermometer in das Wasser herabsenken. Offenbar ist dieses die von Ducrest empfohlene Methode, wodurch er den von Reaumur angenommenen Gefrierpunct des Wassers erhalten wollte, und Luz[3] bemerkte daher ganz richtig, dafs der gesuchte Punct hierdurch 0°,2 R. zu tief herabgehe, welches jedoch nur dann der Fall ist, wenn das Gefäfs fortdauernd dem Einflusse äufserer Kälte ausgesetzt bleibt, in wärmerer Umgebung dagegen wird der gesuchte Punct zu hoch gefunden werden. Uebrigens giebt Luz der von de Luc vorgeschlagenen Methode den Vorzug. Die Kön. Societät zu London[4] hielt die Aufgabe, die festen Puncte der Thermometer mit möglichster Genauigkeit zu bestimmen, für so wichtig, dafs sie eine Commission aus den bedeutendsten damaligen Physikern, Cavendish, Heberden, Aubert, J. A. de Luc, Maskelyne, Horsley und Planta, beauftragte, die beste Methode hierfür aufzusuchen. Für die Bestimmung des Eispunctes geben diese jedoch

1 A. a. O. §. 438. c.
2 A. a. O. S. 28.
3 Anweisung Therm. zu verf. §. 122 bis 129.
4 Philos. Trans. T. LXVII. N. 37. p. 617.

nur die einzige Vorschrift, dafs das Thermometer bis ans Ende des Quecksilberfadens in zerstofsenes Eis eingesenkt werden müsse, weil der Gefrierpunct sonst zu hoch liegen würde, und sie berechneten zugleich eine Tabelle, um den hieraus entstehenden Fehler zu corrigiren. Dafs man alle Körper, um sie, genau genommen, auf eine gewisse Temperatur zu bringen, dem erwärmenden oder erkältenden Mittel in ihrer ganzen Ausdehnung aussetzen müsse, versteht sich von selbst, und sonach mufs auch das Thermometer zur Auffindung des Nullpunctes bis an den Ort der Röhre, wohin dieser fällt, der erkältenden Mischung ausgesetzt werden. Am geeignetsten hierzu habe ich stets gefunden, das zu graduirende Thermometer schon vorher einige längere Zeit einer vom Frostpuncte wenig entfernten Temperatur auszusetzen, dann reinen Schnee in einem hinlänglich grofsen Gefäfse bei einer wenig über den Frostpunct hinausgehenden Temperatur mit einem hölzernen Spatel oder einer Glasröhre anhaltend zu rühren, bis ein steifer Brei entsteht, in welchem nur weniges oder eigentlich gar kein freies Wasser vorhanden ist, und das Thermometer tief genug in diese Masse hineinzusenken, zugleich aber oft etwas auf- und abwärts zu bewegen, damit die Kugel desselben nicht etwa mit geschmolzenem Wasser, sondern mit der noch nicht zergangenen Masse in Berührung komme, denn auch Tralles[1] fand, dafs das freie Wasser im schmelzenden Schnee den Frostpunct 0°,7 C. zu hoch angeben könne.

32) Neuerdings sind die Gesetze und Bedingungen einer scharfen Bestimmung des Gefrierpunctes durch Egen[2] mit unübertrefflicher Genauigkeit aufgestellt worden, indem er vermittelst eines fein getheilten Silberplättchens und mikroskop. Ablesung der Höhe des Quecksilberfadens diejenigen Umstände aufsuchte, unter denen der Stand sich unveränderlich zeigt. Aus einer sehr grofsen Menge seiner Versuche ergeben sich folgende Regeln. Nur der Punct des schmelzenden Schnees ist zur Bestimmung des Nullpunctes der Thermometer geeignet, denn dafs gefrierendes Wasser oder Wasser, worin sich Eis befindet, nicht dazu brauchbar sey, ergiebt sich aus früheren Erfahrungen, zerstofsenes reines Eis scheint nach einigen we-

1 Astronom. Jahrbuch 1825. S. 211.

2 Poggendorff Ann. XI. 335.

nigen Versuchen in seinem Verhalten dem Schnee gleich zu seyn, allein auf jeden Fall ist es mühsam und nicht allezeit völlig sicher, reines Eis zu erhalten und die möglichen störenden Einflüsse dabei zu entfernen. Auf die richtige Bestimmung dieses festen Punctes haben keinen Einfluſs das Gefäſs und die Menge des darin enthaltenen Schnees, der Barometerstand, die Beschaffenheit des gewählten Schnees, wenn er nur rein ist, und die Temperatur des Beobachtungsortes, doch ist es allezeit leichter und sicherer, wenn die äuſsere Temperatur 5 bis 6 Grade über dem Nullpuncte nicht übersteigt. Die Unterschiede, welche durch diese genannten Einflüsse hervorgebracht werden, übersteigen sicher nicht 0°,007 C. Wohl zu berücksichtigen ist dagegen der Grad der Schmelzung, worin sich der Schnee befindet, denn er eignet sich zu der gewünschten Bestimmung nur dann, wenn die Schmelzung in ihm anfängt sichtbar zu werden oder er sich in einzelnen Theilen durchscheinend zeigt, indem von da an, bis er mit Wasser durchzogen wird, seine Temperatur constant bleibt. Ist die äuſsere Temperatur nur wenige Grade höher als der Nullpunct, so tritt die constante Temperatur schon dann ein, wenn er anfängt plastisch zu werden und sich an der Oberfläche einzelne durchscheinende Puncte zeigen, dauert auch noch fort, wenn er bedeutend naſs zu werden angefangen hat, weswegen es ungleich leichter und sicherer ist, die Bestimmung unter diesen Umständen vorzunehmen. Wenn dagegen die äuſsere Temperatur hoch und der Zufluſs der Wärme von auſsen stark ist, so kann diese nicht sofort vom Schnee absorbirt werden; dieses erfordert Zeit, und man findet den gesuchten Punct zu hoch, wenn man nicht vorsichtig den Zeitpunct abwartet, bis der Schnee auch im Innern anfängt durchscheinend zu werden. Kommt es auf sehr groſse Genauigkeit nicht an, so findet man den Nullpunct mit genügender Sicherheit von dem Augenblicke an, wo der Schnee anfängt plastisch zu werden, bis er mit Wasser durchzogen ist; der Fehler wird 0°,04 C. nicht übersteigen; ist aber viel Wasser vorhanden und der Zufluſs der Wärme von auſsen bedeutend stark, dann sind die Fehler groſs, und die Grenze derselben ist nicht wohl anzugeben, da unter Umständen sich selbst in lauem Wasser das Eis noch eine geraume Zeit ungeschmolzen erhalten kann.

33) Das hier mitgetheilte Verfahren hat man seitdem überall, wo es auf grofse Genauigkeit ankommt, in Anwendung gebracht; es ist schärfer und bestimmter ausgedrückt, als dasjenige, welches Rudberg[1] empfohlen hat, Letzterer aber berücksichtigt einen wesentlichen und gleichfalls sehr zu beachtenden Umstand. Egen stellte seine Versuche mit bereits graduirten Thermometern an, allein eine zweite Frage ist, wie man im Allgemeinen den genau gefundenen Frostpunct gehörig bezeichnen soll. Ehemals war die Regel, einen feinen Faden ungefähr in der Gegend des Nullpunctes um die Röhre zu binden, diesen so lange zu verschieben, bis er sich genau an der Stelle des Gefrierpunctes befindet, und ihn dann mit etwas Gummiwasser festzukleben oder die erforderliche Stelle durch einen Diamantstrich oder Feilstrich zu bezeichnen; allein dieses Verfahren, welches mit gehöriger Sorgfalt ausgeführt für gewöhnliche und auch mäfsig feine Thermometer völlig genügt, nennt Rudberg für die ganz vorzüglichen Apparate, wie er sie bei der Regulirung der schwedischen Normalmafse gebrauchte, zu grob, und er wandte daher das folgende, allerdings ungleich schärfere an. Zuvörderst wurde vorläufig in der Gegend der Stelle, wohin der Nullpunct zu liegen kommt, ein feiner Diamantstrich gemacht, dessen Richtung auf die Axe der Röhre perpendiculär seyn mufs, dann legte er das Thermometer auf das Messingblech AB und schraubte es vermittelst des bügelförmigen Streifens nm nach untergelegter Korkscheibe mit den Schrauben SS fest. Auf der Mitte der Platte abcd befand sich in Silber eine feine Theilung, wovon 198 Theile auf einen Decimalzoll gingen. Zur Ablesung diente ein Mikroskop, dessen Röhre DE in der Hülse G verschiebbar steckte, die Hülse selbst war ein Träger N und dieser am Schieber MP befestigt, welcher die Messingplatte von unten her umfafste und auf den Seiten derselben verschiebbar festgeklemmt war. Das Mikroskop hatte nur dreimalige Vergröfserung, weil der Diamantstrich auf der Röhre und die Striche der Theilung zugleich gesehn werden mufsten, und um die Parallaxe zu vermeiden, hatte der Deckel des Mikroskops oben ein kleines Loch o, in der Röhre selbst

Fig. 80.

---

1 Aus Kongl. Vetensk. Acad. Handling. f. 1834. p. 354. in Poggendorff Ann. XXXVII. 376. XL. 39.

aber, etwa 0,5 Zoll vom Objective E, befand sich ein messingnes Diaphragma, dessen kreisrunde Oeffnung nur eine Linie im Durchmesser hielt, in deren Mitte dann das Ende des Quecksilberfadens durch Verschiebung des Mikroskops gebracht wurde, wobei man nach einiger Uebung noch 0,2 der Theilung schätzen konnte. Zuerst wurde dann gemessen, mit welchem Theilstriche der Diamantstrich auf der Röhre zusammenfiel, dann das Thermometer in die Schneemischung gehalten und, nachdem es lange genug darin gestanden, der das Ende des Quecksilberfadens berührende Theilstrich abgelesen, um zu wissen, wie viele solcher Theile über oder unter dem Diamantstriche der Nullpunct sich befand.

Obgleich man diesem Verfahren den gröfsten Beifall nicht versagen kann, so scheint mir doch das durch Egen angewandte noch vorzüglicher zu seyn. Zuerst nimmt der Quecksilberfaden, so weit er auf der Messingplatte liegt, nicht wohl die erforderliche Temperatur an, und zweitens macht die Vorrichtung das Thermometer zu unbehülflich, so dafs man dasselbe nicht mit der erforderlichen Leichtigkeit in der Schneemischung bewegen kann, um zu verhüten, dafs sich kein mit Wasser erfüllter Raum um die Kugel bilde, wodurch leicht ein Fehler von 0°,1 bis 0°,2, ja unter Umständen ein noch gröfserer entstehn kann. Weit wichtiger als die schärfste Messung ist aber die scharfe Herstellung der zu messenden Gröfse. Im Allgemeinen kommt hierbei noch Folgendes in Betrachtung. Wenn die verlangten Thermometer beim künftigen Gebrauche ohne Mikroskop und ohne Anwendung einer künstlichen mikrometrischen Theilung abgelesen werden, so genügt es, auch bei der Bestimmung der festen Puncte sich auf diejenige Grenze der Genauigkeit zu beschränken, die durch das unbewaffnete Auge erreichbar ist, dagegen aber mehr Sorgfalt darauf zu verwenden, dafs bei dem so viel leichter zu manipulirenden Thermometer das Quecksilber völlig genau auf den gesuchten Nullpunct herabgebracht werde. Die scharfe Bezeichnung dieses Punctes ist allerdings schwierig, sobald man verlangt, dafs sie dauerhaft bleibend seyn soll. Das Ritzen mit einem Diamantsplitter, einem scharfen Feuersteine oder einer Feile kann einen Bruch der Röhre an dieser Stelle herbeiführen und ist aufserdem, wenn die Bezeichnung scharf seyn soll, nicht eben leicht zu bewerkstel-

ligen. Daher empfehle ich folgendes Verfahren, welches ich zwar nicht hierbei, wohl aber bei andern Operationen sehr bewährt gefunden habe. Nachdem vorläufig der Ort des Gefrierpunctes mit hinlänglicher Genauigkeit ausgemittelt und auf irgend eine Weise, ohne jedoch die Röhre zu beschmuzen, bezeichnet worden ist, wird um diese Stelle ein Silberfaden von der bekannten feinsten Sorte geschlungen, deren man sich früher und wohl noch jetzt zum Einziehen in die Fernröhre bedient. Dieser hat immerhin Haltbarkeit genug, um nach zwei- bis dreimaligem Umschlingen seiner beiden Enden um einander hinlänglich festzusitzen und sich vorsichtig vermittelst einer feinen Messerklinge so viel verschieben zu lassen, als hierzu erfordert wird. Alsdann folgt die nach gegebener Anweisung zu bewerkstelligende Herabbringung des Thermometers auf den Gefrierpunct, welches bei dem so leicht zu manipulirenden Apparate mit gröfster Schärfe geschehn kann, auch fällt der parallaktische Fehler von selbst weg, wenn man bei wiederholter Umdrehung der Röhre um ihre Axe den Silberfaden so lange verschiebt, bis das Ende des Quecksilberfadens genau in seine Ebene fällt. Ist man von der Sicherheit dieser Bestimmung überzeugt, die man nöthigenfalls durch Wiederholung dieses Verfahrens noch erhöhen kann, so überzieht man die Röhre an der Stelle des Silberfadens etliche Zoll lang mit Copalfirnifs oder mit dem flüssig gemachten Deckgrunde für Aetzung mit Flufssäure, und wenn dieser hinlänglich getrocknet ist, ohne zu grofse Sprödigkeit angenommen zu haben, wird der Faden abgenommen und der dann zum Vorschein kommende blanke Streifen mit Flufssäure geätzt, welcher höchst fein seyn mufs, weil der mit einem Pinsel aufgetragene Firnifs blofs die Stelle der Röhre nicht bedeckt, die durch den runden Draht geschützt wurde.

34) Der zweite, gleich anfangs als normal gewählte Punct ist der *Siedepunct*, unnöthig zuweilen *Punct des siedenden Wassers* genannt; *punctum aquae ebullientis; terme de l'eau bouillante; boiling point*, welchen das Thermometer annimmt, wenn man es in siedendes Wasser senkt. Dafs die Temperatur des siedenden Wassers eine constante sey, ist allerdings gewifs, soll dieselbe aber zur Bestimmung eines Normalpunctes beim Thermometer dienen, so sind verschiedene Vorsichtsmafsregeln zu beachten, und dabei ist dennoch das Verfahren

mühsam und schwierig, sobald es auf einen hohen Grad der Genauigkeit ankommt. Schon de Luc erkannte ziemlich vollständig die dabei zu beobachtenden Vorsichtsmaſsregeln. Zuerst muſs man reines Wasser nehmen; dann hat zwar die Temperatur der äuſseren Umgebung keinen Einfluſs, einen desto gröſseren aber legt er der Gestalt des Gefäſses und der Beschaffenheit seines Deckels bei. Auſserdem soll die Wärme etwas abnehmen, wenn die Quantität des Wassers durch Verdunstung vermindert wird, man soll ferner nicht bloſs die Kugel, sondern auch den Theil der Röhre, bis wohin das Quecksilber steigt, dem siedenden Wasser aussetzen, nie aber mit der Kugel den Boden berühren, weil sonst die Wärme um einen ganzen Grad Reaum. steigen könne, übrigens aber muſs das Wasser in starkem Sieden erhalten werden, damit die erforderliche Wärme überall in demselben verbreitet werde. Bellani[1] giebt die Regel, man solle den Quecksilber enthaltenden Theil der Röhre den Dämpfen des siedenden Wassers in einem verschlossenen Gefäſse mit engem Ausgange aussetzen, die Kugel aber zwei bis drei Zoll tief unter die Oberfläche des Wassers senken, ohne den Boden zu berühren. Endlich erkannte de Luc schon den starken Einfluſs des veränderlichen Luftdruckes auf das Sieden des Wassers und machte es daher zur Bedingung, daſs bei allen Thermometern der Siedepunct unter gleichem Luftdrucke bestimmt oder hiernach corrigirt würde. Im Allgemeinen hatte schon Fahrenheit jenen Einfluſs auf die Lage des Siedepunctes bemerkt, die Gröſse der erforderlichen Correction wurde aber nachher aus den Untersuchungen über die Elasticität des Wasserdampfes verschieden bestimmt. Egen[2] giebt an, daſs Lemonnier sie im Jahre 1740 für jede Linie der Barometerhöhe $= 0°,104$; Martine $= 0°,092$; Faugère gegen das Jahr 1770 einmal $= 0°,112$, ein anderes Mal $= 0°,062$; de Luc im Mittel aus mehreren im Jahre 1770 angestellten Versuchen $= 0°,094$; Dalton und nahe ebenso Arzberger $= 0°,085$ C. bestimmt habe. Die oben genannten Mitglieder der Londoner Societät geben in Folge ihrer vielen Versuche ausführliche Regeln hierfür an. Zuerst soll man das Thermometer nicht ins Wasser

1 Brugnatelli Giornale cet. Dec. sec. T. VI. p. 274.
2 Poggendorff Ann. XI. 284.

senken, sondern nach dem zuerst von CAVENDISH[1] gemachten Vorschlage vielmehr blofs den Dämpfen des siedenden Wassers aussetzen. Hierfür schlagen sie ein allerdings passendes Gefäfs von Blech vor, welches nach dem Hineingiefsen einer etliche Zoll hohen Wasserschicht mit einem genau schliefsenden, aber des bequemen Abhebens wegen auf einem Ringe von Filz ruhenden Deckel verschlossen wird. In diesem befindet sich eine 0,5 Z. weite und 2 bis 3 Z. hohe Röhre zum Entweichen der Dämpfe, doch soll sie mit einer zinnenen, durch die Dämpfe zu hebenden Platte bedeckt seyn. Die Oeffnung, durch welche die Thermometerröhre gesteckt wird, soll dicht schliefsen und der Siedepunct des Thermometers nur sehr wenig über sie herausragen, damit die Dämpfe überall auf den Quecksilberfaden einwirken; auch soll das Wasser rasch sieden, und mindestens 1 bis 2 Minuten auf das Thermometer eingewirkt haben, ehe man den gesuchten Punct bestimmt. Andere Vorschläge, als die Kugel ins Wasser selbst 3 bis 4 Zoll hinabzusenken, wobei weder der Deckel fest schliefsen, noch auch die Röhre mit der zinnenen Platte bedeckt seyn mufs, oder die Kugel in einem offenen Gefäfse ins Wasser zu senken, die Röhre aber mit leinenen oder wollenen Zeugen zu umwickeln und diese drei- bis viermal mit siedendem Wasser zu begiefsen, sind weit weniger zweckmäfsig, und der letztere verdient auf jeden Fall keine Empfehlung. Endlich bestimmten sie, dafs die Barometerhöhe 29,8 engl. Z. (335,54 Par. Lin.) betragen müsse, wenn Wasserdämpfe angewandt würden, und 29,5 engl. Zoll (332,15 Par. Lin.), wenn die Kugel 2 bis 3 Zoll tief ins Wasser eingesenkt würde. In einer Tabelle sind die Correctionen, welche die Scalen für jeden andern Barometerstand bedurften, in Tausendtheilen ihrer ganzen Länge hinzugefügt.

Fig. 81.

35) EGEN's erwähnte Untersuchungen[2] lassen sich auch in Beziehung auf die Bestimmung des Siedepunctes als erschöpfend betrachten. Zuerst entscheidet er sich bestimmt dafür, dafs derselbe nicht im Wasser, sondern im Dampfe gefunden werden müsse, wovon sich übrigens jeder durch einen einfachen Versuch leicht überzeugen kann, wenn er nur ein

1 Philos. Trans. T. LXVI. p. 380.
2 Poggendorff Ann. XI. 284. 517.

Thermometer in siedendes Wasser hält, in welchem Fall ein fortdauerndes Oscilliren der Spitze des Quecksilberfadens wahrgenommen wird, nicht zu gedenken, dafs obendrein bei Anwendung eines offenen Gefäfses der in überwiegender Menge auf dem Ende der Röhre niedergeschlagene Dampf ein genaues Auffinden des eigentlichen Punctes ganz unmöglich macht. Hiermit fällt dann auch die Beantwortung der Frage, was für Gefäfse man wegen ihres Einflusses auf die Hitze des siedenden Wassers wählen müsse, von selbst weg, die durch Egen berührt und durch Rudberg ausführlich untersucht wird[1]. Von entschiedenem Einflusse ist aber der Barometerstand, und die Frage, bei welcher Quecksilberhöhe der Siedepunct bestimmt werden müsse, bedarf daher nothwendig einer definitiven Erledigung. Egen stellt zu diesem Ende eine Menge genau bestimmter Barometerhöhen zusammen, gelangt aber zu dem nämlichen Resultate, welches aus meinen eigenen, in Folge vieler neu hinzugekommener Thatsachen noch ausführlicheren Untersuchungen[2] evident hervorgeht, dafs wir einen allgemeinen mittleren Barometerstand im Meeresspiegel mit Schärfe zu bestimmen gar nicht vermögen, und dafs es daher am gerathensten ist, sich über einen gewissen willkürlichen zu vereinigen, welcher dem wirklichen möglichst nahe kommt und sich von den bisher verschiedentlich angenommenen am wenigsten entfernt. Diesemnach entscheidet er für 0,76 Meter der auf 0° C. reducirten Quecksilbersäule im Barometer, weil diese Gröfse die angegebenen Bedingungen erfüllt, in dem eigentlichen Fundamentalmafse ausgedrückt, in Frankreich allgemein und auch in Deutschland vielfach angenommen ist und auch der in England fortwährend beibehaltenen Bestimmung von 30 engl. Zoll = 0,762 Met. mit einem verschwindenden Unterschiede nahe kommt. Diese Gründe sind so einleuchtend, dafs man nicht zweifeln kann, es werde dieser Vorschlag allgemein angenommen werden, womit dann die früheren anderweitigen Bestimmungen von Lambert und

1 Beiläufig bemerke ich, dafs der Vielen räthselhafte Unterschied der Siedehitze des Wassers in verschiedenen Gefäfsen eine Folge der gleichzeitig mit und neben der Dampfbildung statt findenden Wärmestrahlung ist, wie im Art. *Wärme*, *Sieden*, ausführlich gezeigt werden soll.

2 S. Art. *Meteorologie*, *Barometer*. Bd. VI. S. 1939.

de Luc von 27 Zoll = 0,73089 Met., die gangbare von 28 Z. = 0,75796 Met. und die der Londoner Commission von 29,5 engl. Z. = 0,7493 Meter von selbst wegfallen. Vielen Grund für sich hat Soldner's[1] Vorschlag von 0,75 Meter, weil die meisten Orte so hoch über der Meeresfläche liegen, dafs ein Barometerstand von 0,76 Meter daselbst unter die minder gewöhnlichen gehört, allein die angegebenen Gründe sind doch überwiegend für 0,76 Meter entscheidend.

36) Die Frage, bis zu welchem Grade der Genauigkeit der Siedepunct auf den Thermometern bestimmt werden könne, da de Luc die Grenze der Genauigkeit = 0°,08 C., die Londoner Commission aber zwischen 0°,2 und 0°,45 C. angiebt, ohne die Ursachen dieser Schwankungen auffinden zu können, hat Egen gleichfalls einer sorgfältigen Untersuchung unterworfen. Zuerst mufs entschieden werden, ob die Materie des Gefäfses, worin das Wasser siedet, auf die Temperatur des gebildeten Dampfes einen Einflufs ausübt und es daher begründet ist, dafs man nach der Vorschrift von Cavendish die Bestimmung des Siedepunctes in einem eisernen Gefäfse vornehmen müsse. Die erschöpfenden Versuche von Rudberg[2] zeigen evident, dafs die Wärme des Dampfes aus siedendem Wasser in allen Gefäfsen gleich ist, und da versteht es sich dann von selbst, dafs man das bequemste Material, nämlich Blech, zu denjenigen Gefäfsen wählen wird, die zur Bestimmung des Siedepunctes dienen sollen. Ein zweiter zu entscheidender Umstand ist die oft behauptete[3] Gleichheit der Temperatur des Dampfes und der Flüssigkeit, woraus derselbe beim Sieden entweicht. Auch hierüber entscheiden Rudberg's Versuche bestimmt dahin, dafs jener Satz keineswegs richtig ist, der Wasserdampf vielmehr in jedem Gefäfse und selbst von Wasser, worin eine beliebige Menge eines Salzes aufgelöst ist, eine vom Luftdrucke abhängige Temperatur hat. Inzwischen erhält dieses eine beachtenswerthe Beschränkung nach den Versuchen von Egen, welche zeigen, dafs die Wärme des Wasserdampfes ungemein steigt, wenn das freie Feuer die vom Wasser nicht bespülten Wandungen des Gefäfses so um-

1 G. XVII. 62.

2 Poggendorff Ann. XL. 55.

3 Biot Traité de Phys. exp. et math. T. I. p. 45.

spült, dafs diese eine sehr grofse Hitze annehmen, die nach Erfahrungen bei Dampfkesseln selbst bis zum Glühen steigt. Wird diese Ursache beträchtlicher Fehler vermieden, so macht die Höhe des Wassers im Gefäfse keinen Unterschied, sobald die Menge desselben grofs genug ist, um die gehörige Quantität Dämpfe ohne Unterbrechung herzugeben. Das Gefäfs, welches BIOT[1] zur Bestimmung des Siedepunctes empfiehlt, ist dazu vollkommen geeignet, nur dürfte zu bemerken seyn, dafs die zum Entweichen des Dampfes bestimmte Oeffnung nicht zu grofs seyn darf, damit nicht unnöthig vieles Feuer zur fortdauernd starken Dampfbildung erfordert werde, auch neben dem Dampfe nicht Luft von aufsen eindringe und eine Abkühlung verursache. Die Gestalt des von ihm empfohlenen Gefäfses wird durch die genau copirte Zeichnung genügend deutlich, nur scheint nicht gehörige Rücksicht darauf genommen zu seyn, dafs die Thermometer, insbesondere die gröfseren, ihrer ganzen Länge nach den Dämpfen ausgesetzt werden. Das Gefäfs, dessen sich EGEN bediente, ist in mehrfacher Beziehung zweckmäfsiger eingerichtet. Dasselbe besteht aus einem Cylinder von Blech, wobei der untere Absatz deswegen angebracht zu seyn scheint, um es mit Bequemlichkeit in einen schon bestehenden Ofen zu senken, wodurch dann auf jeden Fall verhütet wird, dafs eine starke Flamme die oberen Wandungen umspült. An der einen Seite war eine Röhre seitwärts angelöthet, um durch diese ein Thermometer in das Wasser selbst einzubringen, was jedoch nur dann von Nutzen ist, wenn man Versuche zur Vergleichung der Hitze des Wassers und des Dampfes anstellen will, für den gewöhnlichen praktischen Gebrauch aber wegfallen kann. An der gegenüberstehenden Seite befindet sich eine längliche Oeffnung von 2 Zoll Breite und 1,5 Z. Länge, die durch einen Schieber bedeckt mehr oder weniger geöffnet wird. Der genau schliefsende Deckel ist mit 4 aufgesetzten kurzen Röhren a b c d versehn, in welche andere gesteckt werden können, die vorzüglich zur Aufnahme längerer Thermometer dienen, eine auch deswegen vortheilhafte Einrichtung, weil sie die scharfe Bezeichnung des Siedepunctes erleichtert. Zahlreiche Versuche ergaben, dafs bei fortdauerndem lebhaftem Sieden des Wassers

Fig. 82.

Fig. 83.

Fig. 84.

---

1 Traité T. I. p. 45.

und gleichbleibendem Barometerstande der Siedepunct selbst Stunden lang unverändert blieb; auch hatte die Menge des Wassers im Gefäſse keinen Einfluſs, jedoch durften ganz von Wasser entblöſste Theile des Gefäſses der Einwirkung des Feuers nicht zu sehr ausgesetzt seyn, weswegen es immer rathsam bleibt, das Wasser nicht unter etwa 1 Zoll tief sinken zu lassen. Der Abstand der Thermometerkugeln von der Oberfläche des Wassers war ohne Einfluſs, doch durften sie dem oberen Deckel nicht allzunahe seyn, und ebenso schien die Gröſse der Oeffnung a, aus welcher der Dampf entwich, keinen Unterschied herbeizuführen, obgleich dieses wohl eine Grenze haben muſs, die sich jedoch leicht bestimmen läſst, sobald man nur beachtet, daſs eine hinlängliche Quantität Dampf entweichen kann, ohne eine vermehrte Spannung zu erhalten; wurde aber die Röhre c gleichfalls geöffnet, so zeigte sich der Siedepunct höchst schwankend und im Ganzen tiefer liegend, was davon abzuleiten ist, daſs dann in die Oeffnung des Schiebers oder neben dem nicht absolut schlieſsenden Deckel äuſsere Luft eindringt und mit dem Dampfe durch die Röhre entweicht.

37) Etwas später, als Egen, jedoch ohne von dessen Arbeit Kenntniſs zu haben, unterwarf G. F. Parrot[1] die Aufgabe über die Auffindung der beiden festen Puncte einer ausführlichen Untersuchung, deren Resultate im Ganzen wohl mit den eben erwähnten übereinstimmen muſsten, und es wird daher genügen, hier nur einige Abweichungen anzuführen. Dahin gehört eine wegen ihrer Leichtigkeit zu empfehlende sichere Methode zur Bestimmung des Frostpunctes, welche darin besteht, daſs man das Thermometer mit festgedrücktem lockerem Schnee bei einer Temperatur von etwa — 4° bis — 6° oder tiefer genau umgiebt, dasselbe bis unter den Nullpunct herabgehn läſst, dann das Gefäſs in einen etwa 6° bis 8° warmen Raum bringt und abwartet, bis ein Theil des äuſseren Schnees durch die von auſsen zuströmende Wärme geschmolzen ist. Der so erzeugte Nullpunct bleibt wohl eine Stunde und darüber constant, so lange noch die Kugel von ungeschmolzenem Schnee umgeben ist, der längere Zeit un-

1 Mémoire sur les Points fixes du Thermomètre, par G. F. Parrot. Avec deux Planches. St. Peterb. 1828. 4.

veränderte Stand zeigt aber, dafs der eigentliche Nullpunct wirklich erreicht sey. Nimmt man statt des Schnees Eis, was im Sommer nothwendig seyn würde, so müfste man dasselbe aus destillirtem Wasser herstellen, oder man würde gegen merkliche Fehler nicht gesichert seyn, weswegen es am gerathensten scheint, diese Methode ganz aufzugeben. In Beziehung auf den Siedepunct hat Parrot das beachtenswerthe Resultat aufgefunden, dafs die äufsere Temperatur ohne Einflufs ist, mindestens innerhalb der Grenze seiner Versuche von — 5° bis — 15° R. Wenn er aufserdem eine hinlänglich wirkende Weingeistlampe als am besten geeignet empfiehlt, um das Wasser in stets gleichmäfsigem Sieden zu erhalten, so mag dieses allerdings gegründet seyn, weil bei einer solchen die Flamme sich am leichtesten reguliren läfst. Ein Umstand, auf welchen Parrot aufmerksam macht, verdient zwar allerdings Beachtung, ob er aber geeignet ist, zur Einführung von zwei verschiedenen Arten eigens benannter Thermometer zu führen, dürfte noch fraglich scheinen. Man hat als Regel angenommen, dafs nicht blofs die Kugel, sondern auch die ganze Länge des Quecksilberfadens dem erhitzenden Dampfe zur richtigen Bestimmung des Siedepunctes ausgesetzt seyn müsse. Ein so graduirtes Thermometer wird dann allerdings die Temperatur richtig zeigen, wenn es dem erwärmenden Medium ganz ausgesetzt ist, z. B. bei Witterungsbeobachtungen u. s. w., wenn aber die Wärme von Flüssigkeiten gemessen wird, in welche man nur die Kugel eintauchen kann, so findet man dieselbe um eine geringe Gröfse unrichtig, weswegen Parrot für die erste Art von Thermometern den Namen *Atmothermometer*, für die zweite *Hydrothermometer* in Vorschlag bringt, wobei zugleich die erstere Art im Dampfe, die zweite aber durch Einsenkung der Kugel in siedendes Wasser bis zu einer bestimmten Tiefe ihren Siedepunct erhalten haben soll; inzwischen dürfte der Grund nicht erheblich genug seyn, die Uebersicht thermometrischer Beobachtungen durch Verdoppelung der Apparate zu erschweren, und es vorzuziehn seyn, nur die eine Art derselben zur möglichst genauen Uebereinstimmung zu bringen.

38) Rudberg[1] liefs einen Apparat für diesen Zweck con-

---

1 Poggendorff Ann. XL. 60.

struiren, welcher insofern erwähnt werden mufs, als er von einem ausgezeichneten Physiker nach der Bekanntwerdung der bereits beschriebenen gewählt wurde und sich von diesen durch eine angebrachte doppelte Röhre unterscheidet. Die Construction desselben ist aus der Zeichnung ohne ausführliche Beschreibung zu entnehmen. Er besteht aus einem gröfseren cylindrischen Gefäfse zur Aufnahme des Wassers, einem äufseren Cylinder MN von ungefähr 1,25 schwed. Decimalzoll (1,37 Par. Z.) und einem inneren von 0,66 schwed. Decimalzoll (0,87 Par. Z.) Durchmesser, beide von so kleiner Dimension, damit die Oberfläche nicht zu stark abgekühlt wird und ein nur mäfsiges Feuer zur Bildung einer hinlänglichen Quantität Dampf genügt. Beide Röhren sind oben mit einem Korke verschlossen und bestehn aus einzelnen Stücken, deren eine für die Länge des jedesmaligen Thermometers hinlängliche Anzahl in einander gesteckt wird, wobei jedoch die Fugen verlöthet werden sollen, weil sonst etwas condensirtes Wasser durchdringt, verdunstet und dadurch eine gröfsere Abkühlung bis zur Unsicherheit der Beobachtung erzeugt. Dafs diese Argumentation auf den äufseren Cylinder anwendbar sey, begreift man leicht, wie sie aber auch auf den inneren passen könne, welcher doch nothwendig sowohl inwendig als auch auswendig mit siedend heifsem Wasserdampf erfüllt und von diesem umgeben ist, so dafs keine Condensation erfolgen darf, wenn man eine richtige Bestimmung verlangt, ist mir wenigstens nicht klar, und ich möchte fragen, ob nicht die geringen Durchmesser der Röhren, sofern bei ihnen die Oberflächen in einem geringeren Verhältnisse abnehmen, als der Inhalt des eingeschlossenen Dampfcylinders, einen nachtheiligen Einflufs herbeiführen, dem man so leicht durch einen kaum der Berücksichtigung werthen gröfseren Aufwand von etwas Brennmaterial entgehn könnte. Bei einem zweiten Apparate von Glas, dessen sich Rudberg lieber bediente, weil man darin den Procefs des Siedens und alles dessen, was vorgeht, sehn kann, findet die angegebene Sicherungsmafsregel nicht statt, obgleich das Glas leichter als Weifsblech die Wärme an seine äufsere Umgebung abgiebt, und man darf hieraus folgern, dafs sie an sich überflüssig ist, um so mehr, als man die Fugen blechener Röhren vermittelst umwickelten Hanfes leicht dampfdicht verschliefsen kann. Bei dem gläsernen

Fig. 85.

Fig. 86.



Apparate ist der innere Cylinder mit zwei Schrauben an der messingnen Hülse cd befestigt, weil man nicht leicht einen dem erweichenden Einflusse des Dampfes auf die Dauer widerstehenden Kitt findet. Die obere Fassung AB, woran cd festgelöthet ist, kann bei rr abgeschraubt werden. Für die Bezeichnung des Siedepunctes wendet RUDBERG das nämliche Verfahren an, welches oben beim Frostpuncte beschrieben ist; auch ersieht man aus der Zeichnung, wie das auf das Messingblech festgeschraubte Thermometer in den Dampfapparat gebracht wird, um die feinen Theile, welche die Abweichung des vorläufig mit einem Diamantstriche bezeichneten Siedepunctes vom gesuchten Puncte geben, mikroskopisch abzulesen. Da diese Methode aber für praktische Künstler nicht wohl zu empfehlen ist, so dürfte die von mir für die genaue Bezeichnung des Gefrierpunctes angegebene für diesen Zweck den Vorzug verdienen, da sie neben der leichten Ausführbarkeit noch obendrein den Vortheil gewährt, daſs das Thermometer in dem nicht dicken, die Wärme schlecht fortleitenden, die Siedehitze dagegen leicht annehmenden oberen Korke bis nahe an den Siedepunct herabgeschoben und der Silberdraht dann ohne Schwierigkeit mit dem oberen Ende des Quecksilberfadens, sobald sein Stand stationär geworden ist, allenfalls mit Hülfe einer Loupe, genau in eine und dieselbe Ebene gebracht werden kann. Daneben gewährt es einen groſsen Vortheil, wenn die beiden festen Puncte auf den Thermometern genau bezeichnet sind, damit jeder Besitzer derselben diese, die so wichtig sind, jederzeit mit Anwendung der für den jedesmaligen Zweck erforderlichen Genauigkeit controliren kann.

39) Bei Weingeistthermometern und den vorgeschlagenen, mit Petroleum oder Schwefelkohlenstoff gefüllten, kann der Gefrierpunct auf die angegebene Weise bestimmt werden, der Siedepunct aber nicht, und es ist daher am räthlichsten, bei ihnen durch Einsenken in warmes Wasser etwa den 50sten Grad der Centesimalscale nach einem sehr genauen Normal-Quecksilberthermometer scharf zu bestimmen.

E. Thermometerscalen und deren Reduction.

40) Sind die beiden festen Puncte, der Gefrierpunct und Siedepunct, bei einem Thermometer bestimmt, so geht man insgemein von dem Grundsatze aus, dafs die innere Oeffnung der Röhren überall gleiche Weite habe oder dafs die Röhren richtig calibrirt seyen. Unter dieser Voraussetzung und der andern, dafs die Volumensvermehrungen der thermoskopischen Substanz den Zunahmen der Wärme direct proportional zu betrachten sind, mufs der Zwischenraum zwischen beiden in eine gewisse Anzahl gleicher Theile getheilt werden, und eine gewisse Menge solcher Theile, wie die hierdurch erhaltenen, wird dann noch unterhalb des Gefrierpunctes aufgetragen; der Träger dieser Theile, gewöhnlich Grade genannt, heifst die *Thermometerscale.* Entweder befindet sich die Theilung auf der Thermometerröhre selbst, oder das Thermometer wird auf einer Scale befestigt. Im ersten Falle ist es nicht gut ausführbar, die Theilstriche auf der Glasröhre mit irgend einem Farbestoffe zu zeichnen, indefs kann man sie auf Papier auftragen und dieses mit Vermeidung der Ausdehnung des Papiers durch Nässe auf die Thermometerröhre kleben, was jedoch ein dürftiger, zur Ungenauigkeit führender Nothbehelf ist, und man mufs sie daher entweder mit einer Diamantspitze ritzen, ohne sie so tief einzuschneiden, dafs die Haltbarkeit der Röhre darunter leiden würde, oder, was bei weitem vorzuziehn ist, man mufs sie mit Flufssäure ätzen. Solche Scalen sind ohne Widerrede die vorzüglichsten, sie sind am kleinsten, werden weder durch Feuchtigkeit, noch durch Säuren angegriffen, sind stets unverrückbar, lassen sich höchst fein darstellen und geben ein leichtes Mittel, parallaktische Fehler beim Ablesen zu vermeiden, indem man nur die Röhren um ihre verticale Axe drehn darf. Sollte es schwierig seyn, bei sehr feinen Thermometern die Grade abzulesen, so beseitigt man diese Unbequemlichkeit dadurch, dafs man die eine Hälfte der Röhre mit schwarzem Tusch oder, was dauerhafter ist, mit schwarzem Lack aus zusammengeriebenem Copalfirnifs und Kienrufs überstreicht und dann den silberweifsen Faden auf dem schwarzen Grunde sehr scharf erkennt.

Auf welche Weise das Aetzen geschehe, ist bereits angegeben worden[1]. Im zweiten Falle sind die für sich bestehenden Scalen meistens von Kupfer und übersilbert, oder von Elfenbein[2], oder von Holz und dann meistens mit Papier überklebt, oder von Glas mit eingeätzten Theilstrichen. Diese Scalen haben entweder eine Vertiefung am einen Ende, um die Kugel hineinzulegen, oder diese steht mit einem Theile der Röhre über die Scale hinaus; zuweilen sind auch die Scalen mit einem Scharniere versehn, um einen Theil derselben zurückzuschlagen und die Kugel nebst dem unteren Ende der Röhre frei zu machen. Ordinäre Thermometer, aber auch vorzüglich gute, haben ihre Röhre in eine andere Glasröhre eingeschlossen, in welcher sich zugleich die auf Papier gezeichnete Scale befindet. Soll sich in diesem Falle die Scale durch wechselnden Feuchtigkeitszustand nicht verändern, so muſs sie von der äuſsern Luft gänzlich abgeschlossen seyn, was auf die Weise bewerkstelligt wird, daſs man die äuſsere umgebende Röhre unmittelbar über der Kugel anschmelzt und nach eingebrachter Scale oben an der Blaslampe verschlieſst oder mit einer messingnen Fassung versieht. Auf welche Weise die Thermometer auf den Scalen befestigt werden, ist so bekannt, daſs es sich nicht belohnt, hierüber zu reden; auch genügt es nur zu bemerken, daſs genaue Scalen nothwendig mit einer *Theilmaschine*[3] gemacht werden müssen.

41) Auf die Scale werden diejenigen Grade aufgetragen, die der gewählten Eintheilung zugehören, und da auſser der hunderttheiligen Celsius'schen oder Centimalscale, der achtzigtheiligen oder Reaumür'schen und der Fahrenheit'schen keine der verschiedenen oben genannten jetzt mehr gebräuchlich sind, indem selbst die von de l'Isle vorgeschlagene, obgleich man sie bisher noch zu berücksichtigen pflegte, jetzt der Vergessenheit übergeben zu seyn scheint, auch selten nach ihr bezeichnete Beobachtungen vorkommen, die der wissenschaftliche Physiker dann leicht reduciren kann, so wird man es geeignet finden, wenn ich mich bloſs auf die drei ge-

---

1 S. Art. *Fluor.* Bd. IV. S. 519.

2 Elfenbeinerne Scalen sind vorzüglich in England sehr gemein; Baumgartner Supplem. S. 121.

3 S. *Theilung.*

nannten beschränke, und dieses um so mehr, je wünschenswerther es offenbar ist, daſs man sich allgemein der einfachsten und angemessensten hunderttheiligen bedienen möge, indem nach EGEN's[1] nur allzuwahrem Ausspruche aus dem Gebrauche mehrerer Scalen nicht selten Zweideutigkeiten hervorgehn und die mechanischen Rechnungen bei der Reduction dem Physiker einen bedeutenden, ganz nutzlos geopferten Zeitaufwand kosten, wozu man noch setzen kann, daſs beim Lesen die genaue Bekanntschaft mit der gebrauchten Scale sofort eine deutliche Vorstellung der mitgetheilten Beobachtungen erzeugt, die man nicht im gleichen Grade erhält, wenn die Gröſsen in einer ungewohnten Scale ausgedrückt sind. Für jetzt aber, da alle drei Scalen noch gebraucht werden und viele werthvolle Messungen in jeder derselben ausgedrückt sind, ist es unumgänglich nothwendig, die Angaben wechselseitig auf einander zu reduciren. Verschiedene Gelehrte haben es der Mühe werth gehalten, allgemeine Formeln aufzusuchen, um danach die erforderlichen Reductionen vorzunehmen, z. B. HINDENBURG[2], KRAMP[3], HEINSIUS[4] und KAESTNER[5]; da man sich aber jetzt auf die drei gebräuchlichen Scalen beschränkt und DE LUC's Thermometerscale für barometrische Höhenmessungen fast ganz in Vergessenheit gekommen, auf jeden Fall ganz unnütz ist, so bedarf es keiner allgemeinen Formeln zur Berechnung mehr, und man ist mit der Reduction sicher in kürzerer Zeit fertig, als erforderlich seyn würde, eine Formel dafür aufzusuchen. Wenn man nämlich weiſs, daſs 100 Grade der Centesimalscale = C auf 80 Grade der achtzigtheiligen sogenannten Reaumür'schen = R gehn und dieses also das einfache Verhältniſs[6]

---

1 Poggendorff Ann. XI. 292.

2 Progr. Quo Formulae comparandis grad. thermom. idoneae proponuntur. Lips. 1791. 4.

3 Geschichte der Aerostatik. Th. I. S. 100. Anhang zur Gesch. d. Aerost. S. 45.

4 WINKLER Philos. contempl. T. III. Phys. §. 1644. Anfangsgründe d. Phys. Leipz. 1754. S. §. 124 ff.

5 Anfangsgr. d. angew. Mathematik. 4te Aufl. Gött. 1792. Aerom. S. 890.

6 Eigentlich ist das Verhältniſs das umgekehrte, sofern die Einheit in 100 und in 80 Theile getheilt wird, was sich jedoch von selbst versteht.

$$C:R = 100:80 = 5:4$$

giebt, so ist $C = \frac{5}{4} R$ und $R = \frac{4}{5} C$. Ebenso einfach geben 180 Fahrenheit'sche Grade (= F) 100 Centesimal- und 80 Reaumür'sche Grade, wobei jedoch zu berücksichtigen, dafs die Fahrenheit'sche Scale mit 32° bei 0° C. oder R. anfängt und daher 212 statt 180 zählt. Das Verhältnifs giebt aber

$$F:C = 180:100 = 9:5 \text{ und } 180:80 = 9:4$$

und sonach ist also, mit Rücksicht auf den Gefrierpunct:

$$F = \frac{9}{4} R + 32; \quad F = \frac{9}{5} C. + 32;$$
$$R = \frac{4}{9}(F - 32); \quad C = \frac{5}{9}(F - 32).$$

Zuweilen werden zwei verschiedene Eintheilungen auf die nämliche Scale zu beiden Seiten der Röhre aufgetragen, um nach Belieben die eine oder die andere abzulesen, was zwar bequem ist, aber keine höhere Genauigkeit gewährt, weil leichter ein parallaktischer Fehler begangen wird, wenn die Theilstriche blofs an der Seite der Röhre stehn, als wenn sie durch diese und hinter dem Quecksilberfaden gesehn werden. Bei messingnen Scalen kann man sogar alle drei Theilungen zugleich auftragen, wenn man die Scale in der Mitte schlitzt, die Röhre in diesen Schlitz legt und auf die Vorderseite die achtzig- und hundertheilige, auf die Rückseite die Fahrenheit'sche zeichnet. Man verfertigte häufig früher, aber auch noch jetzt, blofse Scalen, meistens hölzerne, mit Papier überzogene, und zeichnete auf ihnen die vier gangbaren Theilungen neben einander, um dadurch ein bequemes Mittel der Reduction zu erhalten, allein da die verschiedenen Grade nur zuweilen in ganzen Graden correspondiren und daher die Zehntel und Hundertstel geschätzt werden müssen, so gewährt dieses Mittel keine grofse Genauigkeit, abgesehn davon, dafs nur die zwei sich berührenden Eintheilungen auf einander reducirt werden können, wenn man nicht grofse Fehler begehen will, was durch das Anlegen eines Anschlaglineals nur schwer vermieden wird. Solche Vergleichungstafeln haben MARTINE[1], BRAUN[2] und am vollständigsten STROHMEYER[3] gegeben, welcher sogar die acht-

---

1 Diss. sur la chaleur avec des observ. nouvelles sur la construction et comparaison des therm. Trad. de l'Angl. Par. 1751. 12.

2 Harmonia Scalarum; in Nov. Comm. Petrop. T. VII.

3 Anleitung übereinst. Thermometer zu verf. Gött. 1775. 8.

zigtheiligen Weingeistthermometerscalen mit aufgenommen hat. Nicht bloſs die drei noch jetzt üblichen Scalen, sondern auch die von DE L'ISLE und mehrere alte, die man jetzt kaum mehr zu entziffern vermag, nebst einer Angabe ausgezeichneter Temperaturen findet man noch zuweilen auf älteren Thermometern, aus deren Ansicht die Ueberzeugung hervorgeht, daſs eine genaue Reduction auf diesem Wege nicht zu erreichen steht. Das einzige hierzu brauchbare, aber auch genügende und zugleich zur Vermeidung eines groſsen unnützen Zeitaufwandes unentbehrliche Hülfsmittel geben die Tabellen, bei denen man die einander correspondirenden Grade der verschiedenen Scalen neben einander stellt. Die älteren, deren einige in den eben genannten Werken, auſserdem durch HELL[1], v. SWINDEN[2] und Andere veröffentlicht worden sind, enthalten meistens eine groſse Menge von Scalen, ja der Letztere nennt, und vergleicht meistens, nicht weniger als 72 Thermometerscalen. Die späteren Tabellen beschränken sich auf die vier üblichsten Scalen, die neuesten auf die drei noch jetzt gangbaren. Solche findet man in verschiedenen Werken, z. B. von JAMESON[3], J. F. W. HERSCHEL[4], SCHUMACHER[5], sehr vollständige von BAUMGARTNER[6] und andern. Daſs eine solche Tafel hier nicht fehlen dürfe, und zugleich von gröſserer Ausdehnung und der Bequemlichkeit wegen dreifach, für jede Scale eine besondere, versteht sich von selbst. Die Tabellen enthalten zunächst nur die Grade des Thermometers, wie sie die eine Scale giebt, in Graden der beiden andern ausgedrückt; wenn es sich aber fragt, wie sich die Grade der einen Scale zu denen der andern verhalten, z. B. wie viele Centesimal- oder Fahrenheit'sche Grade 10° R. geben, so genügen hierfür die Tabellen der achtzigtheiligen und hunderttheiligen Scalen gleichfalls, weil beide gleichmäſsig von dem nämlichen

---

1 Ephemer. Vienn. 1764. p. 164 u. 243. Journal de Phys. T. XVI.

2 Diss. sur la comparaison des thermomètres. Amst. 1778. 8.

3 Edinburgh New Phil. Journ. N. XXI. p. 133.

4 Encyclop. metrop. Art. Heat. p. 329.

5 Jahrbuch für 1838. S. 77.

6 Die Naturlehre nach ihrem gegenwärtigen Zustande. Wien 1831. Supplem. Th. V. S. 923.

Nullpuncte ausgehn, für die Fahrenheit'sche war aber hierfür eine eigene Tabelle erforderlich[1].

I. Tabelle zur Reduction der Thermometergrade nach den drei üblichen Scalen.

Fahr.	Cent.	R.	Cent.	R.	Fahr.	R.	Cent.	Fahr.
-100	-73,33	-59,66	-100	-80,0	-148,0	-100	-125,00	-193,00
-99	-72,77	-58,22	-99	-79,2	-146,2	-99	-123,75	-190,75
-98	-72,22	-57,77	-98	-78,4	-144,4	-98	-122,50	-188,50
-97	-71,66	-57,33	-97	-77,6	-142,6	-97	-121,25	-186,25
-96	-71,11	-56,88	-96	-76,8	-140,8	-96	-120,00	-184,00
-95	-70,55	-56,44	-95	-76,0	-139,0	-95	-118,75	-181,75
-94	-70,00	-56,00	-94	-75,2	-137,2	-94	-117,50	-179,50
-93	-69,44	-55,55	-93	-74,4	-135,4	-93	-116,25	-177,25
-92	-68,88	-55,11	-92	-73,6	-133,6	-92	-115,00	-175,00
-91	-68,33	-54,66	-91	-72,8	-131,8	-91	-113,75	-172,75
-90	-67,77	-54,22	-90	-72,0	-130,0	-90	-112,50	-170,50
-89	-67,22	-53,77	-89	-71,2	-128,2	-89	-111,25	-168,25
-88	-66,66	-53,33	-88	-70,4	-126,4	-88	-110,00	-166,00
-87	-66,11	-52,88	-87	-69,6	-124,6	-87	-108,75	-163,75
-86	-65,55	-52,44	-86	-68,8	-122,8	-86	-107,50	-161,50
-85	-65,00	-52,00	-85	-68,0	-121,0	-85	-106,25	-159,25
-84	-64,44	-51,55	-84	-67,2	-119,2	-84	-105,00	-157,00
-83	-63,88	-51,11	-83	-66,4	-117,4	-83	-103,75	-154,75
-82	-63,33	-50,66	-82	-65,6	-115,6	-82	-102,50	-152,50
-81	-62,77	-50,22	-81	-64,8	-113,8	-81	-101,25	-150,25
-80	-62,22	-49,77	-80	-64,0	-112,0	-80	-100,00	-148,00
-79	-61,66	-49,33	-79	-63,2	-110,2	-79	-98,75	-145,75
-78	-61,11	-48,88	-78	-62,4	-108,4	-78	-97,50	-143,50
-77	-60,55	-48,44	-77	-61,6	-106,6	-77	-96,25	-141,25
-76	-60,00	-48,00	-76	-60,8	-104,8	-76	-95,00	-139,00
-75	-59,44	-47,55	-75	-60,0	-103,0	-75	-93,75	-136,75
-74	-58,88	-47,11	-74	-59,2	-101,2	-74	-92,50	-134,50
-73	-58,33	-46,66	-73	-58,4	-99,4	-73	-91,25	-132,25
-72	-57,77	-46,22	-72	-57,6	-97,6	-72	-90,00	-130,00
-71	-57,22	-45,77	-71	-56,8	-95,8	-71	-88,75	-127,75
-70	-56,66	-45,33	-70	-56,0	-94,0	-70	-87,50	-125,50
-69	-56,11	-44,88	-69	-55,2	-92,2	-69	-86,25	-123,25

1 Der Umfang solcher Tabellen ist willkürlich, durfte aber hier nicht gering seyn. Es schien mir am angemessensten, den tiefsten, neuerdings angeblich durch liquide Kohlensäure erreichten Kältepunct von — 100° C. und den Siedepunct des Quecksilbers = + 350° C. als natürliche Grenzen anzunehmen.

Fahr.	Cent.	R.	Cent.	R.	Fahr.	R.	Cent.	Fahr.
—68	—55,55	—44,44	—68	—54,4	—90,4	—68	-85,00	-121,00
—67	—55,00	—44,00	—67	—53,6	—88,6	—67	-83,75	-118,75
—66	—54,44	—43,55	—66	—52,8	—86,8	—66	-82,50	-116,50
—65	—53,88	—43,11	—65	—52,0	—85,0	—65	-81,25	-114,25
—64	—53,33	—42,66	—64	—51,2	—83,2	—64	-80,00	-112,00
—63	—52,77	—42,22	—63	—50,4	—81,4	—63	-78,75	-109,75
—62	—52,22	—41,77	—62	—49,6	—79,6	—62	-77,50	-107,50
—61	—51,66	—41,33	—61	—48,8	—77,8	—61	-76,25	-105,25
—60	—51,11	—40,88	—60	—48,0	—76,0	—60	-75,00	-103,00
—59	—50,55	—40,44	—59	—47,2	—74,2	—59	-73,75	-100,75
—58	—50,00	—40,00	—58	—46,4	—72,4	—58	-72,50	- 98,50
—57	—49,44	—39,55	—57	—45,6	—70,6	—57	-71,25	- 96,25
—56	—48,88	—39,11	—56	—44,8	—68,8	—56	-70,00	- 94,00
—55	—48,33	—38,66	—55	—44,0	—67,0	—55	-68,75	- 91,75
—54	—47,77	—38,22	—54	—43,2	—65,2	—54	-67,50	- 89,50
—53	—47,22	—37,77	—53	—42,4	—63,4	—53	-66,25	- 87,25
—52	—46,66	—37,33	—52	—41,6	—61,6	—52	-65,00	- 85,00
—51	—46,11	—36,88	—51	—40,8	—59,8	—51	-63,75	- 82,75
—50	—45,55	—36,44	—50	—40,0	—58,0	—50	-62,50	- 80,50
—49	—45,00	—36,00	—49	—39,2	—56,2	—49	-61,25	- 78,25
—48	—44,44	—35,55	—48	—38,4	—54,4	—48	-60,00	- 76,00
—47	—43,88	—35,11	—47	—37,6	—52,6	—47	-58,75	- 73,75
—46	—43,33	—34,66	—46	—36,8	—50,8	—46	-57,50	- 71,50
—45	—42,77	—34,22	—45	—36,0	—49,0	—45	-56,25	- 69,25
—44	—42,22	—33,77	—44	—35,2	—47,2	—44	-55,00	- 67,00
—43	—41,66	—33,33	—43	—34,4	—45,4	—43	-53,75	- 64,75
—42	—41,11	—32,88	—42	—33,6	—43,6	—42	-52,50	- 62,50
—41	—40,55	—32,44	—41	—32,8	—41,8	—41	-51,25	- 60,25
—40	—40,00	—32,00	—40	—32,0	—40,0	—40	-50,00	- 58,00
—39	—39,44	—31,55	—39	—31,2	—38,2	—39	-48,75	- 55,75
—38	—38,88	—31,11	—38	—30,4	—36,4	—38	-47,50	- 53,50
—37	—38,33	—30,66	—37	—29,6	—34,6	—37	-46,25	- 51,25
—36	—37,77	—30,22	—36	—28,8	—32,8	—36	-45,00	- 49,00
—35	—37,22	—29,77	—35	—28,0	—31,0	—35	-43,75	- 46,75
—34	—36,66	—29,33	—34	—27,2	—29,2	—34	-42,50	- 44,50
—33	—36,11	—28,88	—33	—26,4	—27,4	—33	-41,25	- 42,25
—32	—35,55	—28,44	—32	—25,6	—25,6	—32	-40,00	- 40,00
—31	—35,00	—28,00	—31	—24,8	—23,8	—31	-38,75	- 37,75
—30	—34,44	—27,55	—30	—24,0	—22,0	—30	-37,50	- 35,50
—29	—33,88	—27,11	—29	—23,2	—20,2	—29	-36,25	- 33,25
—28	—33,33	—26,66	—28	—22,4	—18,4	—28	-35,00	- 31,00
—27	—32,77	—26,22	—27	—21,6	—16,6	—27	-33,75	- 28,75
—26	—32,22	—25,77	—26	—20,8	—14,8	—26	-32,50	- 26,50
—25	—31,66	—25,33	—25	—20,0	—13,0	—25	-31,25	- 24,25
—24	—31,11	—24,88	—24	—19,2	—11,2	—24	-30,00	- 22,00
—23	—30,55	—24,44	—23	—18,4	— 9,4	—23	-28,75	- 19,75

Fahr.	Cent.	R.	Cent.	R.	Fahr.	R.	Cent.	Fahr.
—22	—30,00	—24,00	—22	—17,6	—7,6	—22	—27,50	—17,50
—21	—29,44	—23,55	—21	—16,8	—5,8	—21	—26,25	—15,25
—20	—28,88	—23,11	—20	—16,0	—4,0	—20	—25,00	—13,00
—19	—28,33	—22,66	—19	—15,2	—2,2	—19	—23,75	—10,75
—18	—27,77	—22,22	—18	—14,4	—0,4	—18	—22,50	— 8,50
—17	—27,22	—21,77	—17	—13,6	1,4	—17	—21,25	— 6,25
—16	—26,66	—21,33	—16	—12,8	3,2	—16	—20,00	— 4,00
—15	—26,11	—20,88	—15	—12,0	5,0	—15	—18,75	— 1,75
—14	—25,55	—20,44	—14	—11,2	6,8	—14	—17,50	0,50
—13	—25,00	—20,00	—13	—10,4	8,6	—13	—16,25	2,75
—12	—24,44	—19,55	—12	— 9,6	10,4	—12	—15,00	5,00
—11	—23,88	—19,11	—11	— 8,8	12,2	—11	—13,75	7,25
—10	—23,33	—18,66	—10	— 8,0	14,0	—10	—12,50	9,50
— 9	—22,77	—18,22	— 9	— 7,2	15,8	— 9	—11,25	11,75
— 8	—22,22	—17,77	— 8	— 6,4	17,6	— 8	—10,00	14,00
— 7	—21,66	—17,33	— 7	— 5,6	19,4	— 7	— 8,75	16,25
— 6	—21,11	—16,88	— 6	— 4,8	21,2	— 6	— 7,50	18,50
— 5	—20,55	—16,44	— 5	— 4,0	23,0	— 5	— 6,25	20,75
— 4	—20,00	—16,00	— 4	— 3,2	24,8	— 4	— 5,00	23,00
— 3	—19,44	—15,55	— 3	— 2,4	26,6	— 3	— 3,75	25,25
— 2	—18,88	—15,11	— 2	— 1,6	28,4	— 2	— 2,50	27,50
— 1	—18,33	—14,66	— 1	— 0,8	30,2	— 1	— 1,25	29,75
0	—17,77	—14,22	0	0,0	32,0	0	0,00	32,00
1	—17,22	—13,77	1	0,8	33,8	1	1,25	34,25
2	—16,66	—13,33	2	1,6	35,6	2	2,50	36,50
3	—16,11	—12,88	3	2,4	37,4	3	3,75	38,75
4	—15,55	—12,44	4	3,2	39,2	4	5,00	41,00
5	—15,00	—12,00	5	4,0	41,0	5	6,25	43,25
6	—14,44	—11,55	6	4,8	42,8	6	7,50	45,50
7	—13,88	—11,11	7	5,6	44,6	7	8,75	47,75
8	—13,33	—10,66	8	6,4	46,4	8	10,00	50,00
9	—12,77	—10,22	9	7,2	48,2	9	11,25	52,25
10	—12,22	— 9,77	10	8,0	50,0	10	12,50	54,50
11	—11,66	— 9,33	11	8,8	51,8	11	13,75	56,75
12	—11,11	— 8,88	12	9,6	53,6	12	15,00	59,00
13	—10,55	— 8,44	13	10,4	55,4	13	16,25	61,25
14	—10,00	— 8,00	14	11,2	57,2	14	17,50	63,50
15	— 9,44	— 7,55	15	12,0	59,0	15	18,75	65,75
16	— 8,88	— 7,11	16	12,8	60,8	16	20,00	68,00
17	— 8,33	— 6,66	17	13,6	62,6	17	21,25	70,25
18	— 7,77	— 6,22	18	14,4	64,4	18	22,50	72,50
19	— 7,22	— 5,77	19	15,2	66,2	19	23,75	74,75
20	— 6,66	— 5,33	20	16,0	68,0	20	25,00	77,00
21	— 6,11	— 4,88	21	16,8	69,8	21	26,25	79,25
22	— 5,55	— 4,44	22	17,6	71,6	22	27,50	81,50
23	— 5,00	— 4,00	23	18,4	73,4	23	28,75	83,75

Fahr.	Cent.	R.	Cent.	R.	Fahr.	R.	Cent.	Fahr.
24	—4,44	—3,55	24	19,2	75,2	24	30,00	86,00
25	—3,88	—3,11	25	20,0	77,0	25	31,25	88,25
26	—3,33	—2,66	26	20,8	78,8	26	32,50	90,50
27	—2,77	—2,22	27	21,6	80,6	27	33,75	92,75
28	—2,22	—1,77	28	22,4	82,4	28	35,00	95,00
29	—1,66	—1,33	29	23,2	84,2	29	36,25	97,25
30	—1,11	—0,88	30	24,0	86,0	30	37,50	99,50
31	—0,55	—0,44	31	24,8	87,8	31	38,75	101,75
32	0,00	0,00	32	25,6	89,6	32	40,00	104,00
33	0,55	0,44	33	26,4	91,4	33	41,25	106,25
34	1,11	0,88	34	27,2	93,2	34	42,50	108,50
35	1,66	1,33	35	28,0	95,0	35	43,75	110,75
36	2,22	1,77	36	28,8	96,8	36	45,00	113,00
37	2,77	2,22	37	29,6	98,6	37	46,25	115,25
38	3,33	2,66	38	30,4	100,4	38	47.50	117,50
39	3,88	3,11	39	31,2	102,2	39	48,75	119,75
40	4,44	3,55	40	32,0	104,0	40	50,00	122,00
41	5,00	4,00	41	32,8	105,8	41	51,25	124,25
42	5,55	4,44	42	33,6	107,6	42	52,50	126,50
43	6,11	4,88	43	34,4	109,4	43	53,75	128,75
44	6,66	5,33	44	35,2	111,2	44	55,00	131,00
45	7,22	5,77	45	36,0	113,0	45	56,25	133,25
46	7,77	6,22	46	36,8	114,8	46	57,50	135,50
47	8,33	6,66	47	37,6	116,6	47	58,75	137,75
48	8,88	7,11	48	38,4	118,4	48	60,00	140,00
49	9,44	7,55	49	39,2	120,2	49	61,25	142,25
50	10,00	8,00	50	40,0	122,0	50	62,50	144,50
51	10,55	8,44	51	40,8	123,8	51	63,75	146,75
52	11,11	8,88	52	41,6	125,6	52	65,00	149,00
53	11,66	9,33	53	42,4	127,4	53	66,25	151,25
54	12,22	9,77	54	43,2	129,2	54	67,50	153,50
55	12,77	10,22	55	44,0	131,0	55	68,75	155,75
56	13,33	10,66	56	44,8	132,8	56	70,00	158,00
57	13,88	11,11	57	45,6	134,6	57	71,25	160,25
58	14,44	11,55	58	46,4	136,4	58	72,50	162,50
59	15,00	12,00	59	47,2	138,2	59	73,75	164,75
60	15,55	12,44	60	48,0	140,0	60	75,00	167,00
61	16,11	12,88	61	48,8	141,8	61	76,25	169,25
62	16,66	13,33	62	49,6	143,6	62	77,50	171,50
63	17,22	13,77	63	50,4	145,4	63	78,75	173,75
64	17,77	14,22	64	51,2	147,2	64	80,00	176,00
65	18,33	14,66	65	52,0	149,0	65	81,25	178,25
66	18,88	15,11	66	52,8	150,8	66	82,50	180,50
67	19,44	15,55	67	53,6	152,6	67	83,75	182,75
68	20,00	16,00	68	54,4	154,4	68	85,00	185,00
69	20,55	16,44	69	55,2	156,2	69	86,25	187,25

Fahr.	Cent.	R.	Cent.	R.	Fahr.	R.	Cent.	Fahr.
70	21,11	16,88	70	56,0	158,0	70	87,50	189,50
71	21,66	17,33	71	56,8	159,8	71	88,75	191,75
72	22,22	17,77	72	57,6	161,6	72	90,00	194,00
73	22,77	18,22	73	58,4	163,4	73	91,25	196,25
74	23,33	18,66	74	59,2	165,2	74	92,50	198,50
75	23,88	19,11	75	60,0	167,0	75	93,75	200,75
76	24,44	19,55	76	60,8	168,8	76	95,00	203,00
77	25,00	20,00	77	61,6	170,6	77	66,25	205,25
78	25,55	20,44	78	62,4	172,4	78	97,50	207,50
79	26,11	20,88	79	63,2	174,2	79	98,75	209,75
80	26,66	21,33	80	64,0	176,0	80	100,00	212,00
81	27,22	21,77	81	64,8	177,8	81	101,25	214,25
82	27,77	22,22	82	65,6	179,6	82	102,50	216,50
83	28,33	22,66	83	66,4	181,4	83	103,75	218,75
84	28,88	23,11	84	67,2	183,2	84	105,00	221,00
85	29,44	23,55	85	68,0	185,0	85	106,25	223,25
86	30,00	24,00	86	68,8	186,8	86	107,50	225,50
87	30,55	24,44	87	69,6	188,6	87	108,75	227,75
88	31,11	24,88	88	70,4	190,4	88	110,00	230,00
89	31,66	25,33	89	71,2	192,2	89	111,25	232,25
90	32,22	25,77	90	72,0	194,0	90	112,50	234,50
91	32,77	26,22	91	72,8	195,8	91	113,75	236,75
92	33,33	26,66	92	73,6	197,6	92	115,00	239,00
93	33,88	27,11	93	74,4	199,4	93	116,25	241,25
94	34,44	27,55	94	75,2	201,2	94	117,50	243,50
95	35,00	28,00	95	76,0	203,0	95	118,75	245,75
96	35,55	28,44	96	76,8	204,8	96	120,00	248,00
97	36,11	28,88	97	77,6	206,6	97	121,25	250,25
98	36,66	29,33	98	78,4	208,4	98	122,50	252,50
99	37,22	29,77	99	79,2	210,2	99	123,75	254,75
100	37,77	30,22	100	80,0	212,0	100	125,00	257,00
101	38,33	30,66	101	80,8	213,8	101	126,25	259,25
102	38,88	31,11	102	81,6	215,6	102	127,50	261,50
103	39,44	31,55	103	82,4	217,4	103	128,75	263,75
104	40,00	32,00	104	83,2	219,2	104	130,00	266,00
105	40,55	32,44	105	84,0	221,0	105	131,25	268,25
106	41,11	32,88	106	84,8	222,8	106	132,50	270,50
107	41,66	33,33	107	85,6	224,6	107	133,75	272,75
108	42,22	33,77	108	86,4	226,4	108	135,00	275,00
109	42,77	34,22	109	87,2	228,2	109	136,25	277,25
110	43,33	34,66	110	88,0	230,0	110	137,50	279,50
111	43,88	35,11	111	88,8	231,8	111	138,75	281,75
112	44,44	35,55	112	89,6	233,6	112	140,00	284,00
113	45,00	36,00	113	90,4	235,4	113	141,25	286,25
114	45,55	36,44	114	91,2	237,2	114	142,50	288,50
115	46,11	36,88	115	92,0	239,0	115	143,75	290,75

Fahr.	Cent.	R.	Cent.	R.	Fahr.	R.	Cent.	Fahr.
116	46,66	37,33	116	92,8	240,8	116	145,00	293,00
117	47,22	37,77	117	93,6	242,6	117	146,25	295,25
118	47,77	38,22	118	94,4	244,4	118	147,50	297,50
119	48,33	38,66	119	95,2	246,2	119	148,75	299,75
120	48,88	39,11	120	96,0	248,0	120	150,00	302,00
121	49,44	39,55	121	96,8	249,8	121	151,25	304,25
122	50,00	40,00	122	97,6	251,6	122	152,50	306,50
123	50,55	40,44	123	98,4	253,4	123	153,75	308,75
124	51,11	40,88	124	99,2	255,2	124	155,00	311,00
125	51,66	41,33	125	100,0	257,0	125	156,25	313,25
126	52,22	41,77	126	100,8	258,8	126	157,50	315,50
127	52,77	42,22	127	101,6	260,6	127	158,75	317,75
128	53,33	42,66	128	102,4	262,4	128	160,00	320,00
129	53,88	43,11	129	103,2	264,2	129	161,25	322,25
130	54,44	43,55	130	104,0	266,0	130	162,50	324,50
131	55,00	44,00	131	104,8	267,8	131	163,75	326,75
132	55,55	44,44	132	105,6	269,6	132	165,00	329,00
133	56,11	44,88	133	106,4	271,4	133	166,25	331,25
134	56,66	45,33	134	107,2	273,2	134	167,50	333,50
135	57,22	45,77	135	108,0	275,0	135	168,75	335,75
136	57,77	46,22	136	108,8	276,8	136	170,00	338,00
137	58,33	46,66	137	109,6	278,6	137	171,25	340,25
138	58,88	47,11	138	110,4	280,4	138	172,50	342,50
139	59,44	47,55	139	111,2	282,2	139	173,75	344,75
140	60,00	48,00	140	112,0	284,0	140	175,00	347,00
141	60,55	48,44	141	112,8	285,8	141	176,25	349,25
142	61,11	48,88	142	113,6	287,6	142	177,50	351,50
143	61,66	49,33	143	114,4	289,4	143	178,75	353,75
144	62,22	49,77	144	115,2	291,2	144	180,00	356,00
145	62,77	50,22	145	116,0	293,0	145	181,25	358,25
146	63,33	50,66	146	116,8	294,8	146	182,50	360,50
147	63,88	51,11	147	117,6	296,6	147	183,75	362,75
148	64,44	51,55	148	118,4	298,4	148	185,00	365,00
149	65,00	52,00	149	119,2	300,2	149	186,25	367,25
150	65,55	52,44	150	120,0	302,0	150	187,50	369,50
151	66,11	52,88	151	120,8	303,8	151	188,75	371,75
152	66,66	53,33	152	121,6	305,6	152	190,00	374,00
153	67,22	53,77	153	122,4	307,4	153	191,25	376,25
154	67,77	54,22	154	123,2	309,2	154	192,50	378,50
155	68,33	54,66	155	124,0	311,0	155	193,75	380,75
156	68,88	55,11	156	124,8	312,8	156	195,00	383,00
157	69,44	55,55	157	125,6	314,6	157	196,25	385,25
158	70,00	56,00	158	126,4	316,4	158	197,50	387,50
159	70,55	56,44	159	127,2	318,2	159	198,75	389,75
160	71,11	56,88	160	128,0	320,0	160	200,00	392,00
161	71,66	57,33	161	128,8	321,8	161	201,25	394,25

Fahr.	Cent.	R.	Cent.	R.	Fahr.	R.	Cent.	Fahr.
162	72,22	57,77	162	129,6	323,6	162	202,50	396,50
163	72,77	58,22	163	130,4	325,4	163	203,75	398,75
164	73,33	58,66	164	131,2	327,2	164	205,00	401,00
165	73,88	59,11	165	132,0	329,0	165	206,25	403,25
166	74,44	59,55	166	132,8	330,8	166	207,50	405,50
167	75,00	60,00	167	133,6	332,6	167	208,75	407,75
168	75,55	60,44	168	134,4	334,4	168	210,00	410,00
169	76,11	60,88	169	135,2	336,2	169	211,25	412,25
170	76,66	61,33	170	136,0	338,0	170	212,50	414,50
171	77,22	61,77	171	136,8	339,8	171	213,75	416,75
172	77,77	62,22	172	137,6	341,6	172	215,00	419,00
173	78,33	62,66	173	138,4	343,4	173	216,25	421,25
174	78,88	63,11	174	139,2	345,2	174	217,50	423,50
175	79,44	63,55	175	140,0	347,0	175	218,75	425,75
176	80,00	64,00	176	140,8	348,8	176	220,00	428,00
177	80,55	64,44	177	141,6	350,6	177	221,25	430,25
178	81,11	64,88	178	142,4	352,4	178	222,50	432,50
179	81,66	65,33	179	143,2	354,2	179	223,75	434,75
180	82,22	65,77	180	144,0	356,0	180	225,00	437,00
181	82,77	66,22	181	144,8	357,8	181	226,25	439,25
182	83,33	66,66	182	145,6	359,6	182	227,50	441,50
183	83,88	67,11	183	146,4	361,4	183	228,75	443,75
184	84,44	67,55	184	147,2	363,2	184	230,00	446,00
185	85,00	68,00	185	148,0	365,0	185	231,25	448,25
186	85,55	68,44	186	148,8	366,8	186	232,50	450,50
187	86,11	68,88	187	149,6	368,6	187	233,75	452,75
188	86,66	69,33	188	150,4	370,4	188	235,00	455,00
189	87,22	69,77	189	151,2	372,2	189	236,25	457,25
190	87,77	70,22	190	152,0	374,0	190	237,50	459,50
191	88,33	70,66	191	152,8	375,8	191	238,75	461,75
192	88,88	71,11	192	153,6	377,6	192	240,00	464,00
193	89,44	71,55	193	154,4	379,4	193	241,25	466,25
194	90,00	72,00	194	155,2	381,2	194	242,50	468,50
195	90,55	72,44	195	156,0	383,0	195	243,75	470,75
196	91,11	72,88	196	156,8	384,8	196	245,00	473,00
197	91,66	73,33	197	157,6	386,6	197	246,25	475,25
198	92,22	73,77	198	158,4	388,4	198	247,50	477,50
199	92,77	74,22	199	159,2	390,2	199	248,75	479,75
200	93,33	74,66	200	160,0	392,0	200	250,00	482,00
201	93,88	75,11	201	160,8	393,8	201	251,25	484,25
202	94,44	75,55	202	161,6	395,6	202	252,50	486,50
203	95,00	76,00	203	162,4	397,4	203	253,75	488,75
204	95,55	76,44	204	163,2	399,2	204	255,00	491,00
205	96,11	76,88	205	164,0	401,0	205	256,25	493,25
206	96,66	77,33	206	164,8	402,8	206	257,50	495,50
207	97,22	77,77	207	165,6	404,6	207	258,75	497,75

Fahr.	Cent.	R.	Cent.	R.	Fahr.	R.	Cent.	Fahr.
208	97,77	78,22	208	166,4	406,4	208	260,00	500,00
209	98,33	78,66	209	167,2	408,2	209	261,25	502,25
210	98,88	79,11	210	168,0	410,0	210	262,50	504,50
211	99,44	79,55	211	168,8	411,8	211	263,75	506,75
212	100,00	80,00	212	169,6	413,6	212	265,00	509,00
213	100,55	80,44	213	170,4	415,4	213	266,25	511,25
214	101,11	80,88	214	171,2	417,2	214	267,50	513,50
215	101,66	81,33	215	172,0	419,0	215	268,75	515,75
216	102,22	81,77	216	172,8	420,8	216	270,00	518,00
217	102,77	82,22	217	173,6	422,6	217	271,25	520,25
218	103,33	82,66	218	174,4	424,4	218	272,50	522,50
219	103,88	83,11	219	175,2	426,2	219	273,75	524,75
220	104,44	83,55	220	176,0	428,0	220	275,00	527,00
221	105,00	84,00	221	176,8	429,8	221	276,25	529,25
222	105,55	84,44	222	177,6	431,6	222	277,50	531,50
223	106,11	84,88	223	178,4	433,4	223	278,75	533,75
224	106,66	85,33	224	179,2	435,2	224	280,00	536,00
225	107,22	85,77	225	180,0	437,0	225	281,25	538,25
226	107,77	86,22	226	180,8	438,8	226	282,50	540,50
227	108,33	86,66	227	181,6	440,6	227	283,75	542,75
228	108,88	87,11	228	182,4	442,4	228	285,00	545,00
229	109,44	87,55	229	183,2	444,2	229	286,25	547,25
230	110,00	88,00	230	184,0	446,0	230	287,50	549,50
231	110,55	88,44	231	184,8	447,8	231	288,75	551,75
232	111,11	88,88	232	185,6	449,6	232	290,00	554,00
233	111,66	89,33	233	186,4	451,4	233	291,25	556,25
234	112,22	89,77	234	187,2	453,2	234	292,50	558,50
235	112,77	90,22	235	188,0	455,0	235	293,75	560,75
236	113,33	90,66	236	188,8	456,8	236	295,00	563,00
237	113,88	91,11	237	189,6	458,6	237	296,25	565,25
238	114,44	91,55	238	190,4	460,4	238	297,50	567,50
239	115,00	92,00	239	191,2	462,2	239	298,75	569,75
240	115,55	92,44	240	192,0	464,0	240	300,00	572,00
241	116,11	92,88	241	192,8	465,8	241	301,25	574,25
242	116,66	93,33	242	193,6	467,6	242	302,50	576,50
243	117,22	93,77	243	194,4	469,4	243	303,75	578,75
244	117,77	94,22	244	195,2	471,2	244	305,00	581,00
245	118,33	94,66	245	196,0	473,0	245	306,25	583,25
246	118,88	95,11	246	196,8	474,8	246	307,50	585,50
247	119,44	95,55	247	197,6	476,6	247	308,75	587,75
248	120,00	96,00	248	198,4	478,4	248	310,00	590,00
249	120,55	96,44	249	199,2	480,2	249	311,25	592,25
250	121,11	96,88	250	200,0	482,0	250	312,50	594,50
251	121,66	97,33	251	200,8	483,8	251	313,75	596,75
252	122,22	97,77	252	201,6	485,6	252	315,00	599,00
253	122,77	98,22	253	202,4	487,4	253	316,25	601,25

Fahr.	Cent.	R.	Cent.	R.	Fahr.	R.	Cent.	Fahr.
254	123,33	98,66	254	203,2	489,2	254	317,50	603,50
255	123,88	99,11	255	204,0	491,0	255	318,75	605,75
256	124,44	99,55	256	204,8	492,8	256	320,00	608,00
257	125,00	100,00	257	205,6	494,6	257	321,25	610,25
258	125,55	100,44	258	206,4	496,4	258	322,50	612,50
259	126,11	100,88	259	207,2	498,2	259	323,75	614,75
260	126,66	101,33	260	208,0	500,0	260	325,00	617,00
261	127,22	101,77	261	208,8	501,8	261	326,25	619,25
262	127,77	102,22	262	209,6	503,6	262	327,50	621,50
263	128,33	102,66	263	210,4	505,4	263	328,75	623,75
264	128,88	103,11	264	211,2	507,2	264	330,00	626,00
265	129,44	103,55	265	212,0	509,0	265	331,25	628,25
266	130,00	104,00	266	212,8	510,8	266	332,50	630,50
267	130,55	104,44	267	213,6	512,6	267	333,75	632,75
268	131,11	104,88	268	214,4	514,4	268	335,00	635,00
269	131,66	105,33	269	215,2	516,2	269	336,25	637,25
270	132,22	105,77	270	216,0	518,0	270	337,50	639,50
271	132,77	106,22	271	216,8	519,8	271	338,75	641,75
272	133,33	106,66	272	217,6	521,6	272	340,00	644,00
273	133,88	107,11	273	218,4	523,4	273	341,25	646,25
274	134,44	107,55	274	219,2	525,2	274	342,50	648,50
275	135,00	108,00	275	220,0	527,0	275	343,75	650,75
276	135,55	108,44	276	220,8	528,8	276	345,00	653,00
277	136,11	108,88	277	221,6	530,6	277	346,25	655,25
278	136,66	109,33	278	222,4	532,4	278	347,50	657,50
279	137,22	109,77	279	223,2	534,2	279	348,75	659,75
280	137,77	110,22	280	224,0	536,0	280	350,00	662,00
281	138,33	110,66	281	224,8	537,8	281	351,25	664,25
282	138,88	111,11	282	225,6	539,6	282	352,50	666,50
283	139,44	111,55	283	226,4	541,4	283	353,75	668,75
284	140,00	112,00	284	227,2	543,2	284	355,00	671,00
285	140,55	112,44	285	228,0	545,0	285	356,25	673,25
286	141,11	112,88	286	228,8	546,8	286	357,50	675,50
287	141,66	113,33	287	229,6	548,6	287	358,75	677,75
288	142,22	113,77	288	230,4	550,4	288	360,00	680,00
289	142,77	114,22	289	231,2	552,2	289	361,25	682,25
290	143,33	114,66	290	232,0	554,0	290	362,50	684,50
291	143,88	115,11	291	232,8	555,8	291	363,75	686,75
292	144,44	115,55	292	233,6	557,6	292	365,00	689,00
293	145,00	116,00	293	234,4	559,4	293	366,25	691,25
294	145,55	116,44	294	235,2	561,2	294	367,50	693,50
295	146,11	116,88	295	236,0	563,0	295	368,75	695,75
296	146,66	117,33	296	236,8	564,8	296	370,00	698,00
297	147,22	117,77	297	237,6	566,6	297	371,25	700,25
298	147,77	118,22	298	238,4	568,4	298	372,50	702,50
299	148,33	118,66	299	239,2	570,2	299	373,75	704,75

Fahr.	Cent.	R.	Cent.	R.	Fahr.	R.	Cent.	Fahr.
300	148,88	119,11	300	240,0	572,0	300	375,00	707,00
301	149,44	119,55	301	240,8	573,8	301	376,25	709,25
302	150,00	120,00	302	241,6	575,6	302	377,50	711,50
303	150,55	120,44	303	242,4	577,4	303	378,75	713,75
304	151,11	120,88	304	243,2	579,2	304	380,00	716,00
305	151,66	121,33	305	244,0	581,0	305	381,25	718,25
306	152,22	121,77	306	244,8	582,8	306	382,50	720,50
307	152,77	122,22	307	245,6	584,6	307	383,75	722,75
308	153,33	122,66	308	246,4	586,4	308	385,00	725,00
309	153,88	123,11	309	247,2	588,2	309	386,25	727,25
310	154,44	123,55	310	248,0	590,0	310	387,50	729,50
311	155,00	124,00	311	248,8	591,8	311	388,75	731,75
312	155,55	124,44	312	249,6	593,6	312	390,00	734,00
313	156,11	124,88	313	250,4	595,4	313	391,25	736,25
314	156,66	125,33	314	251,2	597,2	314	392,50	738,50
315	157,22	125,77	315	252,0	599,0	315	393,75	740,75
316	157,77	126,22	316	252,8	600,8	316	395,00	743,00
317	158,33	126,66	317	253,6	602,6	317	396,25	745,25
318	158,88	127,11	318	254,4	604,4	318	397,50	747,50
319	159,44	127,55	319	255,2	606,2	319	398,75	749,75
320	160,00	128,00	320	256,0	608,0	320	400,00	752,00
321	160,55	128,44	321	256,8	609,8	321	401,25	754,25
322	161,11	128,88	322	257,6	611,6	322	402,50	756,50
323	161,66	129,33	323	258,4	613,4	323	403,75	758,75
324	162,22	129,77	324	259,2	615,2	324	405,00	761,00
325	162,77	130,22	325	260,0	617,0	325	406,25	763,25
326	163,33	130,66	326	260,8	618,8	326	407,50	765,50
327	163,88	131,11	327	261,6	620,6	327	408,75	767,75
328	164,44	131,55	328	262,4	622,4	328	410,00	770,00
329	165,00	132,00	329	263,2	624,2	329	411,25	772,25
330	165,55	132,44	330	264,0	626,0	330	412,50	774,50
331	166,11	132,88	331	264,8	627,8	331	413,75	776,75
332	166,66	133,33	332	265,6	629,6	332	415,00	779,00
333	167,22	133,77	333	266,4	631,4	333	416,25	781,25
334	167,77	134,22	334	267,2	633,2	334	417,50	783,50
335	168,33	134,66	335	268,0	635,0	335	418,75	785,75
336	168,88	135,11	336	268,8	636,8	336	420,00	788,00
337	169,44	135,55	337	269,6	638,6	337	421,25	790,25
338	170,00	136,00	338	270,4	640,4	338	522,50	792,50
339	170,55	136,44	339	271,2	642,2	339	423,75	794,75
340	171,11	136,88	340	272,0	644,0	340	425,00	797,00
341	171,66	137,33	341	272,8	645,8	341	426,25	799,25
342	172,22	137,77	342	273,6	647,6	342	427,50	801,50
343	172,77	138,22	343	274,4	649,4	343	428,75	803,75
344	173,33	138,66	344	275,2	651,2	344	430,00	806,00
345	173,88	139,11	345	276,0	653,0	345	431,25	808,25

Fahr.	Cent.	R.	Cent.	R.	Fahr.	R.	Cent.	Fahr.
346	174,44	139,55	346	276,8	654,8	346	432,50	810,50
347	175,00	140,00	347	277,6	656,6	347	433,75	812,75
348	175,55	140,44	348	278,4	658,4	348	435,00	815,00
349	176,11	140,88	349	279,2	660,2	349	436,25	817,25
350	176,66	141,33	350	280,0	662,0	350	437,50	819,50

II. Tabelle zur Reduction der Thermometergrade für sich genommen.

Fahr.	Cent.	R.	Cent.	Fahr.	R.	Fahr.
1	0,55	0,44	1	1,8	1	2,25
2	1,11	0,88	2	3,6	2	4,50
3	1,66	1,33	3	5,4	3	6,75
4	2,22	1,77	4	7,2	4	9,00
5	2,77	2,22	5	9,0	5	11,25
6	3,33	2,66	6	10,8	6	13,50
7	3,88	3,11	7	12,6	7	15,75
8	4,44	3,55	8	14,4	8	18,00
9	5,00	4,00	9	16,2	9	20,25
10	5,55	4,44	10	18,0	10	22,50
11	6,11	4,88	11	19,8	11	24,75
12	6,66	5,33	12	21,6	12	27,00
13	7,22	5,77	13	23,4	13	29,25
14	7,77	6,22	14	25,2	14	31,50
15	8,33	6,66	15	27,0	15	33,75
16	8,88	7,11	16	28,8	16	36,00
17	9,44	7,55	17	30,6	17	38,25
18	10,00	8,00	18	32,4	18	40,50
19	10,55	8,44	19	34,2	19	42,75
20	11,11	8,88	20	36,0	20	45,00
21	11,66	9,33	21	37,8	21	47,25
22	12,22	9,77	22	39,6	22	49,50
23	12,77	10,22	23	41,4	23	51,75
24	13,33	10,66	24	43,2	24	54,00
25	13,88	11,11	25	45,0	25	56,25
26	14,44	11,55	26	46,8	26	58,50
27	15,00	12,00	27	48,6	27	60,75
28	15,55	12,44	28	50,4	28	63,00
29	16,11	12,88	29	52,2	29	65,25
30	16,66	13,33	30	54,0	30	67,50
31	17,22	13,77	31	55,8	31	69,75
32	17,77	14,22	32	57,6	32	72,00

Fahr.	Cent.	R.	Cent.	Fahr.	R.	Fahr.
33	18,33	14,66	33	59,4	33	74;25
34	18,88	15,11	34	61,2	34	76,50
35	19,44	15,55	35	63,0	35	78,75
36	20,00	16,00	36	64,8	36	81,00
37	20,55	16,44	37	66,6	37	83,25
38	21,11	16,88	38	68,4	38	85,50
39	21,66	17,33	39	70,2	39	87,75
40	22,22	17,77	40	72,0	40	90,00
41	22,77	18,22	41	73,8	41	92,25
42	23,33	18,66	42	75,6	42	94,50
43	23,88	19,11	43	77,4	43	96,75
44	24,44	19,55	44	79,2	44	99,00
45	25,00	20,00	45	81,0	45	101,25
46	25,55	20,44	46	82,8	46	103,50
47	26,11	20,88	47	84,6	47	105,75
48	26,66	21,33	48	86,4	48	108,00
49	27,22	21,77	49	88,2	49	110,25
50	27,77	22,22	50	90,0	50	112,50
51	28,33	22,66	51	91,8	51	114,75
52	28,88	23,11	52	93,6	52	117,00
53	29,44	23,55	53	95,4	53	119,25
54	30,00	24,00	54	97,2	54	121,50
55	30,55	24,44	55	99,0	55	123,75
56	31,11	24,88	56	100,8	56	126,00
57	31,66	25,33	57	102,6	57	128,25
58	32,22	25,77	58	104,4	58	130,50
59	32,77	26,22	59	106,2	59	132,75
60	33,33	26,66	60	108,0	60	135,00
61	33,88	27,11	61	109,8	61	137,25
62	34,44	27,55	62	111,6	62	139,50
63	35,00	28,00	63	113,4	63	141,75
64	35,55	28,44	64	115,2	64	144,00
65	36,11	28,88	65	117,0	65	146,25
66	36,66	29,33	66	118,8	66	148,50
67	37,22	29,77	67	120,6	67	150,75
68	37,77	30,22	68	122,4	68	153,00
69	38,33	30,66	69	124,2	69	155,25
70	38,88	31,11	70	126,0	70	157,50
71	39,44	31,55	71	127,8	71	159,75
72	40,00	32,00	72	129,6	72	162,00
73	40,55	32,44	73	131,4	73	164,25
74	41,11	32,88	74	133,2	74	166,50
75	41,66	33,33	75	135,0	75	168,75
76	42,22	33,77	76	136,8	76	171,00
77	42,77	34,22	77	138,6	77	173,25
78	43,33	34,66	78	140,4	78	175,50

Fahr.	Cent.	R.	Cent.	Fahr.	R.	Fahr.
79	43,88	35,11	79	142,2	79	177,75
80	44,44	35,55	80	144,0	80	180,00
81	45,00	36,00	81	145,8	81	182,25
82	45,55	36,44	82	147,6	82	184,50
83	46,11	36,88	83	149,4	83	186,75
84	46,66	37,33	84	151,2	84	189,00
85	47,22	37,77	85	153,0	85	191,25
86	47,77	38,22	86	154,8	86	193,50
87	48,33	38,66	87	156,6	87	195,75
88	48,88	39,11	88	158,4	88	198,00
89	49,44	39,55	89	160,2	89	200,25
90	50,00	40,00	90	162,0	90	202,50
91	50,55	40,44	91	163,8	91	204,75
92	51,11	40,88	92	165,6	92	207,00
93	51,66	41,33	93	167,4	93	209,25
94	52,22	41,77	94	169,2	94	211,50
95	52,77	42,22	95	171,0	95	213,75
96	53,33	42,66	96	172,8	96	216,00
97	53,88	43,11	97	174,6	97	218,25
98	54,44	43,55	98	176,4	98	220,50
99	55,00	44,00	99	178,2	99	222,75
100	55,55	44,44	100	180,0	100	225,00

42) Bei den vorstehenden Tabellen ist noch zu bemerken, daſs die Decimalbrüche für die Reductionen der Fahrenheit'schen Grade auf centesimale und achtzigtheilige unendliche Reihen gleicher fortlaufender Zahlen bilden, die man also willkürlich weit fortsetzen kann. Es betragen also z. B. in der ersten Tabelle 60° F. nicht, wie in der Tabelle steht, 15°,55 C. und 12°,44 R., sondern 15°,55555 .... C. und 12°,44444 .... R. und ebenso in der zweiten 60° F. nicht 33°,33 C. und 26°,66 R., sondern 33°,33333 .... C. und 26°,66666 .... R. Die zweite Tabelle kann daher auch für solche Fälle benutzt werden, in denen noch gröſsere Mengen von Graden zu reduciren sind. Wenn es also z. B. hieſse, der Temperaturunterschied zwischen dem Gefrierpuncte und dem Siedepuncte des Quecksilbers betrage 650 Grade nach FAHRENHEIT[1], so giebt

1 Eine hiervon verschiedene Aufgabe wäre, wenn man 650° F. oder 650 Grade der Fahrenheit'schen Thermometerscale auf die Centesimal- oder Reaumür'sche Scale reduciren wollte, denn diese wür-

die Tabelle für 65 Grade F. 36,11 C. und 28,88 R., mithin würden 650 Grade F. 361,111... C. und 288,888.. R. betragen. Liegt der Gefrierpunct des Quecksilbers bei — 39° C. und sein Siedepunct bei 350° C., so beträgt das Intervall der Wärme 389 Grade der Centesimalscale. Sollen diese auf Reaumür'sche und Fahrenheit'sche reducirt werden, so giebt für Reaumür'sche Grade die erste Tabelle

350° C.	=	280°,0 R.
39 C.	=	31,2 R.
389 C.	=	311,2 R.,

für Fahrenheit'sche Grade aber die zweite Tabelle

350 Cent. Grade	=	630,0 Fahr. Grade
39 — —	=	70,2 — —
389 — —	=	700,2 — —

Die Tabellen können auch gebraucht werden, um die Decimalbrüche der verschiedenen Scalengrade auf einander zu reduciren, und es bedarf also hierzu keiner besondern Tabelle; aus der ersten Tabelle sind die Werthe für die Reduction der Cent. auf R. Grade und umgekehrt zu entnehmen, aus der zweiten für die Reduction der Fahrenheit'schen Grade auf die beiden andern Scalen und umgekehrt; denn da 1 Grad F. = 0,55 Grad Cent. und 0,44 Grad R. ist, so mufs 0,1 Grad F. = 0,055 Grad Cent. und 0,044 Grad R. seyn u. s. w. Es sey daher 16,73 Grad Cent. auf Grade R. zu reduciren, so hat man nach der ersten Tabelle:

16,00 Grad Cent.	=	12,8 Grad R.
0,70 — —	=	0,56 — —
0,03 — —	=	0,024 — —
16,73 — —	=	13,384 — —

und wenn 125,32 Grade Fahr. auf Cent. und R. Grade zu reduciren sind, so hat man nach der zweiten Tabelle

100 Grad Fahr.	=	55,5555 Grad Cent.	und	44,4444 Grad R.
25 — —	=	13,8888 — —	—	11,1111 — —
0,32 — —	=	0,1777 — —	—	0,1444 — —
125,32 — —	=	69,6222 — —	—	55,7 — —

den (650 — 32) $\frac{5}{9}$ C. und (650 — 32) $\frac{4}{9}$ R. = 343,33 C. und 274,66 R. betragen, wie aus der ersten Tabelle zu ersehen, wenn man aus den Columnen für Cent. und R. Grade die zugehörigen nach Fahr. sucht.

Das Null der Thermometerscalen bezeichnet kein absolutes Null, und somit sind auch die negativen Grade keine eigentlichen negativen Gröfsen, wie denn überhaupt eine negative Wärme nicht existiren kann, sofern dieses einen Zustand der Körper anzeigen würde, in welchem eine positive Gröfse hinzukommen oder eine negative abgezogen werden müfste, um das wirkliche Null, die Abwesenheit aller Wärme, hervorzubringen, was nicht wohl vorstellbar ist. Das Null der Thermometerscalen ist vielmehr ein willkürlich angenommener Punct der Temperatur, von wo an die Zunahmen der Wärme gezählt werden. Bei verschiedenen Aufgaben mufs dieses wohl berücksichtigt werden; ob es aber einen eigentlichen Nullpunct der Wärme gebe und wohin derselbe zu setzen sey, wird im Art. *Wärme* untersucht werden.

F. Correctionen des Thermometers.

43) Es wird jetzt allgemein angenommen, dafs alle Thermometer, sobald sie zu genauen Messungen dienen sollen, corrigirt, und zwar nicht nach einem bestimmten Gesetze, wie z. B. wegen ihrer Abweichung von einer eigentlichen, nur durch Luftthermometer möglichen, genauen Messung der Temperaturen reducirt, sondern als ganz eigentlich fehlerhafte Apparate wegen mehrerer Unrichtigkeiten verbessert werden müssen, wodurch die nur scheinbar vorhandene Bequemlichkeit, die gesuchten Werthe ohne weitere Reduction durch blofses Ablesen zu erhalten, gänzlich wegfällt. Die Prüfung soll ferner durch die Physiker selbst vorgenommen und durch diese sollen dann die erforderlichen Correctionen aufgefunden werden, denen sich zwar Geschicklichkeit in der Manipulation der Instrumente und, wie sich dieses von selbst versteht, durch viele Uebung erlangte Genauigkeit und Schärfe im Beobachten und Messen aller Art im Allgemeinen nicht absprechen läfst, die jedoch in Beziehung auf die vorliegende specielle Aufgabe der Behandlung von Thermometern solchen Künstlern nothwendig nachstehn müssen, die sich mit diesem individuellen Gegenstande anhaltend beschäftigt haben. Nach mehreren eigenen Erfahrungen hat es mir daher mitunter geschienen, als würden bei den jetzt allgemein für nothwendig erachteten Ver-

besserungen der Thermometer zuweilen Fehler hineincorrigirt, die ursprünglich nicht vorhanden waren. Es versteht sich dabei wohl von selbst, dafs nur von vorzüglich guten, aus den Händen geübter und gewissenhafter Künstler kommenden Thermometern die Rede seyn kann, denn die Richtigkeit der gewöhnlichen Apparate dieser Art wird kein Sachkenner nur vorauszusetzen wagen. So viel ist aber wohl gewifs, dafs die Naturforscher eigentlich berechtigt wären, von den Künstlern, die durch viele Uebung nothwendig eine gröfsere Fertigkeit in diesen speciellen Operationen erlangen müssen, genaue und fehlerfreie Thermometer zu verlangen, wogegen letztere gerechte Ansprüche haben, ihre Mühe belohnt zu erhalten, da es unmöglich ist, für etwa zwei Gulden oder gar einen Thaler einen viele Zeit und Mühe erfordernden Apparat dieser Art zu erstehn. Wir wollen indefs die einzelnen Fehler und die dafür erforderlichen Correctionen näher untersuchen, woraus dann die Gründe für die eben aufgestellen Behauptungen hervorgehn werden.

44) *Verrückung des Gefrierpunctes.* Aus der Construction der Thermometer erhellt, dafs vor allen Dingen die beiden festen Puncte im höchsten Grade zuverlässig seyn müssen, und man nahm dieses auch als wirklich bestehend an, mindestens bei guten Thermometern, bis Gourdon[1] den Nullpunct bei verschiedenen, mehrere Jahre alten Thermometern controlirte und ihn bei Quecksilberthermometern um 0°,5 bis sogar 1° C. zu hoch fand, bei Weingeistthermometern dagegen fast unmerklich. Die Ursache dieses constanten Fehlers suchte er in einem geringen Antheile von Luft, welcher seiner Ansicht nach beim Auskochen dieser Apparate zurückbleiben, sich nachher vom Quecksilber trennen und dadurch das Volumen desselben vergröfsern sollte. Pictet[2] bestätigte die Thatsache, auch fand man bei dem berühmten Thermometer im Keller der Pariser Sternwarte den Gefrierpunct nicht mehr richtig[3]. Auch Flaugergues[4] fand durch sorgfältige Prüfung diesen Fehler, jedoch nur bei oben verschlossenen Thermometern, statt dafs er sich

1 Biblioth. univ. T. XIX. p. 154.
2 Ebend. T. XIX. p. 62.
3 Brugnatelli Giorn. di Fis. 1821. p. 341.
4 Biblioth. univ. T. XX. p. 117.

bei solchen nicht zeigte, bei denen man unterlassen hatte, sie luftleer zu machen. In Gemäſsheit dieser Erfahrungen stellte er die von GOURDON gegebene Erklärung in Zweifel, zugleich auch aus dem triftigen Grunde, weil die Luft sich vom Weingeiste schwieriger als vom Quecksilber gänzlich entfernen lasse und daher die mit dieser Flüssigkeit gefüllten Thermometer noch gröſsere Unrichtigkeiten zeigen müſsten; wozu man noch setzen könnte, daſs durch die ausgeschiedene Luft, sofern sie sich als frei stärker ausdehnt, der Siedepunct noch mehr verrückt werden müſste. Dagegen glaubte er den Fehler aus dem Drucke der Luft auf die Auſsenfläche der luftleeren Thermometer ableiten zu müssen, sofern das elastische Glas diesem nachgebe und der Fehler sich daher durch die Länge der Zeit vergröſsere, weswegen er rieth, die Thermometer nicht mehr luftleer herzustellen, und das obere Ende der Röhre nicht zuzuschmelzen, sondern durch übergebundenes Leder gegen eindringenden Staub und einen Verlust von Quecksilber zu schützen. Weitläuftige Untersuchungen, sowohl über die Richtigkeit der Thatsache, als auch die Ursachen dieses Fehlers, stellte BELLANI[1] an, fand die Sache allerdings bestätigt, getraute sich aber nicht, über die Richtigkeit der einen oder der anderen der gegebenen Erklärungen mit Bestimmtheit zu entscheiden. Um dieselbe Zeit prüfte v. YELIN[2] nicht weniger als 21 zum Theil ältere Thermometer, und fand nur bei einem derselben die Lage des Gefrierpunctes ganz richtig, bei dreien lag er etwas zu tief, bei allen übrigen zu hoch, und zwar so sehr, daſs das Maximum des Fehlers 2°,5 C. betrug. Der Grund dieses Fehlers ist nach ihm theils im Luftdrucke, theils in einer Art von Krystallisation der schnell erkaltenden Kugel zu suchen. Das gröſste Ansehn erhielten die genauen und ausgedehnten Versuche von DE LA RIVE und MARCET[3], welche nicht bloſs den constanten Fehler der Thermometer durch das gewöhnliche Einsenken in schmelzenden Schnee bestätigt fanden, sondern auch die Ursache dieser Unrichtigkeit dadurch nachwiesen, daſs sie dieselben unter der Luftpumpe abwechselnd dem äuſsern Luftdrucke aussetzten und ihm ent-

1 Brugnatelli Giorn. di Fis. T. XV. p. 268. Bibl. univ. T. XXI. p. 252. 330.

2 Kastner's Archiv. Th. III. S. 109.

3 Bibl. univ. T. XXII. p. 265.

zogen, wobei sie im ersten Falle den Nullpunct allezeit tiefer, im zweiten aber höher liegend fanden. Seitdem sind fast alle Physiker dieser Ansicht beigetreten, haben gröfsere oder geringere Abweichungen der durch sie geprüften Thermometer wahrgenommen und den Luftdruck als Ursache derselben nicht weiter in Zweifel gezogen. Sabine[1] unter Andern untersuchte das bei seinen Pendelmessungen gebrauchte höchst genaue Thermometer gleichfalls unter der Luftpumpe und fand seinen Nullpunct 0°,78 F. zu hoch liegend, bei gewöhnlichen Thermometern ergab die Prüfung einen mittleren Fehler von 1° F., wenn die Kugel die im Ganzen übliche Dicke hat. Drei von Egen[2] untersuchte Thermometer zeigten nach dem Abbrechen der Spitzen eine Erniedrigung des Eispunctes von 0°,205; 0°,080; 0°,369 C. Einen indirecten Beweis, dafs der Luftdruck den Stand des Quecksilbers im Thermometer zu ändern im Stande seyn müsse, giebt Rudberg[3] durch die gemachte Erfahrung, dafs man die Thermometerkugel, nachdem sie durch einen schlechten Leiter, z. B. mehrmals umgelegtes Papier, gegen den Einflufs der Wärme der Hand geschützt ist, mit den Fingern zusammendrücken und den Quecksilberfaden zum Steigen bringen kann. Poggendorff bemerkt dabei, dafs sich die Erscheinung am auffallendsten an den, zu wissenschaftlichen Untersuchungen allerdings wenig gebräuchlichen, Thermometern mit platten cylindrischen Behältern zeige, man kann sie aber auch an Thermometern mit cylindrischen oder bauchigen Behältern und selbst an Kugeln, wenn sie etwas grofs sind, sichtbar machen und bedarf dazu einer Umlegung derselben mit Papier nicht, die obendrein das feinere Fühlen der Stärke des Drucks hindert, indem es leicht ist, das obere Ende des Quecksilberfadens durch momentanes wechselndes Drücken in eine hüpfende Bewegung zu bringen. Einen directen Beweis liefern ferner Egen's[4] Versuche, welcher vermittelst eines eigenen Apparates drei Thermometer einem wachsenden Quecksilberdrucke aussetzte und die Verrückung des Frostpunctes den Höhen der drückenden Quecksilbersäule

1 Philos. Trans. 1829. p. 215. 1831. p. 460.
2 Poggendorff Ann. IX. 349.
3 Ebend. XL. 46.
4 Ebend. XI. 353.

direct und der Glasdicke der Kugeln umgekehrt proportional fand. Rudberg erwähnt aufserdem, dafs Thermometer, die viele Grade unter Null angeben und in denen also ein langer Quecksilberfaden in der Röhre vorhanden ist, in verticaler Lage niedriger stehn, als in horizontaler. Bei gewöhnlichen Thermometern kann dieser Unterschied nur ein geringer seyn, es zeigte sich aber ein sehr grofser, als ich den Versuch mit den langen, in die Erde zu grabenden Thermometern anstellte, deren eins eine Quecksilbersäule von 72 Par. Zoll enthält[1], und betrug über 0°,75 R. Eine Reihe specieller Versuche ist diesem Gegenstande später durch Egen[2] gewidmet worden. Er liefs sich einen geeigneten Apparat verfertigen, um die dem Dampfe des siedenden Wassers ausgesetzten Thermometer abwechselnd in horizontaler, in verticaler Lage und bei 30° Neigung zu beobachten, verglich ihre Stände hierbei mit denen, die sie in gleichen Lagen bei mittlerer Temperatur und im schmelzenden Schnee zeigten, und fand durch Messung der Länge des in den Röhrchen bei diesen verschiedenen Wärmegraden enthaltenen Quecksilberfadens, dafs die verursachten Depressionen im Ganzen den Druckhöhen proportional sind und sich den hydrostatischen Gesetzen gemäfs verhalten. Werden die Thermometer, wie meistens der Fall ist, in verticaler Richtung beobachtet, in welcher auch ihre festen Puncte bestimmt wurden, so gleicht sich dieser Fehler von selbst aus, bei horizontaler Lage aber mufs er berücksichtigt werden, auch ergiebt sich aus den Versuchen, dafs selbst eine Veränderung des äufsern Luftdruckes von 1 Zoll Quecksilberhöhe einen durch feine Messungen merkbaren Fehler der Thermometerstände herbeiführt.

45) Läfst sich gleich die Thatsache im Allgemeinen hiernach nicht in Abrede stellen, so würde man doch der neuen Beobachtung allzusehr huldigen, wenn man alle Thermometer danach für bedeutend unrichtig halten wollte, und viele gefundene Verrückungen des Nullpunctes wären sicher kleiner

1 S. oben *Temperatur der Erdkruste*, und meine Abhandl. über die Ausdehnung tropfbarer Flüssigkeiten, S. 9. Anm. Eine ähnliche Erscheinung bei einem 3 Fufs langen Thermometer erwähnt Baumgartner Naturlehre. Supplem. S. 150.

2 Poggendorff Ann. XIII. 41.

ausgefallen oder ganz verschwunden, wenn man bei ihrer Untersuchung die Fehler sorgfältig vermieden hätte, die bei der Bestimmung dieses Punctes so leicht begangen werden. Auffallend bleibt es immer, dafs man in England, wo der Gefrierpunct nicht auf 0° fällt und sonach nicht unmittelbar als ein Hauptpunct auffällt, den Fehler anfangs nicht finden wollte[1] und dafs auch seitdem dort nicht eben viel davon geredet wird, ja, was allerdings merkwürdig ist, Blackadder[2] macht eine Bemerkung bekannt, dafs man verschiedentlich einen constanten Fehler des Quecksilberthermometers gefunden habe, allein er versteht darunter gerade den umgekehrten, einen niedrigern Stand beim Gefrierpuncte, und leitet dieses von einem geringen Theile atmosphärischer Luft ab, der in der Kugel zurückgeblieben und dessen Sauerstoffgas vom Quecksilber durch Oxydation absorbirt seyn sollte. Möglich wäre immer, dafs die englischen Künstler genauer arbeiten und dafs dort nicht so viele schlechte Thermometer in die Hände selbst der Physiker kommen, als vielleicht auf dem Continente der Fall ist, wo die Preise dieser Instrumente allmälig sehr tief herabgedrückt worden sind, wodurch sie dann aber nur in den mittleren Graden eine annähernde Genauigkeit haben können. Auch Moll[3], ein so genauer und besonnener, auf gute Apparate haltender Physiker, bezweifelte die Thatsache; Bürg[4] fand bei der absichtlich angestellten Untersuchung nur bei einem zufällig oben abgebrochenen Thermometer den Gefrierpunct völlig genau, bei den übrigen lag er jedoch nur $\frac{1}{5}$ bis $\frac{1}{4}$ eines Reaumür'schen Grades über dem gemachten Zeichen, und bei einem mit einer Kugel von 3,75 Lin. Durchmesser, auf dessen Scale die achtzigtheiligen Grade 2,5 Lin. betrugen, zugleich aber halbe Grade gezeichnet waren, nicht mehr als $\frac{1}{8}$ eines achtzigtheiligen Grades. Ich selbst zog anfangs die Rich-

1 Annals of Philos. 1823. Jul. p. 74.

2 Edinburgh Journ. of Science. N. IX. p. 47. It has been remarked, by various observers, that the most accurately constructed mercurial thermometers are liable, in the course of long use, to become inaccurate; and in such cases it is a lowering of the original height of the mercury that has been observed to take place.

3 Edinburgh Philos. Journ. N. XVII. p. 196.

4 Wiener Zeitschr. Th. III. S. 18.

tigkeit der Sache in Zweifel[1], weil von drei Thermometern, die ich der Versuche wegen oftmals genau geprüft hatte, das eine von Greiner in Berlin, welches in Viertelgrade R. getheilt ist, die wieder bis auf Viertel genügend geschätzt werden können, den Eispunct 0°,05 R. unter dem Striche zeigte, die beiden andern aber, von Loos in Darmstadt, völlig genau waren. Auch bei einem Pariser Thermometer, welches zufällig durch Abbrechen der oberen Spitze offen war, dessen Scale bis 400° C. reicht, fand ich den Gefrierpunct genau, obgleich der Quecksilberfaden sich bei einer Wärme von 20° C. und darüber in mehrere Theile trennte und also etwas Luft oder Feuchtigkeit enthalten mufste. Den Einflufs des Luftdruckes konnte ich um so weniger bezweifeln, als ich einen auffallenden Beweis vom Nachgeben des Gefäfses gegen mechanischen Druck, namentlich durch die Quecksilbersäule im Innern, bei der Prüfung der langen Thermometer erhalten hatte, allein aus ebendieser Erfahrung ging auch hervor, dafs das Glas bei fortdauerndem unverändertem Drucke sich nur bis zu einer gewissen Grenze ausdehnt oder zusammenzieht; denn seit mehreren Jahren zeigte sich keine Veränderung des Gefrierpunctes bei dem langen Thermometer, obgleich der Druck des Quecksilberfadens gegen die inneren Wandungen des Gefäfses ungefähr 2$\frac{4}{7}$ Atmosphären betrug. Indem aber bei gewöhnlichen Thermometern die festen Puncte erst mehrere Tage, meistens sogar Wochen und selbst Monate nach dem Verschliefsen ihrer Röhren bestimmt werden, so sollte man schliefsen, dafs die Kugeln derselben während dieser Zeit durch den steten Einflufs des Luftdrucks so weit zusammengedrückt seyn müfsten, als das Glas diesem nachzugeben vermag, nach welcher Zeit aber nothwendig ein Stillstand eintreten mufs. Hiermit übereinstimmend ist auch die Erfahrung, dafs die von Lenz auf v. Kotzebue's Entdeckungsreise gebrauchten Thermometer binnen vier Jahren den Gefrierpunct nicht änderten[2], wobei bemerkt wird, die Kugeln derselben seyen von dickem Glase; auch meint Rudberg[3], man könne die Glasdicke der Thermometerkugeln so stark machen, dafs keine Zusammen-

---

1 Meine Abhandl. über d. Ausdehnung tropfbarer Flüssigkeiten. S. 5.

2 Mém. de l'Acad. de Petersb. VI. Sér. T. I. p. 255.

3 A. o. a. O.

drückung möglich bleibe, was jedoch der Empfindlichkeit schaden würde.

46) Die von mir anfangs untersuchten drei Thermometer sind die vorzüglichsten, die ich besitze, und aus der auf ihre Verfertigung verwandten gröfseren Sorgfalt dürfte wohl die genaue Lage ihres Eispunctes zu erklären seyn; spätere Versuche haben mich allerdings überzeugt, dafs dieses bei andern Thermometern keineswegs der Fall ist, auch überraschte mich bald die Entdeckung, dafs der höher gefundene Gefrierpunct tiefer herabging, wenn ich zwischen den beiden Messungen das Thermometer einige Zeit in siedendes Wasser senkte, jedoch habe ich keine hinlänglich erschöpfenden Versuche angestellt, um hiernach über das Problem genügend zu entscheiden. Auf jeden Fall mufs durch den äufseren Luftdruck eine Zusammendrückung des Behälters am Thermometer statt finden und hierauf eine Verrückung der Grade beruhn, sofern diese nicht durch vorhandene Dämpfe im Innern compensirt wird, wie denn schon Taberati[1] fand, dafs Thermometer im Vacuum der Luftpumpe einen niedrigern Stand zeigen, ohne die Ursache hiervon zu kennen, die nachher durch Marcet und de la Rive aufgefunden wurde. Gay-Lussac[2] erkannte zwar bald, dafs eine Absorption der zurückgebliebenen Luft nach Blackadder den entgegengesetzten Fehler erzeugen müsse, indefs wollte er im Gegentheil die Verrückung des Eispunctes von etwas vorhandener Luft ableiten, da schon de Luc[3] bemerkt habe, dafs dieselbe, anfangs im Quecksilber zerstreut, sich mit der Zeit sammle und an Elasticität zunehme. Gay-Lussac war daher nicht geneigt, den erwähnten Ansichten von Flaugergues und Bellani beizupflichten, liefs aber zwei gleiche Thermometer verfertigen, das eine oben offen, das andere verschlossen, und wirklich zeigte sich bei dem letzteren die fragliche Verrückung des Eispunctes, obgleich die Kugel von solcher Glasdicke war, dafs sie nach seiner Ansicht dem Luftdrucke widerstehn mufste. Diesemnach glaubt er ein Mittel gegen diesen Fehler in einem starken Auskochen des Quecksilbers zu finden, welches aber nach Dulong ohne Anwendung der gröfsten Sorgfalt

1 Comm. Soc. Bonon. T. II. P. I. p. 319. T. II. P. III. p. 237.
2 Ann. Chim. et Phys. T. XXXIII. p. 425.
3 Modific. de l'Atmosph. T. I. p. 232.

nicht leicht erreichbar seyn soll. In dieser Beziehung sey es erlaubt zu bemerken, dafs verschiedentlich der Schwierigkeiten gedacht wird, die letzten Antheile von Luft und Feuchtigkeit aus dem Quecksilber der Thermometer zu entfernen, und man hält diese deswegen für sehr grofs, weil es beim *Füllen* der Barometer so gefunden wurde. Man glaubte aber nicht selten, die Barometer seyen nur dann völlig luftleer, wenn bei ihnen die Capillardepression, die mit der Convexität der Oberfläche zusammenhängt, wegfiele und die Oberfläche sich ganz eben zeigte, da doch dieses auf der eigenthümlichen Beschaffenheit des Glases beruht, wie jetzt bekannt ist[1]. Es findet indefs ein wesentlicher Unterschied des Verfahrens beim *Auskochen* der Barometer und der Thermometer statt; erstere werden von unten nach oben allmälig ausgekocht, wobei das schwerere kalte, noch unreine Quecksilber fortwährend wieder niedersinkt, letztere aber werden in ihrer ganzen Ausdehnung der Hitze ausgesetzt (wobei man sie an zwei Eisendrähten zu halten pflegt), die ganze Masse des Quecksilbers siedet gleichzeitig in den beiden Behältern, dem unteren bleibenden und dem oberen provisorischen, und die erzeugten Quecksilberdämpfe verjagen bald die letzten Antheile von Luft und Feuchtigkeit, weswegen auch bei alten, aber guten Thermometern das Bläschen, welches sich in der Kugel bildet, wenn man beim Umkehren derselben den Quecksilberfaden bis ans Ende der Röhre herabsinken läfst, nach dem Rückgange des Quecksilbers ohne irgend eine Spur wieder verschwindet. Neuerdings hat Legrand[2] absichtlich zur Lösung des vorliegenden Problems eine grofse Reihe von Versuchen mit 60 von Bunten verfertigten Thermometern angestellt und folgende Resultate erhalten. Die Verrückung des Eispunctes erfolgt sowohl, wenn die Thermometer einer unveränderlichen, als einer wechselnden Temperatur ausgesetzt werden, sie kommt aber zum Stillstande in einem Zeitraume, welcher vier Monate nicht übersteigt, und hängt nicht von der Form des Behälters, sondern von der Beschaffenheit des Glases, vielleicht seiner Zusammensetzung und Abkühlung ab.

---

1 S. Art. *Meteorologie*. Bd. VI. S. 1847.

2 L'Institut. 5me Année. N. 195.. Ann. Chim. et Phys. T. LXIII. p. 368.

Bei Behältern von gewöhnlichem Glase schwankt die Verrückung zwischen 0°,3 und 0°,5 C. und kann im Mittel = 0°,35 C. gesetzt werden, bei solchen von Krystallglas oder Email (*verre tendre, dit émail*) war sie bei fünf untersuchten = 0, bei zweien unter zwanzig, deren Nullpunct BUNTEN bestimmt hatte, = 0°,25 und = 0°,5 C., vermuthlich wegen fehlerhafter Bestimmung. Die Verrückung erfolgt nicht gleichmäſsig, sondern anfangs schneller, doch nicht so, daſs man ihren Gang verfolgen kann. Erwärmt man das Thermometer bis zum Siedepuncte des Quecksilbers und läſst man es in der Luft erkalten, so stellt sich das ursprüngliche Zero wieder her, und die Verrückung desselben erfolgt dann ebenso, wie sie anfangs entstanden war; erhitzt man dasselbe aber bis 300° C. und läſst es langsam, z. B. in Oel, erkalten, so erleidet der Nullpunct eine Verrückung, die bis auf 3° C. steigen kann, erhitzt man es dann aber bis zum Siedepuncte des Quecksilbers und läſst man es in der Luft erkalten, so bleibt eine Verrückung des Eispunctes, die bis 1°,1 C. und wohl noch mehr betragen kann, als sie anfangs nach der Construction des Thermometers betrug, insbesondere wird die Verrückung des Eispunctes sehr bedeutend, wenn man die Erhitzung bis zu hohen Wärmegraden und die langsame Erkältung öfter wiederholt. Alles dieses ist im Ganzen mit sonstigen Erfahrungen übereinstimmend und daher nicht auffallend, um so überraschender aber erscheint die Behauptung, daſs sich das beschriebene Verhalten auf gleiche Weise bei verschlossenen und offenen Thermometern zeige, also nicht Folge des äuſsern Luftdruckes seyn könne, sondern auf einer eigenthümlichen Zusammenziehung des Glases beruhn müsse.

47) Gegen alle hier mitgetheilte Behauptungen ist bisher kein Widerspruch erfolgt, auſser gegen die eine, wonach die Verrückung des Eispunctes im Verlaufe von 4 Monaten zum Stillstande kommen soll, indem DESPRETZ[1] durch eine Reihe gleichfalls absichtlich angestellter Versuche gefunden haben will, daſs sie über zwei Jahre zunehmend fortdaure. Diesemnach räth er, wenn es auf eine vorzügliche Genauigkeit thermometrischer Messungen ankommt, sich zuvor von der Richtigkeit des Gefrierpunctes zu überzeugen. Allein auch

1 L'Institut. 1837. Mars. N. 199. p. 73.

dieses ist schwieriger, als es auf den ersten Blick scheint, denn Egen's[1] Messungen zeigen, daſs der genau bestimmte Frostpunct nach einer Erhitzung des Thermometers in den Dämpfen des siedenden Wassers herabgeht, und zwar um eine Gröſse, die bei vier vorzüglichen Thermometern 0°,057; 0°,074; 0°,098; 0°,105 C. betrug. Man vermiſst die Beantwortung der Frage, ob eine Erwärmung des Thermometers, welche nicht gerade die Siedehitze erreicht, also etwa nur bis 50° C. steigt, diese Herabdrückung ihrer Gröſse proportional herbeiführt, allein es ist dieses auf jeden Fall wahrscheinlich, und dann folgt hieraus, daſs auf einander folgende Messungen abwechselnd niederer und höherer Wärmegrade überall nicht absolut genau seyn können. Hiermit stimmen auch die Resultate der beachtungswerthen Versuche überein, welche Gintl[2] angestellt hat. Er fand die durch den Luftdruck bewirkte Erhöhung des Eispunctes keineswegs so groſs, als sie von Manchen angegeben wird, denn sie betrug nach der beim Abbrechen der Spitzen sich zeigenden Depression gemessen bei Kugeln nur 1 Millim., bei Cylindern 1,4 und bei birnförmigen Behältern nur 0,8 Millimeter, wobei jedoch das Verhältniſs dieser Gröſsen zu denen der Scalentheile nicht angegeben ist. Die durch Molecularattraction bewirkte Erhebung des Eispunctes tritt auch nach seiner Ansicht bald nach dem Zuschmelzen der Thermometer ein und dauert auf jeden Fall nicht sehr lange, denn er fand bei seinen Thermometern nach fünf Jahren ungefähr die nämliche Verrückung desselben, welche Bürg bei den seinigen nach zehn Jahren gefunden hatte. Die Frage, ob der Eispunct der Thermometer, soweit seine Erhebung durch Molecularattraction des gläsernen Gefäſses bewirkt wird, auch später durch Erhitzung der Thermometer wieder herabgehe, bejaht auch er bestimmt, jedoch nur in Beziehung auf eine Erhitzung bis zum Siedepuncte des Wassers.

48) Hiermit ist also alles dasjenige genügend mitgetheilt, was die Physiker über die Verrückung des Eispunctes bei Quecksilberthermometern aufgefunden zu haben angeben, und es wäre nun angemessen, eine genaue Bestimmung dieses Fehlers und die dafür erforderliche Correction hierauf zu gründen;

1 Poggendorff Ann. XIII. 38.

2 Baumgartner's und v. Holger's Zeitschr. Th. V. S. 8 ff.

allein man übersieht bald, dafs dieses nicht etwa nur schwierig, sondern in der That unmöglich ist, weil die Resultate der verschiedenen Untersuchungen bedeutend von einander abweichen und sich in einigen wesentlichen Puncten sogar widersprechen. Alles genau erwogen scheinen mir folgende Sätze als hinlänglich begründet gelten zu können. Erstlich ist der gerügte Fehler keineswegs so allgemein, als man den Angaben nach schliefsen sollte, denn sonst könnte unmöglich in den Resultaten thermometrischer Messungen, namentlich der Temperaturen der Luft an den verschiedenen Orten, die unter mittleren Polhöhen nur gegen 10° C. über dem Eispuncte liegen und durch zahlreiche Messungen der Grade über und unter diesem fehlerhaft genannten Puncte gefunden würden, so viele Uebereinstimmung herrschen, als doch wirklich gefunden wird. Bei guten, nicht marktmäfsig verkäuflichen Thermometern, die mit mäfsig grofsen Kugeln und nicht mit künstlich verzierten Behältern versehn sind, darf man daher eine fehlerfreie oder nur unmerklich abweichende Lage des Eispunctes voraussetzen. Dafs zweitens der äufsere Luftdruck auf die Oberfläche der Quecksilberbehälter, nachdem der innere Raum der Thermometerröhre luftleer verschlossen ist, eine mefsbare, obgleich geringe Zusammendrückung verursachen werde, die um so merklicher seyn mufs, je gröfser und dünner von Glase die Kugel ist, läfst sich wohl nicht bezweifeln, nur in seltenen Fällen wird aber hieraus eine Verrückung des Eispunctes erwachsen, weil gute Thermometer mit kleinen, nicht zu dünnen Kugeln versehn zu seyn und ihre festen Puncte erst eine hinlängliche Zeit nach dem Verschliefsen bestimmt zu werden pflegen. Weniger geneigt bin ich drittens, eine lange Zeit hindurch allmälig wachsende Zusammenziehung des Glases in Folge einer Art von Zusammensinterung oder Krystallisation anzunehmen; doch ist es nicht unmöglich, dafs sie, mindestens bei einigen Glassorten, und zugleich in verschiedenem Grade statt finde. Nicht zu bezweifeln ist dagegen, dafs eine negative (vermindernde) Verrückung des Nullpunctes eintreten und eine Zeit lang dauern wird, wenn man das Thermometer bis zum Siedepuncte des Quecksilbers oder bis gegen etwa 300° C. erhitzt, die dann im Verlaufe der Zeit wieder in die entgegengesetzte übergeht. In dieser Beziehung kann Leblanc nicht so sehr getäuscht worden seyn, als man voraus-

setzen müſste, wenn man diesen Satz in Abrede stellen wollte, ja ich habe selbst einigemal, obgleich die Versuche nur mit geringer Sorgfalt angestellt wurden, gefunden, daſs die Verrückung des Nullpunctes geringer geworden oder ganz verschwunden war, nachdem ich das Thermometer einige Zeit in siedendes Wasser oder in die Dämpfe desselben getaucht hatte, und Egen's[1] directe Versuche entfernen jeden hiergegen zu erhebenden Zweifel. Die zu Beobachtungen der Lufttemperatur dienenden Thermometer bleiben daher in ihrem Gange constant, weil sie in der Regel keinen hohen Temperaturen ausgesetzt sind; auch ist es auf jeden Fall rathsam, die Bestimmung des Nullpunctes erst einige Wochen oder noch besser Monate nach der Verfertigung der Thermometer und vor der Auffindung des Siedepunctes vorzunehmen. Der gröſste Theil der wirklich vorhandenen oder vermeintlich aufgefundenen Verrückungen des Nullpunctes ist endlich viertens sicher eine Folge ursprünglich vorhandener oder bei der Prüfung statt gefundener unrichtiger Bestimmungen. Es ist keineswegs leicht, die Fehler sicher zu vermeiden, welche hierbei sich einschleichen können, und es kömmt zugleich weit weniger auf mikroskopisch feine Messungen an, nach den von Rudberg und Egen angewandten Methoden, als auf die Vermeidung möglicher Fehler bei der Operation selbst; denn man liest die Thermometer in der Regel beim Gebrauche nicht mikrometrisch ab und die Anwendung der mikroskopischen Meſsapparate hindert leicht die erforderliche sorgfältige Manipulation. Bei letzterer ist aber hauptsächlich darauf zu sehn, daſs der Schnee reinlich aufgesammelt und das Gefäſs zur Vornahme der Bestimmung in ein nur etwa 5° C. erwärmtes Zimmer gebracht werde, daſs sich das Thermometer eine hinlänglich lange Zeit darin befinde und man den Nullpunct nicht eher bezeichne, als bis der Schnee in seiner ganzen Masse, ohne vorhandenes freies Wasser, sich durchscheinend, der Thermometerstand aber sich eine hinlängliche Zeit unveränderlich zeigt. Das von Bürg[2] angewandte Verfahren, reines Wasser in einem Gefäſse (allenfalls mit eingesenktem Thermometer) gefrieren zu lassen, bis die Oberfläche mit einer einige

1 Poggendorff Ann. XI. 357.

2 Wiener Zeitschrift. Th. III. S. 18.

Linien dicken Eisdecke überzogen ist, dann dasselbe in ein nur wenige Grade über dem Gefrierpuncte warmes Zimmer zu bringen, den längere Zeit stationären Stand des Thermometers, auch nach zerstoſsener oberer Eisdecke, abzuwarten und auf diese Weise den Nullpunct zu bestimmen, dürfte allerdings Empfehlung verdienen.

49) Sind demnach die Normalpuncte der Thermometer allerdings wohl minder fehlerhaft, als nach der Ansicht Vieler angenommen wird, so kann es doch nicht überflüssig erscheinen, bei solchen, die zur genauen Messung mittlerer Temperaturen, als namentlich der Luft-, Boden- und Erdwärme, der thierischen Wärme u. s. w., verwandt werden sollen, die Richtigkeit des Eispunctes auf die angegebene Weise zu prüfen, insbesondere wenn sie vorher einer hohen Temperatur, der Siedehitze des Wassers oder gar einer höheren, ausgesetzt wurden oder wenn sie noch neu sind. Dürfte man hierbei die ursprüngliche Richtigkeit des zweiten Normalpunctes voraussetzen, so würde es genügen, bloſs den Gefrierpunct zu rectificiren, und die Gröſse des gefundenen Fehlers würde dann zugleich diejenige Correction angeben, die für alle Grade der Scale gleichmäſsig anzubringen wäre; in der Regel wird man aber auch den zweiten Normalpunct prüfen und die erforderliche Correction anbringen, die sich dann von selbst ergiebt[1]. Hierbei ist es aber gewiſs räthlich, zuerst den Eis-

1 Man nimmt meistens an, daſs der Fehler des Gefrierpunctes allen Graden als constante Gröſse hinzuaddirt werden müsse. Dieses scheint mir jedoch unrichtig, da der Theil des Fehlers, welcher aus der Zusammenziehung des Glases folgt, mit zunehmender Wärme abnimmt und im siedenden Wasser gänzlich zu verschwinden scheint. Darf dieses als richtig gelten, wie ich meinerseits nicht bezweifle, so ist es unmöglich, den Fehler des Gefrierpunctes völlig genau zu corrigiren, weil man nicht weiſs, wie weit derselbe bei jeder Beobachtung durch vorausgegangene Erwärmung des Thermometers bereits verschwunden ist. Egen in Poggendorff's Ann. IX. 288. bemerkt hierüber, daſs die Körper zwar im Allgemeinen sich durch Temperaturverminderung um ebenso viel wieder zusammenziehn, als sie sich durch Wärme ausdehnten, daſs aber solche Körper hiervon eine Ausnahme machen, die durch schnelles Erkalten spröde werden, wie Glas, Stahl u. s. w. Beim Glase ist noch besonders zu berücksichtigen, daſs seine Sprödigkeit in einer dem Gefrierpuncte nahen Temperatur ausnehmend wächst, und die an den Thermometerkugeln wahrgenommene

punct, dann den Siedepunct, und gleich darauf nochmals den Eispunct zu prüfen, um zu ermitteln, ob die Erhitzung bis zum Sieden des Wassers auf die Lage des Eispunctes einen Einfluſs ausübe, in welchem Falle man erst einige Zeit später den Eispunct definitiv fixiren müſste.

50) *Correction des Siedepunctes.* Die meisten Verfertiger von Thermometern bestimmen den Siedepunct ihrer Instrumente durch Eintauchen derselben in siedendes Wasser. Geht ihre Kenntniſs der Sache nicht über den Bereich der gemeinen hinaus, so wählen sie hierzu gewöhnliche, man darf annehmen irdene, Gefäſse, tauchen die Kugel und einen Theil der Röhre in das Wasser, ohne daſs der Boden berührt wird, und indem die stark aufsteigenden Dämpfe sich an die Röhre anlegen, erschweren sie ausnehmend das scharfe Ablesen und Bezeichnen des Punctes, welchen der Quecksilberfaden erreicht und der sich auſserdem bei diesem Verfahren in einer steten hüpfenden Bewegung befindet. Werden die hieraus erwachsenden Schwierigkeiten durch die aus vielfacher Uebung erlangte Fertigkeit überwunden und achten die Künstler, wie man bei den nur etwas besseren voraussetzen darf, auf den Barometerstand, den man zu 28 Par. Zoll anzunehmen pflegt, so wird auf diese Weise der Siedepunct mit sehr annähernder Genauigkeit gefunden. Setzt man inzwischen den begangenen Fehler auch auf einen ganzen Grad der Centesimalscale, den Eispunct als genau angenommen, so beträgt die hierfür erforderliche Correction für n Grade über oder unter dem Eispuncte $\frac{n}{100}$ Grade, also für eine mittlere Temperatur der Luft als Correction des Endresultates für 10° C. unter mittleren Breiten $\frac{10}{100}$ oder 0°,1 C., was noch nicht als bedeutende Unrichtigkeit auffallen würde und die Uebereinstimmung der gewöhnlichen Beobachtungen erklärlich macht. Gegenwärtig kennen aber die besseren Künstler, und auf jeden Fall die Physiker, den Einfluſs der Gefäſse auf die Wärme des in ihnen siedenden Wassers, die ursprüngliche Auffindung und spätere Controle des Siedepunctes geschieht daher nach der oben beschriebenen Methode durch Eintauchen in die Dämpfe und

---

Zusammenziehung mag daher wohl nahe über dem Gefrierpuncte erst beginnen.

dadurch werden die hieraus entspringenden Fehler vermieden. Rücksichtlich des Barometerstandes ist oben §. 35. bereits bemerkt worden, dafs die Annahme von 28 Par. Zoll oder 336 Lin. nur eine in Deutschland gewöhnliche, keineswegs aber allgemein und bestimmt festgesetzte ist, und dafs es besser seyn würde, sich mit Frankreich über 0,76 Meter = 336,905 oder in runder Zahl = 336,9 Par. Lin. zu vereinigen, um dadurch der in England festgesetzten Gröfse von 30 engl. Zoll = 0,762 Meter = 337,791 Par. Lin. möglichst nahe zu kommen. Will man indefs nicht warten, bis dieser Barometerstand, versteht sich auf 0° Temperatur der Quecksilbersäule reducirt, wirklich statt findet, so mufs der bei einem gegebenen Barometerstande gemessene Siedepunct auf den normalen reducirt werden. Die hierfür erforderliche Correction liefse sich aus der mit den Temperaturen wachsenden Elasticität des Wasserdampfes entnehmen, am besten aber dürfte es seyn, diejenigen Resultate zu benutzen, welche Egen[1] durch directe Messungen an 10 verschiedenen Thermometern erhalten hat. Von diesen gaben vier für jede Linie des auf 0° reducirten Barometerstandes 0°,091, vier andere im Mittel 0°,0872 und zwei 0°,086; indem aber auch Dalton 0°,086 gefunden hat, so kann füglich im genäherten Mittel 0°,0881 genommen werden. Ist die Scale an dem geprüften Thermometer bereits befindlich, so beträgt dieser Fehler für jede Linie über oder unter dem normalen Stande des auf 0° C. reducirten Barometers $\mp$ 0°,0881 C. der ganzen Scale, oder unter der wohl allgemein gültigen Voraussetzung, dafs vom Eispuncte aus gleiche Grade aufwärts und abwärts aufgetragen worden sind, für jeden einzelnen Grad $\mp$ 0°,000881. Heifst also der bei der Bestimmung oder Prüfung des Siedepunctes beobachtete Barometerstand in Par. Linien B, nennt man (B — 336,9) = B′ und die über

---

1 Poggendorff Ann. XIII. 40. XI. 528. Man findet hier S. 284. die bisherigen verschiedenen Angaben zusammengestellt, wie grofs die erforderliche Correction für 1 Lin. Barometer-Unterschied seyn müsse. Nach Lemonnier um 1740 ist sie 0°,104 C.; nach Martène 0°,092; nach Faugère um 1770 einmal 0°,112, ein anderes Mal 0°,062; nach de Luc um dieselbe Zeit 0°,094. Mehr Vertrauen verdient die Bestimmung von Dalton zu 0°,085 und die von Arzberger, welche dieser sehr nahe kommt. Vergleiche hierüber Soldner in G. XVII. 58.

oder unter 0° abgelesenen Thermometergrade t, die corrigirten t′, so ist

$$t' = t\ (1 + B'\ 0{,}000881).$$

Wäre z. B. der Siedepunct bei B = 334 Lin. bestimmt worden, so hätte das Thermometer eine zu kurze Scale, der Quecksilberfaden würde auf höhere, als die richtigen Grade zeigen, und die Correction gäbe B′ = (334 — 336,9) = — 2,9 und man erhielte für t = 10° die corrigirte Gröſse

$$t' = 10\ (1 - 2{,}9 \times 0{,}000881) = 9°{,}97448;$$

wäre dagegen B = 339 Par. Lin. und t = 10°, so erhielte man B′ = (339 — 336,9) = 2,1 und die corrigirten Grade betrügen

$$t' = 10\ (1 + 2{,}1 \times 0{,}000881) = 10°{,}001848.$$

Die Correction ist weitläuftig und beschwerlich, betrüge bei 1 Lin. Unterschied für 50° C. zwar nur 0°,044, für 3 Lin. aber schon über 0°,1 und kann daher nicht wohl vernachlässigt werden, man müſste sich daher in voraus eine Tabelle berechnen, um danach die beobachteten Grade zu corrigiren. Bei einer auf die Röhre selbst geätzten Scale bliebe dieses das einzige Auskunftsmittel, eine jede andere würde man aber lieber verwerfen und mit einer richtigen vertauschen. Das hierbei dann vorkommende Problem, wie man bei einem niederen oder höheren Barometerstande eine richtige Scale erhalte oder den gefundenen Siedepunct corrigire, beantwortet sich aus dem Vorhergehenden von selbst; denn wenn die Abweichung für eine Linie Unterschied der auf 0° Temperatur reducirten, bei der Bestimmung des Siedepunctes statt findenden Barometerhöhe und der normalen 0°,0881 beträgt, so wird sie für n Linien einfach = ± n . 0°,0881 C. betragen, und da 1 Grad der Scale den hundertsten Theil ihrer Länge vom Eispuncte bis zum Siedepuncte ausmacht, so sey diese uncorrigirte Länge = L, die corrigirte = L′, und man wird nach den oben gegebenen Bezeichnungen erhalten

$$L' = L\ (1 - B' . 0{,}000881).$$

Die hiernach aufgetragene und richtig getheilte Scale würde dann eine hinsichtlich der Lage des Siedepunctes genaue seyn.

Eine Erfahrung, welche Egen in Beziehung auf dieses Problem mittheilt, verdient sehr beachtet zu werden. Nachdem er die angegebene mittlere Gröſse aufgefunden hatte, prüfte

er hiermit die genannten Thermometer bei verschiedenen Barometerständen und fand, dafs bei keiner einzigen Beobachtungsreihe der Siedepunct aller Thermometer nach einer und derselben Seite abwich. Dieses beweist vollständig, dafs die Abweichungen vom Mittel nicht in der Temperatur des Wasserdampfes ihren Grund haben, weil sie sonst bei allen Thermometern gemeinsam und also von einerlei Zeichen seyn müfsten, sondern dafs sie auf Veränderung des Quecksilbers oder des Glases beruhn. Veränderungen des Quecksilbers scheinen mir auf jeden Fall höchst unwahrscheinlich, dagegen ziehe ich gewisse Modificationen des Glases nicht in Zweifel. Egen bemerkt ferner, dafs man zu ebenso sehr abweichenden Resultaten gelangt seyn würde, wenn man die Lage des Eispunctes nach der Erwärmung des Thermometers zum Grunde gelegt hätte. Zum Glück sind die hieraus erwachsenden Unrichtigkeiten nur gering und für niedere und mittlere Temperaturen, deren Genauigkeit in vielen Fällen so wichtig ist, verschwindend klein; auf jeden Fall aber begründen sie die oben bereits angegebene Regel, dafs man bei Thermometern, von denen man die gröfste Zuverlässigkeit in mittleren Graden verlangt, zuerst den Eispunct scharf bestimmen müsse, dann den Siedepunct, um die zwischen beiden liegende Länge der Scale für den normalen Barometerstand zu corrigiren, und demnächst erst, nach Verfluſs von einigen Wochen oder Monaten, nochmals definitiv den Eispunct. Aller dieser angewandten Vorsicht ungeachtet gelangen wir aber dennoch zu dem Resultate, dafs wegen der eigenthümlichen Beschaffenheit des Glases ebenso wenig absolut genaue Thermometer als Barometer zu erhalten sind[1].

51) *Correction der Scale.* Wenn die beiden Normalpuncte auf der Röhre genau bezeichnet sind, so trägt man den Raum zwischen beiden auf die Scale auf, theilt diesen in so viele Grade, als die beabsichtigte Theilung verlangt, und setzt diese Theilung auch unter dem Eispuncte so weit fort, als erfordert wird oder als die Länge der Röhre bis an die Kugel gestattet. Geschieht das Auftragen der Scalentheile auf die Thermometerröhre selbst, so unterliegt diese zwischen den beiden Normalpuncten bei allen Temperaturen denjenigen Ver-

1 Vergl. *Meteorologie.* Bd. VI. S. 1847.

änderungen ihrer Länge, welcher sie bei der Bestimmung der festen Puncte ausgesetzt war, und ihre Ausdehnung hat daher auf die Genauigkeit der Grade keinen Einflufs, bei Temperaturen unter dem Gefrierpuncte aber wird die Röhre verkürzt, und unter Voraussetzung einer gleichmäfsigen Zusammenziehung des Quecksilbers oder der gewählten thermoskopischen Flüssigkeit wird also aus dieser Ursache die Kälte zu grofs gefunden werden. Allein wenn man die lineare Ausdehnung des Glases auch hoch zu 0,000009 der Einheit für 1° C. annimmt[1], so würde die Aenderung für 50 Grade, eine selten vorkommende Kälte, doch nur 0°,00045 betragen und kann also füglich als unmefsbar vernachlässigt werden.

Uebergehn wir die Scalen von Elfenbein, Holz oder Papier in eine Glasröhre eingeschlossen, weil diese Substanzen durch trockne Wärme oder Kälte ihr Volumen nur unmerklich ändern, und berücksichtigen wir die sehr gewöhnlichen Scalen von versilbertem Kupfer oder Messing, so werden auf diese wohl allezeit bei einer mittleren Temperatur von 15° bis etwa 18° C. die Grade aufgetragen, dann wird das Thermometer mit zwei Drähten oder übergeschraubten kleinen Bügeln in der Gegend von etwa 60° und — 12° auf derselben festgeklemmt. Die Kugel hängt entweder frei unter der Scale, oder ist in eine Vertiefung derselben eingesenkt, zuweilen, und wohl meistens, ist dann zu noch gröfserer Festigkeit das obere verjüngte und rechtwinklig umgebogene Ende der Röhre in ein Loch in der Scale genau eingelassen. Dafs auf jeden Fall bei dieser Einrichtung die Ausdehnung des Metalls Berücksichtigung verdiene, hat Fischer[2] zur Erörterung gebracht, welcher diese auch auf das Glas ausgedehnt wissen will, und ein unleugbar vorhandener Einflufs dieser Ausdehnung des Metalles geht auch namentlich aus dem Umstande hervor, dafs man leicht bei langen Thermometern, namentlich solchen, deren Scalen beträchtlich über den Siedepunct des Wassers hinausgehn, die obere, genau in die Vertiefung eingesteckte Spitze abgebrochen findet. Von diesem Umstande darf man jedoch nicht auf eine bedeutende Gröfsenänderung schliefsen; denn eben wenn die Spitze bei mittlerer Temperatur scharf passend ein-

1 Vergl. *Ausdehnung*. Bd. I. S. 585.
2 Berliner Denkschriften 1816 und 1817. S. 88.

gesteckt ist, so mufs sie leicht abbrechen, da beide Körper, das Glas und das Metall, bei einer Veränderung ihres Volumens durch Wärme nicht im Mindesten nachgeben. Um einen festen Anhaltpunct zu haben, welcher für irgend eine Bestimmung unumgänglich nothwendig ist, wollen wir annehmen, die Thermometerröhre werde durch ihre Befestigungen so auf der Scale gehalten, dafs die Lage des Eispunctes unverändert bleibe. Wird dann die Ausdehnung des Kupfers und des Messings[1] in sehr genähertem Werthe zu 0,00176 der Einheit für den Temperaturunterschied zwischen den beiden festen Puncten des Thermometers angenommen, die des Glases aber, die hierbei compensirend wirkt, zu 0,0009, so beträgt der gröfste, beim Siedepuncte des Wassers durch die Ausdehnung der Scale erzeugte Fehler nicht mehr als $-0^{0},00086$, welcher aufser dem Bereiche der Messung liegt.

52) Ein gröfserer Fehler scheint aus einem andern ähnlichen Umstande hervorzugehn. Nach der angegebenen Vorschrift soll das gesammte Quecksilber im Thermometer, also nicht blofs der Behälter, sondern auch die Röhre, so weit der Quecksilberfaden reicht, sowohl den Dämpfen des siedenden Wassers, als auch der Berührung des schmelzenden Schnees bei der Bestimmung der beiden festen Puncte ausgesetzt werden. Ist dieses nicht geschehn, so wird das nicht ausgesetzte Ende des Quecksilberfadens eine andere Temperatur als die Kugel und der eingetauchte Theil haben, die Normalpuncte können nicht genau seyn und die gezeigten Grade des Thermometers müssen daher corrigirt werden. HERSCHEL[2] behandelt diesen, durch CAVENDISH der Beachtung empfohlenen Fehler ausführlich und giebt Formeln zur Correction desselben. Ist l die Länge des Quecksilberfadens beim Eintauchen der Kugel in Eis und x die Länge desselben, im Fall dafs er ganz eingetaucht wäre, t endlich die Temperatur des freien Quecksilberfadens in Graden der gegebenen Scale über dem Gefrierpuncte des Wassers und $\frac{1}{\delta}$ die Ausdehnung des Quecksilbers mit Rücksicht auf die gleichzeitige des Glases, so wird die normale Länge = x des Quecksilberfadens durch die Tempe-

Fig. 87.

---

1 Nach SABINE in Account of Experiments cet. p. 207.

2 Art. *Heat* in Encyclopaedia metropolitana. p. 230.

ratur von t Graden verwandelt werden in $x + \frac{t}{\delta}x$. Diese ist aber $= l$ angenommen, und es ist also

$$x + \frac{t}{\delta} x = x\left(1 + \frac{t}{\delta}\right) = l,$$

woraus

$$x = \frac{l}{1 + \frac{t}{\delta}} = l - \frac{lt}{\delta + t}$$

gefunden wird. Herschel setzt dann den Ueberschufs der Ausdehnung des Quecksilbers über die des Glases oder $\delta = 6480$ für einen Centesimalgrad und $= 11664$ für einen Grad der Fahrenheit'schen Scale[1], wonach

$$x = l - \frac{lt}{6480 + t} \text{ oder } l - \frac{lt}{11664 + t}$$

wird. Auf gleiche Weise sey l die Länge des den Dämpfen des siedenden Wassers nicht ausgesetzten Quecksilberfadens, x die Länge desselben beim Eispuncte und x' die Länge desselben, wenn er den Dämpfen gänzlich ausgesetzt wäre, t die Zahl der Temperaturgrade, um welche der Quecksilberfaden weniger warm ist, als die Siedehitze des Wassers, und n die Zahl der Grade, in welche die Scale zwischen beiden festen Puncten getheilt ist, so wird, wie oben,

Fig. 88.

$$x' = x + \frac{nx}{\delta} = x\left(1 + \frac{n}{\delta}\right),$$

also auch

$$l = x + \frac{(n-t)x}{\delta} = x\left(1 + \frac{n-t}{\delta}\right).$$

Beide Gleichungen in einander dividirt geben

$$\frac{x'}{l} = \frac{1 + \frac{n}{\delta}}{1 + \frac{n-t}{\delta}} = \frac{\delta + n}{\delta + n - t},$$

also

$$x' = \frac{l\delta + ln}{\delta + n - t} = l + \frac{lt}{\delta + n - t};$$

1 Die Gröfse $\frac{1}{6480}$ ist bekanntlich der durch Dulong und Petit gefundene Ueberschufs der Ausdehnung des Quecksilbers über die des Glases. S. Ann. Chim. et Phys. T. VII. p. 138.

Werden für δ und für $n = 100$ oder 180 die Zahlenwerthe gesetzt, so ist

$$x' = 1 + \frac{1t}{6580 - t} \text{ für C. und } = 1 + \frac{1t}{11844 - t} \text{ für F. Grade.}$$

So richtig diefs in theoretischer Hinsicht ist, so liegt doch die wirkliche Correction aufser dem Bereiche einer erforderlichen Genauigkeit, wo nicht der Möglichkeit überhaupt, sofern die Temperatur t über dem Eispuncte oder unter dem Siedepuncte wohl überall nicht mefsbar ist. Man würde nämlich sehr mit Unrecht hierfür die Wärme der Umgebung nehmen; denn wäre z. B. bei der Bestimmung des Eispunctes das Zimmer auch 15^0 bis 18^0 warm, so würde diese Temperatur selbst einen Fufs über dem Gefäfse mit Schnee einige Grade geringer seyn und bis zur Oberfläche des Schnees bedeutend abnehmen, die Abkühlung der Röhre und des in ihr befindlichen Quecksilberfadens nicht gerechnet. Es mufs daher bei der Vorschrift, die ganze Röhre mit dem Schnee und nachher mit den Wasserdämpfen in Berührung zu bringen, festgehalten werden. Die so graduirten Thermometer werden dann richtig zeigen, wenn sie bei den Messungen sich ihrer ganzen Länge nach in demjenigen Medium befinden, dessen Temperatur gemessen werden soll. Ist Letzteres nicht der Fall, z. B. bei Messungen erhitzter Flüssigkeiten, in welche nur die Kugel eingesenkt wird, der thierischen Wärme u. s. w., so würde hieraus eine Unrichtigkeit erwachsen, die gleichfalls schwer, meistens gar nicht bestimmbar, zugleich aber so klein ist, dafs sie füglich vernachlässigt werden kann. Inwiefern dieses auf die in die Erde gesenkten Thermometer anwendbar ist, wurde bereits oben[1] untersucht.

53) Die *Correction des Calibers* wird gegenwärtig für unumgänglich nothwendig erachtet und alle Thermometer, mit kaum statt findender Ausnahme, gelten in dieser Beziehung für fehlerhaft.

Hällström[2] führt ein ganzes Register von Thermometern an, unter denen eins aus Vauquelin's chemischer Fabrik Correctionen zwischen $4^0,69$ und $-1^0,55$ C. erforderte, bei den übrigen aber hielten sich dieselben ungefähr zwischen $-0^0,2$ bis $+0^0,06$ und 0^0 bis $1^0,6$ C. Egen[3] be-

1 S. Art. *Temperatur der Erdkruste.*

2 Poggendorff Ann. IX. 535.

3 Ebend. XI. 276.

stätigt, dafs nach seinen Erfahrungen jene Thermometer nicht zu den schlechtesten gehören konnten, auch meint er, man dürfe sich nicht dadurch täuschen lassen, wenn Thermometer aus derselben Werkstatt unter einander übereinstimmten. In diesem Falle müfsten sie aber mit einem constanten, in ihrer Construction liegenden Fehler behaftet seyn, wie bei denen, die aus der Werkstätte geübter und bewährter Künstler als vorzüglich genau kommen, nicht wohl anzunehmen ist, und es bleibt daher stets ein bekanntes gutes Mittel, die Richtigkeit der Thermometer im Allgemeinen zu prüfen, wenn man sie unter einander vergleicht, was jedoch gleichfalls mit der gehörigen Vorsicht geschehn mufs. Die Hauptursache der bedeutenden Abweichungen sucht man in einem unrichtigen Caliber der Röhren. Bessel[1] gab eine Methode an, bei fertigen Thermometern die vorhandenen Fehler zu corrigiren, die seitdem nach ihm benannt ist, und man findet daher häufig angemerkt, dafs die zu genauen Versuchen verwandten Thermometer hiernach corrigirt seyen. Gleichzeitig brachte Hällström[2] ein diesem im Wesentlichen gleiches Verfahren in Vorschlag, Egen[3] empfiehlt eine einfachere Methode, dem Bessel'schen Verfahren kommt aber dasjenige nahe, welches Rudberg[4] bei der Correction seiner zur Normal-Mafsbestimmung dienenden Thermometer in Anwendung brachte, und auch dasjenige, welches Kupffer[5] für diejenigen Thermometer empfiehlt, welche zu correspondirenden meteorologischen Beobachtungen an den verschiedenen Stationen des russischen Reiches dienen sollen. Ich werde mich bemühen, eine Uebersicht des wesentlichsten Inhalts dieser schätzbaren Untersuchungen mitzutheilen.

53) Bei fabrikmäfsiger Verfertigung der Thermometer suchen die Künstler blofs nach dem Augenmafse diejenigen Theile der sehr langen, von den Glashütten ihnen zugekom-

---

1 Poggendorff Ann. VI. 287.

2 Ebendaselbst IX. 535. Aus Anmärkningar angäende termometerns färfardigande och Bruk. Acad. Diss. Abo 1823.

3 Poggendorff Ann. XI. 529.

4 Ebend. XL. 566.

5 Instructions pour faire des observations météorologiques et magnétiques. St. Petersb. 1836. 8.

menen Röhren aus, die ihnen ein gleiches Caliber zu haben scheinen, schneiden die erforderliche Länge ab, bringen das Ende, wo ihnen das Caliber nicht mehr genau scheint, nach unten, und haben hierin durch Uebung eine solche Fertigkeit erlangt, dafs sie nicht allein die Gröfse des Behälters der Weite der Röhre blofs nach Schätzung anzupassen vermögen, sondern dafs auch manche dieser Thermometer ziemlich richtig sind, wobei es sich jedoch von selbst versteht, dafs sie gar nicht für den Physiker, sondern blofs für gewöhnliche Wetterbeobachter gehören, die an solche Werkzeuge nicht mehr als etwa einen Thaler wenden wollen. Für gute Thermometer liegt aber das Erfordernifs des richtigen Calibers so nahe, dafs kein Verfertiger derselben damit unbekannt seyn kann. Die von Gay-Lussac[1] neuerdings empfohlene Methode, einen kurzen Quecksilberfaden nach und nach in der ganzen Länge der Röhre hinzuschieben, um aus dem Gleichbleiben oder der Veränderung seiner Länge die gleichmäfsige oder wechselnde Weite der Röhre zu entnehmen, wurde ehemals und wird bis auf die neuesten Zeiten herab stets in Anwendung gebracht. Schon Hennert[2] redet davon, als von einer bekannten Sache, Lambert[3] empfiehlt einen Quecksilberfaden von wenigstens einem Zoll Länge zu nehmen, und seiner Autorität folgen alle diejenigen, welche seitdem über die Construction der Thermometer geschrieben haben, deren Werke gröfstentheils bereits oben angegeben worden sind. Es darf aber auch in dieser Beziehung ein wesentlicher Unterschied nicht unbeachtet bleiben. Ehemals setzte man voraus, der innere Raum der Röhren könne in Folge der Fabricationsart kein absolut genauer Cylinder seyn, sondern müsse sich etwas der konischen Form nähern, und zwar so, dafs derselbe hiernach in kaum merklichen Abstufungen, aber gleichmäfsig fortschreitend, entweder weiter oder enger würde. Hieraus folgt von selbst, dafs ein solcher beginnender Unterschied, obgleich im Anfange verschwindend, doch durch stete Zunahme allmälig

1 Bessel's astronomische Beobachtungen. Abth. VII. Vergl. Poggendorff Ann. VI. 287. Körner's Anleitung übereinstimmende Thermometer zu verfertigen. Jena 1824. Baumgartner's Physik. Supplem. S. 114.

2 Traité des Thermomètres. à la Haye. 1758. p. 44.

3 Pyrometrie. 1779. p. 31. 43.

bedeutend werden müfste. Wäre dann die Gröfse der Zunahme von einem gewissen Puncte an bis zu einem andern genau bekannt, so könnte man mit einer accuraten Theilmaschine diese Aenderung in die Scale übertragen und dadurch den Fehler des Calibers corrigiren; die Künstler blieben aber bei der gleichen Theilung der Scalen, und gingen von dem Grundsatze aus, die Röhre dürfe nur so weit verwandt werden, als sich keine merkliche Aenderung ihrer Weite wahrnehmen lasse. Aus dieser Ursache wird von einer grofsen Masse von Röhren nur ein kleiner Theil zu guten Thermometern wirklich verwandt, der Rest aber zu den schlechteren genommen oder als unbrauchbar wieder eingeschmolzen, und bei der Operation des Calibrirens von hundert und mehr Röhren finden sich nur zwei, drei oder etwa fünf, die sich für längere, über den Siedepunct des Wassers hinaus gehende Thermometer eignen und die daher von gewissenhaften Künstlern nur aus Gefälligkeit oder gegen höhere Preise abgegeben werden. Ich gestehe, dafs ich nach eigenen Erfahrungen und aus theoretischen Gründen noch immer diese Ansicht theile. In Gemäfsheit der Fabricationsweise der Thermometerröhren mufs der innere Raum, wie mir scheint, konisch werden, aber regelmäfsig konisch; allein da die Abweichung von der Cylinderform nothwendig sehr langsam und allmälig eintritt, so läfst sich denken, dafs für eine gewisse Länge der Unterschied verschwindet und diese als genau cylindrisch gelten kann. Bei drei guten Thermometern habe ich einen abgetrennten Quecksilberfaden von etwa 50^0 bis 60^0 Länge in mittlerer Temperatur bis zum Siedepuncte gleiten lassen und eine stets gleichmäfsige Zunahme oder Abnahme wahrgenommen, die bei dem schlechtesten im Maximum $0^0,75$ C. betrug. Wird dann angenommen, dafs die beiden Normalpuncte richtig bestimmt sind, so fällt das Maximum des Fehlers wegen des Calibers in die Mitte der Scale, ist aber auch hier so gering, dafs er bei dem Mangel an Stabilität der zu messenden Wärme in den Fehlern der Messung verschwindet. Sonstige Prüfungen haben hiermit im Ganzen übereinstimmende Resultate gegeben, denn obgleich bei einer von Bessel geprüften Röhre die Ungleichheiten bis auf $\frac{1}{13}$ stiegen, so mufs man doch voraussetzen, dafs diese Röhre zu den sehr schlechten gehörte, da sie bei einer andern von Schafrinski nur $\frac{1}{96}$ erreichten.

Sechs Röhren von Greiner, welche Egen[1] untersuchte, zeigten Ungleichheiten von $\frac{1}{80}$; $\frac{1}{60}$; $\frac{1}{60}$; $\frac{1}{40}$; $\frac{1}{40}$; $\frac{1}{30}$ und fünf von Apel $\frac{1}{90}$; $\frac{1}{40}$; $\frac{1}{40}$; $\frac{1}{20}$; $\frac{1}{20}$; drei von unbekanntem Ursprunge $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{60}$; $\frac{1}{60}$. Nehmen wir die gröſste unter allen diesen, so ist $0^0,05$ auf gewöhnlichen Scalen ohne Anwendung künstlicher Mittel, und wenn nicht das Ende des Quecksilberfadens einem Theilstriche sehr nahe steht, kaum mehr unterscheidbar. Das von Jones in London verfertigte Thermometer, dessen sich Sabine[2] bei seinen Pendelmessungen bediente, scheint das einzige zu seyn, welches nach genauer Prüfung keine meſsbare Abweichung zeigte; es enthielt aber nur 150 Grade der Fahrenheit'schen Scale.

Die Ansichten der meisten Physiker der neuesten Zeit sind aber hiervon wesentlich verschieden. Hiernach sind die innern Räume der Röhren nicht regelmäſsig konisch, sondern sprungweise und regellos bald weiter bald enger[3], und dieser Voraussetzung angemessen ist dann auch die von Gay-Lussac vorgeschlagene Calibrirungsmethode. Man soll hiernach einen kurzen Quecksilberfaden in der Röhre (vor der Verfertigung des Thermometers) verschieben, so daſs das hintere Ende stets wieder genau an den Ort kommt, den das vordere eben verlassen hat, und jederzeit die Länge durch einen Diamantstrich bezeichnen, um eine gewisse Anzahl Räume von gleichem Inhalte zu bekommen, deren Werth nachher beim Verfertigen der Scale zwischen 0 und 100 interpolirt werden kann. Diese Methode ist höchst mühsam und, wie ich meine, auch unsicher, da es kaum möglich auf jeden Fall höchst schwierig ist, das Ende des Fadens jederzeit genau unter den Diamantstrich zu bringen, und man läuft Gefahr, Fehler hinein zu corrigiren, die gar nicht vorhanden sind. Rudberg[4] meint, in sehr engen Röhren, die allein zu guten Thermometern taugen, würde sich ein solcher Faden nicht verschie-

1 Poggendorff Ann. XI. 296.

2 Experiments to determine cet. p. 185.

3 Egen versichert, vier Thermometer geprüft und so ungleich von Weite gefunden zu haben, daſs sie keine regelmäſsige Stelle von einigem Umfange darboten und daher die von ihm früher angegebene Correctionsmethode für sie nicht genügte. Poggendorff's Ann. XIII. 46.

4 Poggendorff Ann. XL. 563.

ben lassen, allein dann könnte man keine der folgenden Correctionsmethoden in Anwendung bringen; vielmehr läſst sich durch Hülfe des Luftdrucks in einem an beiden Enden offenen Röhrchen von geringster Weite ein Quecksilberfaden ohne Mühe verschieben, insbesondere, wenn man nach Körner's[1] Vorschlage die Röhre in eine Fassung steckt, die mit einer kleinen Pumpe versehn ist, und durch Einpressen von Luft den Quecksilberfaden an die erforderliche Stelle bringt. Sowohl für diese Methode, als auch für die sonst üblichen des Calibrirens empfiehlt sich diese Vorrichtung, bei welcher man sich eine feine und mit gröſster Sorgfalt richtig getheilte Scale verschafft, dieser die Röhre parallel legt und nach eingebrachtem Quecksilberfaden an der Scale vermittelst eines Anschlagelineals genau die gleichbleibende oder sich verändernde Länge desselben miſst. Das hierbei zu befolgende Verfahren ist aus der Zeichnung völlig klar und ich überhebe mich daher einer weiteren Beschreibung. Ungleich feiner und den höchsten Grad von Genauigkeit gewährend ist aber die durch Rudberg[2] angewandte *Calibrirungsmaschine*, insbesondere wenn man dabei eine von selbst sich darbietende, obgleich nicht unwesentliche Verbesserung anbringt. Sie besteht aus einem messingnen Lineale A B von gegen 2 Fuſs Länge, auf welchem zwei andere Lineale A G und E F so befestigt sind, daſs sich der Fuſs m n des Mikroskophalters zwischen den parallelen Seiten derselben mit mäſsiger Reibung schieben läſst. Auf die breitere Leiste E F ist eine sehr feine, willkürliche Theilung auf Silber aufgetragen, die man bis zu beliebiger Feinheit treiben und durch Verlängerung der zu 5 und 10 Theilstrichen gehörigen Linien leichter ablesbar machen kann; bei der von Rudberg gebrauchten war der Decimalzoll in 198 Theile getheilt. Auf diese Leiste wird die Thermometerröhre gelegt, mittelst zweier Bügel p q und s z festgeschraubt, und die Längen der Quecksilberfäden werden dann vermittelst des Mikroskopes M abgelesen, indem die Theilstriche durch die Glasröhre sichtbar sind. Eine Verbesserung würde darin bestehn, wenn das Fuſsstück m n nicht durch Verschiebung,

Fig. 89.

Fig. 90.

1 Anleitung übereinstimmende Thermometer zu verfertigen. Jena 1824.

2 Poggendorff Ann. XL. 572.

sondern vermittelst einer Mikrometerschraube sanft bewegt würde.

54) Bessel's *Correctionsmethode* bezieht sich sowohl auf die fehlerhafte Bestimmung der beiden festen Puncte, als auch auf ein unrichtiges Caliber der Röhre, und da vom Ersteren bereits die Rede war, so wird es genügen, blofs das Letztere zu berücksichtigen. Das Verfahren besteht im Allgemeinen darin, Quecksilberfäden zu trennen und aus den Unterschieden ihrer Länge, die sie an den verschiedenen Stellen der Scale einnehmen, gemessen vermittelst der bereits gezeichneten Grade, die Abweichungen des Calibers und die für die einzelnen Grade erforderlichen Correctionen zu finden. Um den Faden zu trennen, soll man die Röhre an dieser Stelle erwärmen oder nach Egen mit der Spitze der Flamme einer Blaslampe dagegen blasen; allein durch blofse und selbst starke Erwärmung trennt sich das Quecksilber nicht, sobald es ganz frei von Luft und Feuchtigkeit ist, wenn man die Erhitzung nicht bis zum Siedepuncte des Quecksilbers treibt, und dann werden die härteren, eben deswegen aber dauerhafteren Glasröhren durch starke einseitige Erhitzung leicht springen, weswegen dieses Verfahren gerade bei den besten Thermometern am gefährlichsten ist[1]. Die Länge der Fäden ist willkürlich, indefs mufs der erste sich mindestens über die Hälfte der Scale erstrecken; man kann diesen dann fortwährend halbiren, oder die folgenden um willkürliche Gröfsen kleiner nehmen, und die Correction wird um so viel vollständiger seyn, je gröfser die Zahl der angewandten Fäden ist, wobei der letzte Faden kleiner, als die Hälfte des ersten seyn soll. Die unteren Enden bringt man der Bequemlichkeit wegen mit einem Theilstriche der Scale zur genauen Berührung und zeichnet den Stand des oberen Endes auf, rückt dann auf diese Weise in beliebigen Intervallen, etwa von 5° zu 5° oder von 10° zu 10° weiter, bis an das Ende der Scale, wobei sich von selbst versteht, dafs man ebenso gut auch vom oberen Ende des Fadens als

1 Ich möchte rathen, vor der Anwendung der Correction erst die Genauigkeit der Theilung bei den Scalen zu untersuchen, denn sonst können leicht Fehler der Theilung, durch Nachlässigkeit oder Mangel an guten Theilmaschinen entstanden, für Fehler des Calibers gelten.

Anfangspunct ausgehn oder beide Methoden verbinden könnte. Bessel erläutert diese Methode durch das Beispiel einer Correction, die er bei einem Fahrenheit'schen Thermometer vermittelst 8 Fäden in Anwendung gebracht hat, weil aber diese Grade minder gebräuchlich sind, aufserdem die Rechnung durch die gröfsere Zahl der Grade und die Menge der Fäden weitläuftiger wird, die Art des Verfahrens aber auch durch ein kürzeres Beispiel völlig klar wird, so wähle ich in Ermangelung eigener Versuche dasjenige, welches Baumgartner[1] mitgetheilt hat. Hiernach waren

Unteres Ende des Fadens	Oberes Ende des Fadens			
	I.	II.	III.	IV.
— 20	20,3	—	—	—
— 10	30,4	24,7	—	—
0	40,5	34,8	24,40	11,1
+ 10	50,6	44,9	34,55	21,1
+ 20	60,6	54,9	44,55	31,1
+ 30	70,5	64,8	54,50	41,1
+ 40	—	74,7	64,40	51,0
+ 50	—	—	74,30	61,0
+ 60	—	—	—	71,0

Um hieraus die Correction zu finden, drückt man alle Fäden in einem gleichen, an sich willkürlichen Mafse aus, denkt sich jeden an die Stelle der vorher gebrauchten Fäden gebracht, als ob sein unteres Ende auf den Theilstrich gefallen wäre, auf welchen der wirklich gebrauchte Faden fiel. Wird dann die Stelle seines oberen Endes mit derjenigen Stelle, welche der Faden in der Röhre wirklich einnahm, verglichen, so giebt der Unterschied die Correction für den Punct, auf welchen das untere Ende fällt. Das untere Ende ist auf diese Weise durch das obere bestimmt, und man erhält also so viele Bestimmungen desselben Scalenelements, als man Fäden ge-

1 Naturlehre. Supplem. S. 124. Ich habe nie gewagt, gute Thermometer dieser, wie mir scheint, gefährlichen Operation zu unterwerfen, mich dagegen begnügt, zufällig oder durch blofses Schütteln abgetrennte Fäden von 5° zu 5° fortgleiten zu lassen, und auf diese Weise die bereits erwähnten Resultate erhalten.

braucht hat, deren Mittelwerth die gesuchte Correction giebt, wenn man die Verbesserung für das andere Ende des Fadens vernachlässigt. Man könnte sich daher mit einem einzigen Faden begnügen, was GAY-LUSSAC's Methode seyn würde, oder mit zwei, wobei die Annäherung durch die Zahl der Fäden stets weiter getrieben wird. Am einfachsten drückt man die Länge des Fadens so aus, wie er von 0 der Scale anfangend erscheint, und setzt allen folgenden eine unbekannte Correction hinzu, damit sich alle, der etwaigen Ungleichheiten der Röhre ungeachtet, auf das nämliche Mafs beziehn, worin der erste ausgedrückt ist. Hiernach ist die Länge

$$\begin{aligned} \text{des Fadens}\quad \mathrm{I} &= 40{,}5 \\ \mathrm{II} &= 34{,}8 + c_{,} \\ \mathrm{III} &= 24{,}4 + c_{,,} \\ \mathrm{IV} &= 11{,}1 + c_{,,,}. \end{aligned}$$

Hiernach giebt die obige Tafel für die zu 30 gehörigen Gröfsen, wenn man den Fehler durch φ bezeichnet:

$$\begin{aligned} 70{,}5 + \varphi(70{,}5) - (30 + \varphi 30) &= 40{,}5 \\ 64{,}8 + \varphi(64{,}8) - (30 + \varphi 30) &= 34{,}8 + c_{,} \\ 54{,}5 + \varphi(54{,}5) - (30 + \varphi 30) &= 24{,}4 + c_{,,} \\ 41{,}1 + \varphi(41{,}1) - (30 + \varphi 30) &= 11{,}1 + c_{,,,} \end{aligned}$$

und hieraus

$$\begin{aligned} 30 + \varphi 30 &= 30 + \varphi 70{,}5 \\ &= 30 + \varphi 64{,}8 - c_{,} \\ &= 30{,}1 + \varphi 54{,}5 - c_{,,} \\ &= 30 + \varphi 41{,}1 - c_{,,,}. \end{aligned}$$

Aus diesen vier Werthen das Mittel genommen, das Mittel aus den Correctionen des oberen Theiles der Scale $= 0$ gesetzt, erhält man

$$30 + \varphi 30 = 30{,}02 - \tfrac{1}{4}(c_{,} + c_{,,} + c_{,,,})$$

oder,

$$\tfrac{1}{4}(c_{,} + c_{,,} + c_{,,,}) = C \text{ gesetzt,}$$
$$\varphi 30 = 0{,}02 - C.$$

Durch ein gleiches Verfahren müssen die zu 20, 10, 0 gehörigen Werthe gesucht werden, und man findet nach BAUMGARTNER

$$\begin{aligned} \varphi 20 &= 0{,}08 - C \\ \varphi 10 &= 0{,}08 - C \\ \varphi\ 0 &= 0{,}00 - C. \end{aligned}$$

Setzt man zu diesen Werthen die Fadenlängen und vergleicht man das Ergebnifs der Summirung mit den in der Tabelle angegebenen Werthen, so erhält man die Correctionen für diejenigen Stellen der Scale, wo sich das obere Ende des Fadens befand, während das untere mit 0, 10, 20, 30 zusammenfiel. Dieses giebt für den Faden I

$$0 + \varphi 0 = 0{,}00 - C$$

dazu Faden I $= 40{,}50$

$$40{,}50 + \varphi 40{,}50 = 40{,}50 - C$$

mithin

$$\varphi 40{,}50 = 0{,}00 - C.$$

Ebenso wird

$$10 + \varphi 10 = 10{,}08 - C$$

dazu Faden I $= 40{,}50$

$$50{,}6 + \varphi 50{,}6 = 50{,}58 - C$$

also

$$\varphi 50{,}6 = -0{,}02 - C.$$

Auf gleiche Weise erhält man

$$\varphi 60{,}6 = -0{,}01 - C$$
$$\varphi 70{,}5 = 0{,}02 - C.$$

Baumgartner erhielt aus den mit Faden II gefundenen Werthen auf gleiche Weise

$$\varphi 34{,}8 = 0{,}00 - C + c_{,}$$
$$\varphi 44{,}9 = -0{,}01 - C + c_{,}$$
$$\varphi 54{,}9 = -0{,}02 - C + c_{,}$$
$$\varphi 64{,}8 = 0{,}02 - C + c_{,};$$

durch Faden III

$$\varphi 24{,}4 = -0{,}01 - C + c_{,,}$$
$$\varphi 34{,}55 = -0{,}07 - C + c_{,,}$$
$$\varphi 44{,}55 = -0{,}07 - C + c_{,,}$$
$$\varphi 54{,}50 = -0{,}08 - C + c_{,,};$$

durch Faden IV

$$\varphi 11{,}10 = 0{,}00 - C + c_{,,,}$$
$$\varphi 21{,}10 = 0{,}08 - C + c_{,,,}$$
$$\varphi 31{,}10 = 0{,}08 - C + c_{,,,}$$
$$\varphi 41{,}05 = 0{,}02 - C + c_{,,,}.$$

Um die Werthe von $c_{,}$; $c_{,,}$; $c_{,,,}$ zu entfernen, nimmt man aus allen mittelst desselben Fadens erhaltenen Resultaten das

Mittel und setzt das Mittel der Correctionen wieder = 0. Dieses giebt

$$0 = -0{,}01 - 4\,C \qquad \text{mithin } C = 0{,}00$$
$$0 = -0{,}01 - 4\,C + 4\,c_{,} \qquad c_{,} = 0{,}00$$
$$0 = -0{,}23 - 4\,C + 4\,c_{,,} \qquad c_{,,} = 0{,}06$$
$$0 = -0{,}18 - 4\,C + 4\,c_{,,,} \qquad c_{,,,} = -0{,}05.$$

Wenn man vermittelst der hier gefundenen Werthe die obigen Gröfsen von $c_{,}$; $c_{,,}$; $c_{,,,}$ befreit, so erhält man für den Faden III und IV folgende Gröfsen:

$$\varphi\,24{,}40 = 0{,}05 - C \qquad \varphi\,11{,}1 = -0{,}05 - C$$
$$\varphi\,34{,}55 = -0{,}01 - C \qquad \varphi\,21{,}1 = 0{,}03 - C$$
$$\varphi\,44{,}55 = -0{,}01 - C \qquad \varphi\,31{,}1 = 0{,}03 - C$$
$$\varphi\,54{,}50 = -0{,}02 - C \qquad \varphi\,41{,}1 = -0{,}03 - C.$$

In den Resultaten mit dem ersten Faden kommt c nicht vor und in denen mit dem zweiten ist $c_{,} = 0$.

Da C bekannt ist, so könnte man diese Gröfse wegschaffen, allein dieses ist unnöthig, da alle Scalentheile dadurch gleichmäfsig afficirt werden und es bei der genauen Bestimmung des Eispunctes wegfällt. Uebrigens beziehn sich die gefundenen Correctionen auf Scalenpuncte mit Decimalbrüchen; sofern es sich aber mehr um die Bestimmung der Correctionen für die ganzen Scalentheile handelt, so lassen sich diese aus jenen herleiten. Man bringt zu diesem Ende alle obere beobachtete Scalenpuncte in natürlicher Ordnung in eine Tabelle und setzt denen, wofür die Correction bereits gefunden ist, diese hinzu. Alsdann vereinigt man diejenigen Zahlen, welche nahe an einer zu suchenden runden Zahl liegen, zu einem arithmetischen Mittel und sucht die Correctionen für jene runden Zahlen durch Interpolation. Die folgende Tabelle enthält die schon gefundenen Correctionen so zusammengestellt, wie sie sich zur Auffindung der arithmetischen Mittel vereinigen lassen.

x	φx	x	φx
11,1	− 0,05	41,1	− 0,03
21,1	+ 0,03	44,55	− 0,01
24,4	+ 0,05	44,9	− 0,01
31,1	+ 0,03	50,6	− 0,02
34,5	− 0,01	54,5	− 0,02
34,8	+ 0,00	54,9	− 0,02
40,5	+ 0,00	60,8	− 0,01
		64,8	+ 0,02
		70,5	+ 0,02

Hieraus findet man folgende arithmetische Mittel:

x	φx	x	φx
25,53	+ 0,03	56,65	− 0,01
39,90	+ 0,00	67,65	+ 0,02
45,41	− 0,01		

und aus allen Verbesserungen durch Interpolation

$\varphi\ 0° = 0{,}00$	$\varphi\ 30° = 0{,}02$	$\varphi\ 50° = 0{,}02$
$\varphi\ 10° = 0{,}08$	$\varphi\ 40° = 0{,}00$	$\varphi\ 60° = -\ 0{,}01.$
$\varphi\ 20° = 0{,}08$		

Um die Correctionen für — 10°; — 20° zu bestimmen, mufs man die Länge der Fäden kennen, welche bekannt wird, wenn man sie von dem anhängenden c befreit. Man findet hiernach:

$$\mathrm{I} = 40{,}5;\quad \mathrm{II} = 34{,}8;\quad \mathrm{III} = 24{,}46;\quad \mathrm{IV} = 11{,}05.$$

Man nimmt hierauf aus der ersten Tabelle die dann gefundenen Gröfsen, als das untere Fadenende auf — 20; — 10 u. s. w. stand, setzt dem oberen Ende die aus dem Vorhergehenden ihm zukommenden Verbesserungen hinzu, zieht die Fadenlänge, auf welche sich dieses bezieht, ab und erhält auf diese Weise $\varphi - 20$; $\varphi - 10$ u. s. w. Im vorliegenden Falle ist hiernach

$$20{,}3 + \varphi\, 20{,}3 = 20{,}8$$

davon Faden I $= 40{,}5$

giebt

$$\varphi\,(-20) = -\ 0{,}3.$$

Ebenso wird

$$\varphi\,(-10) = -\ 0{,}06.$$

Die bisher aufgefundenen Verbesserungen geben die erste

Annäherung, die man benutzen kann, um die oberen Fadenenden in der ersten Tabelle zu corrigiren. Wiederholt man das nämliche Verfahren mit diesen verbesserten Elementen aufs Neue, so erhält man eine zweite, noch genauere Annäherung, die sich dann auf gleiche Weise zu einer dritten Annäherung benutzen liefse, u. s. w. Wenn aber die Correctionen ohnehin klein sind, wird man sich dieser Mühe überheben.

55) Egen[1] hat eine von ihm mit Vortheil angewandte einfache Correctionsmethode angegeben, die sich auch für noch nicht gefüllte Röhren benutzen und vermittelst der oben beschriebenen Calibrirungsmaschine nach Gay-Lussac und Körner bewerkstelligen liefse, wenn man in voraus einen gewissen Anfangspunct der Scale bezeichnete, welchem man später die nach dem Caliber zu theilende Scale anpassen könnte, die dann vermittelst der Calibrirungsmaschine in völlig richtige Grade getheilt werden müfste. Die Methode verdient vorzüglich die Aufmerksamkeit der Künstler, die durch Anwendung derselben in den Stand gesetzt würden, auch wenn wirklich die Röhren nicht konisch, sondern unregelmäfsig wechselnd bald weiter, bald enger seyn sollten, den Physikern auf gleiche Weise richtige Thermometer zu liefern, als die getheilten Kreise der Astronomen sind. Egen wendet einen etwa 2 Lin. breiten und $\frac{1}{5}$ Lin. dicken Silberstreifen an, mit einer möglichst gleichen Eintheilung versehn, so dafs die feinen Theilstriche etwa 0,07 Lin. von einander abstehn, und wobei sich vermittelst zwölfmaliger Vergröfserung durch das Mikroskop immer noch Zehntel derselben schätzen lassen. Dieser Streifen wird mit Silberdraht unbeweglich an die Röhre, am festesten in der Nähe des Eispunctes, gebunden. Es wird dann ein Quecksilberfaden von etwa 30 Graden Länge getrennt und dessen Länge an den verschiedenen Stellen der Röhre gemessen, die Operation wird dreimal wiederholt, und wenn sich keine bedeutenden Unterschiede zeigen, wie in der Regel nicht der Fall zu seyn pflegt, so nimmt man aus den erhaltenen drei Werthen das Mittel. Bei der ersten Beobachtungsreihe wird das untere Ende des Fadens jederzeit auf einen Zehner der getheilten Scale gestellt, bei den folgenden

1 Poggendorff Ann. XI. 530.

auf die benachbarten Theilstriche, und so bringt man dasselbe stets von 200 zu 200 Theilen höher hinauf; das Thermometer muſs hierbei auf ein Bret gebunden seyn und der Quecksilberfaden wird durch sanfte Schläge gegen dasselbe weiter gerückt. Weil man mit diesem längeren Quecksilberfaden nur die oberhalb desselben befindlichen Räume messen kann, indem der von unten nach oben geschobene Faden unten stets einen Raum leer läſst und oben einen gleich groſsen ausfüllt, deren Gröſsen sich also umgekehrt wie die Längen des in ihnen befindlichen Quecksilberfadens verhalten, so muſs nachher auch der anfänglich von dem längeren Quecksilberfaden eingenommene Raum geprüft werden, wozu man einen andern Faden von etwa 10° Länge abtrennt. Man wählt für diese zweite Messung einen Theil der Röhre, welcher sich anfänglich als vorzüglich genau zeigte, und kann also die Mühe sparen, noch diesen letzten Raum von 10° Länge zu messen, weil solche Stellen von völliger Genauigkeit sich in der Regel finden; im entgegengesetzten Falle müſste man noch einen Faden von etwa 3° Länge abtrennen. Bei dem längeren Faden muſs übrigens ein merklicher Temperaturwechsel vermieden werden, welcher bei den kürzeren nicht in Betrachtung kommt. Um endlich den Werth der willkürlichen Scalentheile in Graden der gegebenen Thermometerscale auszudrücken, dient eine Tabelle, welche den Werth von jedem Zehnerstriche in Thermometergraden angiebt und vor dem Auftragen der Scale berechnet werden muſs. Es scheint mir überflüssig, dieses einfache und leicht verständliche Verfahren durch ein Beispiel zu erläutern, welches Egen in gröſster Ausführlichkeit mittheilt.

Kupffer's Methode ist genau die von Bessel empfohlene, indeſs hat er sich, so wie Baumgartner, auf die Anwendung von vier Fäden beschränkt; Rudberg's Methode unterscheidet sich aber dadurch, daſs er Fadenlängen wählt, deren Längen entweder

$$\tfrac{1}{2};\ \tfrac{1}{3};\ \tfrac{5}{12};\ \tfrac{11}{24};\ \tfrac{23}{48}\ldots\ldots$$

oder $\tfrac{1}{2};\ \tfrac{1}{4};\ \tfrac{3}{8};\ \tfrac{7}{16};\ \tfrac{15}{32};\ \tfrac{31}{64}\ldots\ldots$

des ganzen Raumes zwischen dem Eis- und Siedepuncte betragen, diese an die verschiedenen Stellen der Röhre gleiten läſst und aus den Unterschieden, welche ihre berechneten und gemessenen Längen betragen, die Ungleichheiten der

Weiten der Röhre findet. Das Messen der Längen geschieht vermittelst der oben §. 53 beschriebenen Maschine, die Trennung des Fadens aber durch Erwärmen der Glasröhre bis zum Sieden des Quecksilbers an derjenigen Stelle, wo man die Trennung bewirken will, ein Verfahren, welches auch Kupffer empfiehlt.

56) *Correction wegen ungleichmäfsiger Ausdehnung der thermoskopischen Substanz.* Die Thermometer würden unter der Voraussetzung, dafs die Vermehrungen der Wärme den Vergröfserungen des Volumens proportional sind, die Temperaturen richtig angeben, soweit die Genauigkeit vermittelst der angewandten Correctionen erreichbar ist, allein eben die Voraussetzung jenes Verhältnisses ist nur bei der Luft vorhanden, fehlt aber bei allen andern thermoskopischen Substanzen. Sollen also die mit den letzteren gemachten Messungen richtig seyn, so mufs bei ihnen nothwendig noch eine Correction angebracht werden, um sie auf die einzig richtigen des *Luftthermometers* zu reduciren.

Für das *Quecksilberthermometer* ist oben bereits angegeben worden, dafs die darin enthaltene thermoskopische Substanz sich von etlichen Graden über ihrem Gefrierpuncte bis zum Siedepuncte, also von etwa — 36° bis + 100° C. gleichmäfsig genug ausdehnt, um keiner Correction zu bedürfen. Dieser jetzt allgemein angenommene Satz beruht auf den Resultaten, welche Dulong und Petit aus ihren Versuchen über die Ausdehnung des Quecksilbers, verglichen mit der der trocknen Luft, erhalten haben. Legen wir diese, die bereits ausführlich mitgetheilt worden sind[1], so lange zum Grunde, bis vielleicht mögliche genauere eine andere Belehrung geben, so lassen sich für die Reduction auf das Luftthermometer folgende Regeln daraus entnehmen. Zuerst bedarf das Quecksilberthermometer für alle Grade unter dem Eispuncte, die damit mefsbar sind, keiner Correction; denn wenn auch die Temperatur bis zum Gefrierpuncte dieses Metalles, also bis — 39° C. mit Quecksilberthermometern gemessen werden sollte, so kommen die wenigen, in dieser Beziehung noch nicht untersuchten Grade durchaus in keine Betrachtung, da die Versuche der genannten Gelehrten sich bis — 36°,29 C. erstrecken. Nach der

---

1 S. Art. *Ausdehnung.* Bd. I. S. 599.

mitgetheilten Zusammenstellung der von ihnen gefundenen correspondirenden Grade des Quecksilberthermometers Q. und des Luftthermometers L. geben diese folgende Gröfsen:

Q. 29,68; 30,46; 31,26; 31,63; 32,27; 33,31; 34,72; 36,29
L. 29,64; 30,59; 31,04; 31,54; 32,13; 33,40; 34,84; 36,18

Diff. -0,04; +0,13; -0,22; -0,09; -0,14; +0,09; +0,12; -0,09.

Die Unterschiede sind im Allgemeinen grofs, so dafs sie durch vermehrte Genauigkeit wohl hätten vermindert werden können. Nehmen wir sie indefs so, wie sie vorliegen, so wechseln sie vom Anfange bis ans Ende im Zeichen, und ein constanter, aus ungleicher Zusammenziehung des Quecksilbers entspringender Fehler wird daher durch sie nicht angezeigt. Bekanntlich ziehn sich die Flüssigkeiten durch zunehmende Kälte weniger zusammen, die Grade, welche sie am Thermometer zeigen, bleiben daher hinter denen des Luftthermometers zurück; da aber bei —29°,68 schon ein entgegengesetzter Fehler vorhanden ist, so müssen wir diesen oder können ihn wenigstens als einen constanten der Scale betrachten, in was immer für einer Ursache er auch gegründet seyn mochte. Ziehn wir diesen von allen einzelnen Differenzen ab, so erhalten wir folgende verbesserte Werthe:

Diff. 0,00; +0,17; -0,18; -0,05; -0,10; +0,13; +0,16; -0,05.

Diese Differenzen addirt geben — 0,08, eine unbedeutende Gröfse, die noch obendrein dem Fehler, welcher durch gröfsere Zusammenziehung des Quecksilbers zu erwarten war, entgegengesetzt ist, weswegen wir hiernach Regelmäfsigkeit der Zusammenziehung des Quecksilbers mindestens von — 36°,29 bis zum Eispuncte annehmen müssen. Das Quecksilberthermometer bedarf also wegen ungleichförmiger Ausdehnung keine Correction seiner Grade unter 0° C., ein Resultat, welches sich daraus erklären läfst, dafs dieses Metall nicht, wie das Wasser, sich vor dem Gefrieren wieder ausdehnt.

Die Resultate[1], welche ebendiese Physiker für die Ausdehnung des Quecksilbers über 0° C. erhalten haben, sind unzulänglich, um ein regelmäfsiges Gesetz der Ausdehnung dieses Metalles aufzufinden, denn dieses verlangt einen für alle

1 S. ebendaselbst.

Grade des gewählten Thermometers paſslichen analytischen Ausdruck, nach welchem dann die Differenz von 0° bis 100° unmöglich = 0 seyn könnte, wie aus den genannten Versuchen folgt; wohl aber können sie unter der Voraussetzung, daſs die Zunahme der gleichmäſsigen Ausdehnung bis 100° C. unmerklich, von da an aber merklich und von den genannten Gelehrten richtig gemessen worden sey, zur Auffindung der erforderlichen Correctionen für das Quecksilberthermometer von 100° C. bis zum Siedepuncte benutzt werden. Setzt man die für gleiche Zunahmen des Quecksilberthermometers und des Luftthermometers gefundenen Gröſsen neben einander, und sucht man die Differenzen der letzteren, so erhält man folgende Werthe:

Thermometer		Differenzen		
Quecksilber	Luft	I	II	III
100	100,00	0,00		
150	148,70	1,30		
			1,65	
200	197,05	2,95		0,35
			2,00	
250	245,05	4,95		0,35
			2,35	
300	292,70	7,30		0,35
			2,70	
360	350,00	10,00		

Die dritten Differenzen sind hiernach constant, die zu 50 Graden des Quecksilberthermometers gehörigen Grade des Luftthermometers bilden also eine arithmetische Reihe der zweiten Ordnung, und es läſst sich demnach ein Ausdruck für die Gröſsen finden, die man von den beobachteten Graden des Qnecksilberthermometers abziehn muſs, um sie auf Grade des Luftthermometers zu reduciren. Hierbei darf nicht übersehn werden, daſs die Zunahmen des Quecksilberthermometers von 50 zu 50 Graden fortschreiten, auſser bei der letzteren Gröſse. Wären die Bestimmungen absolut richtig, so würde diese letztere Abweichung bei der Gleichheit der dritten Differenzen zu der gewiſs unstatthaften Folgerung führen, daſs die Ausdehnung des Quecksilbers über 300 Grade hinaus wieder abnähme; allein es ist zu schwer, den Gang seiner Ausdeh-

nung so nahe am Siedepuncte scharf zu messen, und zudem bleibt es immer fraglich, bei welchem Grade des Luftthermometers und des Quecksilberthermometers der Siedepunct des Quecksilbers eintritt, da er nach einer andern Bestimmung derselben Gelehrten bei 350° des Luftthermometers und bei 356° des Quecksilberthermometers liegen soll. Hiervon abgesehn läfst sich diejenige Gröfse, welche man von den beobachteten Graden des Quecksilberthermometers abziehn mufs, um sie auf Grade des Luftthermometers zu reduciren, leicht auffinden. Bezeichnet man 50 Grade des Quecksilberthermometers als Einheit durch s, berücksichtigt man, dafs die dritten Differenzen = 0,35 nach der Reihe der natürlichen Zahlen summirt werden müssen, deren Summe $= \frac{n(n+1)}{2}$ ist, dafs ferner diese Differenz erst beim dritten Gliede anfängt, und bezeichnet man die von den beobachteten Graden des Quecksilberthermometers abzuziehende Zahl durch y, so ist

$$-y = 1,3 + 1,65 . s + \frac{s(s-1)}{2} \times 0,35.$$

Hieraus wird

$$-y = 1,3 + 1,4755 + 0,175 s^2;$$

weil aber die beiden letzten Glieder für s = 1 verschwinden müssen, so ist

$$-y = 1,3 + 1,475 (s-1) + 0,175 (s-1)^2,$$

welches aufgelöst giebt

$$-y = 1,125 . s + 0,175 . s^2.$$

Werden dann die Thermometergrade der Centesimalscale des Quecksilberthermometers durch t bezeichnet und t — 100 durch t′, so ist

$$-y = 0,0225 t' + 0,00007 t'^2$$

diejenige Gröfse, welche von den Graden des Quecksilberthermometers über 100° C. abgezogen wird, um sie in Grade des Luftthermometers zu verwandeln[1]. Wurde die Temperatur in Graden Θ der Reaumür'schen Scale gemessen und heifst $\Theta' = \Theta - 80$, so ist

1 Diese Formel habe ich zuerst gebraucht, als ich die bei der gemessenen Ausdehnung der tropfbaren Flüssigkeiten beobachteten Grade reducirte. S. meine Abhandl. über die Ausdehnung der tropfbaren Flüssigkeiten in den Mém. de Petersb. p. 121. Vor dem Er-

$$-y = 0{,}0225\,\Theta' + 0{,}0000875\,\Theta'^2$$

die abzuziehende Gröfse. Die folgende Tabelle enthält die Grade des Quecksilberthermometers Q. nach der Centesimalscale und daneben die ihnen gleichen des Luftthermometers L., woraus also die Correctionen unmittelbar zu entnehmen sind. Für die Reaumür'sche Scale gleichfalls eine Tafel zu berechnen scheint mir unnöthig, da man die erforderlichen Reductionen aus der oben gegebenen Tabelle leicht entnehmen kann.

---

scheinen derselben machte August dieselbe, aus jenen Elementen abgeleitete, Correctionsformel bekannt. S. Poggendorff's Ann. XIII. 119.

Q.	L.	Q.	L.	Q.	L.
100	100,000	145	143,846	190	187,408
101	100,977	146	144,817	191	188,373
102	101,955	147	145,788	192	189,337
103	102,932	148	146,759	193	190,302
104	103,909	149	147,729	194	191,266
105	104,886	150	148,700	195	192,231
106	105,862	151	149,670	196	193,195
107	106,839	152	150,641	197	194,159
108	107,815	153	151,611	198	195,123
109	108,792	154	152,581	199	196,086
110	109,768	155	153,551	200	197,050
111	110,744	156	154,520	201	198,013
112	111,720	157	155,490	202	198,977
113	112,696	158	156,459	203	199,940
114	113,671	159	157,429	204	200,903
115	114,647	160	158,398	205	201,866
116	115,622	161	159,367	206	202,828
117	116,597	162	160,336	207	203,791
118	117,572	163	161,305	208	204,753
119	118,547	164	162,273	209	205,716
120	119,522	165	163,242	210	206,678
121	120,497	166	164,210	211	207,640
122	121,471	167	165,178	212	208,602
123	122,445	168	166,146	213	209,564
124	123,420	169	167,114	214	210,525
125	124,394	170	168,082	215	211,487
126	125,368	171	169,050	216	212,448
127	126,341	172	170,017	217	213,409
128	127,315	173	170,984	218	214,370
129	128,289	174	171,952	219	215,331
130	129,262	175	172,919	220	216,292
131	130,235	176	173,886	221	217,253
132	131,208	177	174,852	222	218,213
133	132,181	178	175,819	223	219,173
134	133,154	179	176,786	224	220,134
135	134,126	180	177,752	225	221,093
136	135,099	181	178,718	226	222,053
137	136,071	182	179,684	227	223,013
138	137,044	183	180,650	228	223,973
139	138,016	184	181,616	229	224,932
140	138,988	185	182,582	230	225,892
141	139,960	186	183,547	231	226,851
142	140,931	187	184,513	232	227,810
143	141,903	188	185,478	233	228,769
144	142,874	189	186,443	234	229,728

Q.	L.	Q.	L.	Q.	L.
235	230,687	277	270,824	319	310,715
236	231,645	278	271,777	320	311,662
237	232,604	279	272,730	321	312,609
238	233,562	280	273,682	322	313,555
239	234,520	281	274,634	323	314,501
240	235,478	282	275,586	324	315,448
241	236,436	283	276,538	325	316,394
242	237,393	284	277,490	326	317,339
243	238,351	285	278,442	327	318,285
244	239,308	286	279,393	328	319,231
245	240,266	287	280,345	329	320,176
246	241,223	288	281,296	330	321,122
247	242,180	289	282,247	331	322,067
248	243,137	290	283,198	332	323,012
249	244,093	291	284,149	333	323,957
250	245,050	292	285,099	334	324,902
251	246,006	293	286,050	335	325,847
252	246,963	294	287,000	336	326,791
253	247,919	295	287,950	337	327,736
254	248,875	296	288,901	338	328,680
255	249,831	297	289,851	339	329,624
256	250,786	298	290,800	340	330,568
257	251,742	299	291,750	341	331,512
258	252,697	300	292,700	342	332,455
259	253,653	301	293,649	343	333,399
260	254,608	302	294,599	344	334,342
261	255,563	303	295,548	345	335,286
262	256,518	304	296,497	346	336,229
263	257,473	305	297,446	347	337,172
264	258,427	306	298,394	348	338,115
265	259,382	307	299,343	349	339,057
266	260,336	308	300,291	350	340,000
267	261,290	309	301,240	351	340,942
268	262,244	310	302,188	352	341,885
269	263,198	311	303,136	353	342,827
270	264,152	312	304,084	354	343,769
271	265,106	313	305,032	355	344,711
272	266,059	314	305,979	356	345,652
273	267,012	315	306,927	357	346,594
274	267,966	316	307,874	358	347,535
275	268,919	317	308,821	359	348,476
276	269,872	318	309,768	360	349,418

57) Weingeistthermometer wird man für Messung höherer Wärmegrade, sobald es auf eine gröfsere Genauigkeit ankommt, nicht in Anwendung bringen, und es dürfte in dieser Beziehung räthlich seyn, sie nach einem richtigen Quecksilberthermometer im Wasserbade mit Anwendung gehöriger Vorsicht, insbesondere wegen ihrer gröfseren Unempfindlichkeit, von 10 zu 10 Graden empirisch zu graduiren. Sucht man hierbei nach genauer Bestimmung des Frostpunctes 10° C. über 0° möglichst scharf auszumitteln, was sich zugleich durch Vergleichung der zwischen diesen beiden Puncten liegenden Länge der Scale mit denen zwischen + 10° und + 20°, desgleichen zwischen + 20° und + 30°, allenfalls auch bis 40° und 50° controliren läfst, genaues Caliber vorausgesetzt, so kann man jene, 10 Graden über 0° zugehörige Länge als normales Intervall für je 10 Grade unter 0° ohne grofsen Fehler auftragen und danach die Scale theilen. Ein unübersteigliches Hindernifs einer genügenden Correction der tieferen Kältegrade, so wünschenswerth diese auch seyn würde, liegt in der unbekannten Reinheit des angewandten Alkohols. Sollte diese aber bekannt seyn, oder wollte man Thermometer von Petroleum und Schwefelkohlenstoff einführen, so liefsen sich die Scalen ohne Schwierigkeit richtig theilen oder bei gleichgetheilten die erforderlichen Correctionen mit sehr genäherter Genauigkeit aus denjenigen Gröfsen entnehmen, die für die Ausdehnung dieser Flüssigkeiten, namentlich von mir selbst[1], aufgefunden und berechnet worden sind.

G. Eigenthümliche Arten von Thermometern.

58) a. Bellani[2] hat einen der Beachtung allerdings werthen Apparat bekannt gemacht und *Thermobarometer* genannt, welcher jedoch schon im Jahre 1819 durch Jaubert in Dijon

1 S. meine mehrgenannten Abhandlungen S. 88. der deutschen und S. 34. der französischen. Fechner's Repertorium. Th. II. S. 441.

2 Brugnatelli Giornale di Fisica 1827. Sesto Bim. p. 455. Wiener Zeitschrift Th. IV. S. 228.

Fig. 91. erfunden und ausgeführt worden seyn soll[1]. Dasselbe ist nichts weiter als ein Barometer nach der von Gay-Lussac angegebenen Construction, wie man aus der Zeichnung ersieht, in welcher dasselbe als Barometer dargestellt ist. Der eine weitere Schenkel AE und der zweite DB des Heberbarometers sind durch eine engere Röhre EXB mit einander verbunden, und die an beiden angebrachten Scalen geben dann die barometrische absolute Länge der durch den Luftdruck getragenen Quecksilbersäule. Eine geringe Abänderung besteht blofs darin, dafs Gay-Lussac für sein Barometer zwar eine enge, aber nicht eigentlich eine Thermometerröhre verlangt, welche Bellani von X bis B, gerade in der Krümmung des Barometers, anbringt. Um dieses Werkzeug als Thermometer zu gebrauchen, darf man es nur umkehren und an seinem unteren Ende Fig. 92. B aufhängen. Hiernach giebt der obere Schenkel des Barometers das Gefäfs für das Thermometer, an dessen enger Röhre die Thermometerscale angebracht ist. Das enge Rohr soll 2 bis 3 Millimeter weit seyn, dennoch aber enthält das grofse Gefäfs so viel Quecksilber, dafs es über den Siedepunct hinausgehn würde; es mufs daher blofs der Schmelzpunct des Eises unmittelbar bestimmt werden, die übrigen Grade der Scale aber soll man durch eine Vergleichung mit einem andern richtigen Thermometer finden. Es wird dann ferner als räthlich angegeben, das Instrument für gewöhnlich so aufzuhängen, dafs es als Thermometer wirkt, und man darf voraussetzen, dafs aus diesen Barometern, die nur durch ein sehr enges Löchelchen im Schenkel D mit der äufsern Luft communiciren, auch beim Tragen kein Quecksilber verloren geht. Im Ganzen ist das Instrument, welches als Barometer nicht zu den vollendetsten gehört, als Thermometer zu unbeholfen, macht dadurch die genaue Bestimmung des Nullpunctes und des Werthes der Scalentheile schwierig und ist wegen der Länge des Cylinders, gegen dessen innere Wandungen abwechselnd eine etwas lange Quecksilbersäule drückt, zu andern Zeiten aber die Torricelli'sche Leere jede Gegenwirkung gegen den äufsern Luftdruck entfernt, dem Einflusse dieses äufsern Luftdruckes allzusehr ausgesetzt.

59) b. Es läfst sich hier am füglichsten das *thermometrische*

1 Bibliothèque universelle. T. XL. p. 87.

Barometer (*thermometrical Barometer*) anreihen, welches Wollaston[1] angegeben hat und wovon bereits oben[2] die Rede war. Der Erfinder erwähnte selbst, dafs ein gleicher Vorschlag schon früher durch Fahrenheit[3] und durch Cavallo[4] bekannt gemacht worden sey, ein dritter von Achard[5] aber war ihm unbekannt. Sykes[6] meint wohl nicht mit Unrecht, dafs ein gewöhnliches, nur hinlänglich genaues und mit langer Scale versehenes Thermometer nebst einem Topfe mit Wasser ebendas leisten würde, was Wollaston's sehr zusammengesetzter Apparat mit Weingeistlampe und schützenden Wandungen von Kupfer zu leisten vermöge, und es scheint mir hiernach und aus andern Gründen, die sich aus dem Folgenden von selbst ergeben, überflüssig, denselben ausführlich zu beschreiben. Die für diesen Zweck zu verwendenden Thermometer müssen eine lange Scale haben, auf welcher jedoch nur der Siedepunct bei 30 engl. Z. Barometerstand genau bestimmt ist, und da zugleich die Länge einzelner Grade sehr grofs seyn soll, so müssen diese durch Vergleichung mit einem andern Thermometer empirisch gefunden werden, was für so hohe Temperaturen keine vorzügliche Genauigkeit verspricht. Wollaston bestimmte die Länge eines Fahrenheit'schen Grades auf diesem Thermometer zwischen 0,5 und 10 Z. engl., bediente sich aber eines solchen, wobei 1° F. eine Länge von 3,98 Z. ausmachte, welcher Raum dann in 100 Theile und durch einen Nonius in 1000 Theile getheilt war; die ganze Scale hatte nur 22 Z. Länge. Als das beste Verhältnifs empfiehlt er 1 Z. Länge für 1° F., was sich jedoch nicht füglich scharf erreichen läfst, auch nicht eben erforderlich ist. Wollaston verfolgte die Idee mit grofser Vorliebe und bediente sich verschiedener Thermometer von ungleicher Gröfse der Grade, auch legte er bei seinen für diesen Zweck berechneten Tabellen nicht stets dieselben Gröfsen zum Grunde. Unter andern berechnete er Tabellen, die zum Messen gröfserer

---

1 Philos. Trans. 1817. p. 183. Schweigger's Journ. T. XXIII. p. 261.

2 S. Art. *Höhenmessung, thermometrische.* Bd. V. S. 332.

3 Philos. Trans. T. XXXIII. N. 385. p. 179.

4 Ebend. T. LXXI. p. 524.

5 Sammlung physik. u. chem. Abhandl. Berlin 1784. N. 17.

6 Philos. Trans. 1835. Lond. and Edinb. Phil. Mag. N. XL. p. 311.

Höhen vermittelst dieses Apparates dienen sollten, und fand damit die Höhe des Snowdon = 3546,25 engl. F., also 9,2 F. niedriger, als die trigonometrische Messung, und die des Moel-Ellio = 2350 engl. F., also 20,5 engl. F. zu niedrig.

Die Bestimmungen der Höhen aus den gemessenen Siedepuncten des Wassers hängen von den Werthen ab, die man der Elasticität des Wasserdampfes bei verschiedenen Wärmegraden beilegt, und Wollaston blieb, vermuthlich in Folge der aus wirklichen Messungen erhaltenen Resultate, nicht stets bei den nämlichen Gröſsen stehn. Nach einer seiner Angaben gehn 0,598 engl. Z. Barometerhöhe auf 1° F. und also 233 Theile der nach der obigen Angabe getheilten Scale auf 0,97 engl. Zoll, wonach 1 Zoll Barometerhöhe mit 395 Theilen oder 1,643 Zoll des thermometrischen Barometers correspondiren. Die ganze Scale von 1000 Theilen begreift hiernach die Barometerveränderungen zwischen 28 und 30,6 engl. Zoll. Auſserdem bediente er sich noch einer andern Scale, namentlich einer, bei welcher 1° F. 552 Theilen oder 2,3 Zoll der Thermometerröhre zugehörte. Für diese Scale fand er, daſs 552 Theile derselben einem Höhenunterschiede von 530 Fuſs correspondirten, und hiermit maſs er einige geringere Höhen mit hinlänglicher Genauigkeit. Vorzüglich legten Wollaston und Apjohn[1] die durch Ure gegebenen Bestimmungen der Elasticität des Wasserdampfes bei verschiedenen Temperaturen zum Grunde, wonach folgende Tabelle gemacht worden ist, die ich neben der oben[2] bereits gegebenen noch mittheile, um so mehr, als sie noch einfacher für die Anwendung ist.

---

1 Ann. of Philos. N. Sér. T. II. p. 292.

2 S. Art. *Höhenmessung* a. a. O.

Siedepunct	Barometerhöhe	Höhe für 1° F.
214	31,2395	
213	30,6149	526,320
212	30,0000	528,666
211	29,3948	531,006
210	28,7993	533,352
209	28,2133	535,692
208	27,6367	538,028
207	27,0695	540,378
206	26,5115	543,724
205	25,9627	545,064
204	25,4230	547,404
203	24,8923	549,750
202	24,3704	552,090

Wird dann jeder Grad in 20 Theile getheilt, so ist die Berechnung bei einer gegebenen Messung sehr leicht. Es sey z. B. auf der einen Station der Siedepunct des Wassers bei $211\frac{11}{20}$, auf der andern bei $209\frac{13}{20}$ gefunden, so ist die gesuchte Höhe

$$\frac{11}{20}\times 531,006 + 533,352 + \frac{7}{20}\times 535,692 = 1170,199 \text{ engl. Fufs,}$$

welche Höhe dann noch wegen der Temperatur der Luft corrigirt werden mufs.

Der Reiz der Neuheit und der berühmte Name des Erfinders mögen veranlafst haben, dafs man dem Apparate eine ungewöhnliche Aufmerksamkeit schenkte, denn die bekannte Schwierigkeit, den Siedepunct des Wassers in ungleichen Gefäfsen zu bestimmen, da man sich doch nicht wohl eines in dieser Hinsicht vorher geprüften bedienen und auch dieses sich mit der Zeit in dieser Beziehung ändern kann, so wie die oben erwähnte Unsicherheit in der Bestimmung des Einflusses, welchen die Barometerhöhe auf die Lage des Siedepunctes am Thermometer ausübt, mufsten die Genauigkeit dieser Methode der Höhenmessung sehr zweifelhaft machen. Einige Experimentatoren wollten daher zwar richtige Resultate mit diesem Apparate erhalten haben, andere aber gestanden unverhohlen die grofsen gefundenen Fehler. Namentlich erhielt MURRAY[1] auf

1 Annals of Philos. T. XII. p. 469.

dem Simplon die gemessene Höhe 577 Fuſs zu hoch[1], und auch Apjohn[2], welcher übrigens den Apparat sehr preist und ihn sogar dem Barometer vorzieht, so wenig dieses auch bei einem nur supplirenden und indirect messenden Werkzeuge der Natur der Sache nach möglich seyn kann, erhielt zwar in zwei Versuchen sehr genaue Resultate, gesteht aber doch, daſs er der angewandten groſsen Sorgfalt ungeachtet in zwei andern Fällen bei Bergen von 2000 und 2400 Fuſs Höhe Fehler von 122 und 267 Fuſs, jenes zu viel und dieses zu wenig, erhalten habe. Ein sehr günstiges Urtheil über diese Methode des Messens fällt dagegen Gintl[3] und belegt dieses zugleich mit eigenen Erfahrungen, die jedoch die entgegenstehenden Argumente nicht wohl beseitigen können. Derselbe giebt eine ausführliche Tabelle der Siedehitze für Hundertstel Grade C. von 100° bis 90° C., nebst den zugehörigen Barometerhöhen in Millimetern, die ich jedoch hier mitzutheilen nicht angemessen finde.

60) c. *Selbstregistrirende Thermometer* füllen eine wesentliche Lücke aus, denn man kann nicht stets zugegen seyn, wenn man die statt findende Temperatur zu wissen verlangt, und dennoch wäre es sehr wünschenswerth, den täglichen Gang der Temperatur mit Bestimmung ihrer wechselnden Gröſse und der jedesmaligen Zeitdauer genau zu kennen. Es sind daher verschiedene Vorschläge zur Erreichung dieses Zweckes gemacht worden, die meisten beschränken sich jedoch auf die Angabe der während einer gewissen Zeitdauer statt gefundenen oder an gegebenen Orten herrschenden Temperaturextreme und werden dann auch *Maximum*- und *Minimumthermometer* genannt. Eins der ältesten, aber noch stets am gangbarsten ist Rutherford's[4] *Thermometrograph*. Dieser besteht aus zwei horizontal auf einer Scale befestigten Thermometern, einem

Fig. 93.

1 Vermuthlich werden die Fehler meistens dahin ausfallen, daſs man die Höhen zu groſs findet. Es scheint, als ob das Wasser insbesondere auf hohen Bergen wegen der herrschenden Trockenheit und des selten fehlenden frischen Luftzuges leichter siedet, als in niedriger liegenden Ebenen. So wollte auch G. G. Schmidt nach einer mir mitgetheilten Nachricht gefunden haben.

2 Annals of Philos. N. Ser. T. II. p. 296.

3 Das Höhenmessen mit dem Thermometer. Wien 1835.

4 Edinburgh Philos. Trans. T. III. 1794. G. XVII. 320.

mit Quecksilber und einem mit Weingeist gefüllten. Nach der ursprünglichen Angabe des Erfinders befindet sich in der Röhre eines jeden dieser Thermometer ein kleiner Cylinder mit aufsitzendem Konus von Elfenbein, welcher im Weingeistthermometer die Spitze nach der Kugel, im Quecksilberthermometer nach dem Ende der Röhre hingerichtet hat. Jetzt macht man sie allgemein so, daſs in die Röhre des Weingeistthermometers ein etwa 6 Lin. langes und sehr feines Glasstängelchen mit einem schwarzen Knöpfchen am einen Ende gebracht wird, welches der Weingeist beim Sinken des Thermometers in Folge der Adhäsion zurückzieht, beim Steigen aber liegen läſst, so daſs das Knöpfchen auf der Scale den tiefsten während der Zeitdauer statt gefundenen Thermometerstand angiebt und dieses also als *Minimumthermometer* dient. Im andern Thermometer liegt vor dem Quecksilber ein kleiner, etwa 2 Lin. langer Stahlstift, welchen dieses bei seiner Ausdehnung vor sich hin treibt, beim Rückgehn des Quecksilberfadens aber liegen läſst; das Ende des Stiftes bezeichnet daher den statt gefundenen höchsten Stand und man hat sonach ein *Maximumthermometer*. Die in der Zeichnung ausgedrückte Construction des Instrumentes ist diejenige, welche ihm Greiner jun. in Berlin giebt. Die Glastafel, auf welcher die beiden Thermometer horizontal liegend befestigt sind und worauf sich zugleich die geätzte Scale befindet, ist in einen messingnen Rahmen gefaſst und wird durch den gebogenen Messingstreifen B C getragen, dessen unterer, etwas breiterer Lappen am Fensterrahmen oder an einer eigens hergerichteten hölzernen Stange mit zwei Schrauben festgeschraubt wird, um die Grade der auswärts vom Fenster, am besten etwa einen Fuſs weit abstehenden Scale durch die Fensterscheibe abzulesen. Der messingne Rahmen ist vermittelst eines Lappens in einem Scharniere des Trägers B so beweglich, daſs man zu einer bestimmten Tagszeit die Scale aus der horizontalen Lage in eine verticale bringt; dadurch sinken beide Stäbchen, das eine bis ans Ende des Weingeistfadens, das andere bis auf das des Quecksilberfadens herab, und nachdem sie dann ohne Erschütterung wieder in die horizontale Lage gebracht worden ist, schraubt man sie durch eine Klemmschraube fest. Auf diese Weise erhält man das während der verflossenen 24 Stunden statt gefundene Maximum und Minimum der Temperatur. Beim

Gebrauche habe ich dieses Instrument allezeit vortreflich gefunden, auch ist gewifs sehr zweckmäfsig, dafs das Minimum durch Weingeist, das Maximum durch Quecksilber gemessen wird; Herschel[1] giebt jedoch, ohne Anzeige der Gründe, dem Sixthermometer den Vorzug.

61) Blackadder[2] hat sich vorzugsweise bemüht, selbstregistrirende meteorologische Werkzeuge auszudenken, und unter diesen auch ein Thermometer, welches er für einfach und leicht zu manipuliren ausgiebt, dem diese Eigenschaften aber auf keine Weise zukommen. Zwei Thermometer mit Fahrenheit'scher Scale sind auf einem gemeinschaftlichen Brete befestigt, das eine a ein gewöhnliches, das andere b soll oben offen und mit seinem oberen Ende vermittelst eines durchsichtigen Kittes in eine weitere Röhre mit einer Kugel c, worin sich etwas Quecksilber befindet, festgesteckt seyn, so dafs das Ende genau bis in die Kugel reicht. Das so verfertigte Instrument soll man vertical richten und dann die Kugel b erwärmen, bis das Quecksilber im Röhrchen aufsteigt und sich mit dem in der Kugel c verbindet, worauf man es bis zur äufseren Temperatur erkalten läfst. Legt man dasselbe horizontal, so fällt das Quecksilber in die Kugel c herab, das Röhrchen ist aber ganz gefüllt. Dann sollen beide Kugeln b und a mittelst einer kaltmachenden Flüssigkeit, als Aether, Alkohol u. s. w., abgekühlt werden, wodurch beide Thermometer um gleich viele Grade sinken und somit vergleichbar werden. Sobald sich das Quecksilber durch Wärme ausdehnt, fliefst ein Theil in die Kugel c, und ist dann ein Uhrwerk angebracht, welches das Thermometer in eine schräge Lage bringt, damit kein Quecksilber mehr ausfliefst und keins aus der Kugel c hinzukommt, so giebt die Vergleichung beider Thermometer die zur Zeit dieser Einstellung statt gefundene Temperatur, was weiter zu beschreiben überflüssig seyn würde, da eine wirkliche Anwendung desselben nicht zu erwarten steht.

Fig. 94.

62) Das in England am meisten gebräuchliche und am höchsten geachtete selbstregistrirende Thermometer, dessen man

1 Encyclopaedia Metropolitana. Art. *Heat.* p. 233.

2 Edinbourgh Journ. of Science. N. VI. p. 251. N. IX. p. 92. Wiener Zeitschr. Th. II. S. 78. Poggendorff Ann. VII. 244.

sich auch zum Messen der Temperaturen in den verschiedenen Tiefen des Meeres bedient, ist das von Six[1] in Vorschlag gebrachte und nach ihm *Sixthermometer* genannte. Es ist dieses ein Weingeistthermometer mit einem langen und weiten Cylinder *αα*, um welchen das Thermometerrohr zweimal gebogen, am zugeblasenen Ende aber mit einer kleinen Kugel *β* zur Aufnahme des sich etwa stärker ausdehnenden Weingeistes versehn ist. Der Weingeistfaden im Thermometerrohre ist durch einen Quecksilberfaden a'a unterbrochen, welcher bei mittlerer Temperatur den heberförmig gebogenen Theil der Thermometerröhre ungefähr zu gleichen Längen ausfüllt und von dem Weingeistfaden bei steigender Wärme vorwärts geschoben, bei abnehmender aber zurückgezogen wird. Vor dem Quecksilberfaden liegen in vergröſsertem Maſsstabe hier dargestellte kleine Stifte von Stahl oder Eisen m l mit sehr feinen federnden Glasfädchen n o, welche die Stifte hindern sollen, durch ihr eigenes Gewicht oder durch unvermeidliche Erschütterungen in dem Rohre hinzugleiten, und man bedient sich dann eines Magnetes, um sie wieder mit den Enden des Quecksilberfadens in Berührung zu bringen. Es ergiebt sich von selbst, daſs der Quecksilberfaden bei seiner Bewegung nach der einen oder andern Seite diese Stiftchen vor sich her schiebt, die aber im Weingeistfaden liegen bleiben, wenn das Quecksilber sich wieder zurückzieht, und wenn daher die Röhre auf einem Bretchen befestigt und auf diesem die Thermometerscale aufgezeichnet ist, so giebt das eine Ende m' des Stiftchens m' l' die höchste, das andere m des Stiftchens m l die niedrigste während der vergangenen Zeit statt gefundene Temperatur an. Die kleinen federnden Fädchen machen die Construction des Apparates schwierig und die Dauer ihrer geeigneten, nicht zu groſsen und nicht zu geringen, Federkraft erzeugen eine Unsicherheit bei seinem Gebrauche[2], sind aber wegen unvermeidlicher Schwankungen beim Messen der Temperatur in den verschiedenen Meerestiefen unvermeidlich; will man sich aber desselben bloſs zum Messen der Extreme der Lufttemperatur bedienen, so genügen

Fig. 95.

Fig. 96.

---

1 Philos. Trans. for 1782. T. LXXII. p. 72. Vergl. Lemaistres in Journ. de Phys. T. V. p. 150. G. II. 287.

2 Vergl. Art. *Meer*. Bd. VI. S. 1671.

bloſse Stahlstiftchen; man stellt, wie beim Rutherford'schen Thermometer, zu einer bestimmten Tageszeit die Scale vertical, so daſs beide Stiftchen bis zur Berührung des Quecksilberfadens herabgleiten, bringt sie dann wieder in die ursprüngliche Lage und erhält nach Verlauf der gewählten Zeit durch die Lage der beiden Enden m' und m der beiden Stiftchen das statt gefundene Maximum und Minimum der Temperatur.

63) Man macht dem Rutherford'schen Thermometrographen den Vorwurf, daſs seine Thermometer mit zwei ungleichen Flüssigkeiten gefüllt sind[1] und daſs sie daher sorgfältig construirt oder durch Rechnung auf einander reducirt werden müssen. Dieses ist jedoch ungegründet, denn Genauigkeit der Construction ist nothwendige Bedingung bei der Verfertigung jedes Thermometers, und da die Thermometer ohne Rücksicht auf die absolute Ausdehnung der enthaltenen Flüssigkeit empirisch graduirt werden, so ist entweder die eine der beiden Flüssigkeiten thermoskopisch unbrauchbar, und sie dürfte dann gar nicht angewandt werden, oder beide Flüssigkeiten sind brauchbar, die Thermometer werden übereinstimmen und der Einwurf fällt von selbst weg. Dem Quecksilber kann unmöglich der Vorwurf der thermometrischen Unbrauchbarkeit gemacht werden, und da der Weingeist sich zum Messen tiefer Kältegrade vorzüglich eignet, in diesem Falle aber bloſs zum Minimumthermometer gebraucht wird, so liegt in der Anwendung beider Flüssigkeiten, der einen bloſs für das Maximum, der anderen bloſs für das Minimum, wozu beide gerade vorzugsweise geeignet sind, eher ein Vorzug, als ein Nachtheil dieses Apparates. Gegen das Sixthermometer wendet man mit Recht ein, daſs die Federn sehr leicht Veränderungen ihres Widerstandes unterworfen sind und daher den Gebrauch erschweren, nicht selten unmöglich machen. Inzwischen hat Traill[2] das Letztere durch Weglassen der kleinen Federn und durch Vermeidung der doppelten Umbiegung des Röhr-

---

1 Edinb. New Phil. Journ. N. XLIV. p. 316.

2 Library of useful Knowledge cet. Part. I. II. Lond. 1828. Thermometer and Pyrometer. Part. II. p. 39. Ich gebe hier die nachher von ihm verbesserten Zeichnungen, die er selbst mir mitgetheilt hat.

chens verbessert, wobei jedoch die Bedingung bleibt, dasselbe in einer horizontalen Lage zu erhalten und die Stäbchen durch einen Magnet wieder mit den Enden des Quecksilberfadens in Berührung zu bringen. Nach der anfänglichen Construction befindet sich der Weingeistbehälter m n des Instrumentes unten und ist am Ende umgebogen, die Röhre läuft mit ihr parallel und ist auf einem geeigneten Bretchen in horizontaler Lage befestigt. In der Mitte der Röhre bei mittlerer Temperatur befindet sich der Quecksilberfaden $\alpha\beta$, welcher durch den Weingeistfaden vorwärts und rückwärts geschoben wird und die Stahlstiftchen a b, a′ b′ vor sich hin schiebt, beim Rückgange aber an der Stelle des Maximums und Minimums liegen läfst, die dann nach Verlauf der gehörigen Zeit vermittelst eines Magnets mit den Enden des Quecksilberfadens wieder zur Berührung gebracht werden. Auf beiden Seiten der Röhre befinden sich die Scalen nach FAHRENHEIT, welche dem einen und dem andern dieser Stiftchen zugehören, deren Umfang sich jedoch nur von 0° bis 100° dieser Eintheilung erstreckt. Die zweite Construction dürfte unter allen dreien entschieden den Vorzug haben. Hierbei ist das Gefäfs m n, der Quecksilberfaden $\alpha\beta$, jeder der Stifte a b und a′ b′ von selbst klar, sehr zweckmäfsig ist aber die Röhre in der Mitte herabwärts gekrümmt, wodurch der Quecksilberfaden mehr zusammengehalten, zugleich aber gehindert wird, dafs er sich nicht trennt und Schichten von Weingeist zwischen sich aufnimmt, was sonst wohl zu geschehn pflegt und gänzliche Unbrauchbarkeit des Apparates nach sich zieht. Nach der dritten Construction, worin die gleichen Theile dieselbe Bezeichnung haben, ist die Röhre in der Mitte herabwärts gebogen, beide Schenkel sind geneigt und der Quecksilberfaden befindet sich ursprünglich bei mittlerer Temperatur an der tiefsten Stelle der Röhre. Die Neigung darf nicht zu stark seyn, dafs die Stahlstiftchen beim Rückgange des Quecksilberfadens herabgleiten, was jedoch wegen des Gewichtes, womit sie aufliegen, ungeachtet ihrer immerhin merklichen Adhäsion an den Weingeist nicht zu fürchten ist, doch dürfte es möglich seyn, bei dieser Construction beide Stiftchen durch Erschütterung des Bretchens wieder mit den Enden des Quecksilberfadens, ohne die beschwerlichere Anwendung eines Magnetes, zur Berührung zu bringen. Bei allen drei Apparaten dient die Kugel k

Fig. 97.

Fig. 98.

Fig. 99.

am Ende der Röhre zur Aufnahme des etwa zu stark ausgedehnten Weingeistes; übrigens versteht sich von selbst, daſs solche Thermometer nicht luftleer seyn dürfen, auch nicht so hergestellt werden können.

64) Die ersten selbstregistrirenden Thermometer sind höchst wahrscheinlich durch Lord CAVENDISH[1] in Vorschlag gebracht worden, und zwar ein eigenes für die Bestimmung des Maximums und ein anderes für das Minimum, deren Beschreibung, obwohl sie auſser Gebrauch gekommen sind, hier nicht fehlen darf. Sein Maximumthermometer ist ein gewöhnliches mit Quecksilber gefülltes, wobei das Ende b des Quecksilberfadens auf bekannte Weise die Temperatur angiebt. Die Röhre ist oben in eine feine Spitze ausgezogen und diese in eine Kugel e e eingekittet. Ueber dem Quecksilberfaden befindet sich Weingeist, womit das Röhrchen ganz angefüllt ist, um bei Verminderung der Temperatur das Quecksilber im Gefäſse e e in die Spitze zu treiben, indem man dasselbe umkehrt und erwärmt, bis das Quecksilber die oberste Spitze erreicht, sich mit dem in der Kugel befindlichen verbindet, und nach dem Erkalten das Röhrchen ganz oder so weit, als es für die Beobachtung des zu erwartenden Maximums erforderlich ist, anfüllt. Steigt dann die Wärme, so läuft dasselbe aus der Spitze des Röhrchens in die Kugel e e, der Rest aber geht nach Verminderung der Temperatur wieder zurück. Wenn man demnächst beim Nachsehn weiſs, wie hoch b steigen müſste, bis dieses Ende des Quecksilberfadens die Spitze des Röhrchens erreichen würde, so ist hierdurch die Höhe von b oder derjenige Thermometergrad gegeben, welcher beim Maximum statt fand. Eine andere Construction leistet dasselbe, und die Füllung des Gefäſses theils mit Weingeist theils mit Quecksilber ist bloſs deswegen gewählt, um das Instrument etwas leichter zu machen. Es führte dieses dann eine Correction herbei, die CAVENDISH wegen der ungleichen Ausdehnung beider Flüssigkeiten für nöthig erachtete, die ich aber

Fig. 100. Fig. 101.

1 Philos. Trans. for 1757. p. 300. Abridgement T. XI. p. 138. Aeltere Vorschläge, z. B. von JOH. BERNOULLI im Briefe an LEIBNITZ, s. Commercium Phil. et Math., und von KRAFT, dessen VAN SWINDEN in Comparaison des Thermomètres gedenkt, sind zu wenig bestimmt, als daſs sich über ihre Brauchbarkeit urtheilen lieſse.

hier übergehe, weil das Instrument schon durch zweckmäfsigere verdrängt worden ist. Das Minimumthermometer besteht aus einem weiten Cylinder a, einer Kugel d, beide mit Weingeist gefüllt, und einer Röhre, worin der Quecksilberfaden bc enthalten ist, über welchem noch ein Theil Weingeist sich befindet. Das oben erweiterte Ende der Röhre ist zugeschmolzen. Soll das Thermometer gebraucht werden, so läfst man aus der Kugel d durch Neigung Quecksilber in das enge Rohr herabfliefsen, bis das Ende des Quecksilberfadens b an die Mündung f der Kugel reicht. Vermittelst des andern Endes c des Quecksilberfadens wird auf der daselbst befindlichen Scale die Temperatur gemessen. Wenn diese dann sinkt, so fliefst von dem Quecksilber ein Theil in die Kugel, ohne zurückzukehren, und vermittelst einer neben dem Schenkel b angebrachten Scale mifst man später, um wie viele Grade das Thermometer zur Zeit des Minimums tiefer stand, als bei der Beobachtung. Damit endlich nicht zu grofse Tropfen Quecksilber in die Kugel fallen und die Messung feiner wird, ist im Innern bei f ein kleines Glasstängelchen angebracht, welches das Quecksilber nur in kleinen Quantitäten in die Kugel fallen läfst. Nach einer andern einfacheren Construction fällt das Quecksilber bei f in den Cylinder a, der Zweck der Kugel d ist mir dabei jedoch nicht klar.

Fig. 102.

Fig. 103.

65) Auf das nämliche Princip ist ein selbstregistrirendes Thermometer gegründet, welches Gay-Lussac[1] hauptsächlich zum Messen der Temperatur in tiefen Seeen in Vorschlag gebracht hat. A ist eine Glaskugel mit einer Röhre, deren Oeffnung nicht gröfser seyn darf, als etwa die Dicke einer feinen Stecknadel. Diese Kugel ist mit Salzwasser oder irgend einer sonstigen geeigneten Flüssigkeit gefüllt. CD ist eine beträchtlich weite Glasröhre, mit ihrem unteren Theile FD um die Röhre BH gekittet und von F bis C mit Quecksilber gefüllt, welches durch die enge Oeffnung im Röhrchen B nicht in die Kugel dringen kann; sobald aber die Temperatur sinkt und die in der Kugel enthaltene Flüssigkeit sich zusammenzieht, prefst der äufsere Druck einen Theil Quecksilber in die Kugel, welches sich auf dem Boden derselben ansammelt, und dieses wird so lange fortdauern, bis die Tem-

Fig. 104.

1 Ann. de Chim. et Phys. T. III. p. 91. 117.

peratur ihr Minimum erreicht hat. Man giefst dann das Quecksilber aus der Röhre DC, bringt die Spitze B in eine verticale Richtung nach unten, treibt durch Erwärmung der Kugel das Quecksilber aus derselben und mifst die Menge in einer eigenen Mefsröhre, auf welcher die Grade gezeichnet sind, die angeben, um wie viel die Temperatur unter die beim Anfange des Versuches statt gefundene herabgegangen seyn mufs, damit die gemessene Quantität Quecksilber in die Kugel eindrang. Das Verhältnifs der eingedrungenen Menge Quecksilber zu den Temperaturen, bis zu welcher die Flüssigkeit in der Kugel erkaltete, wird empirisch gefunden, indem man den gefüllten Apparat von einer bestimmten Wärme auf eine andere bestimmte niedrigere bringt, dann die Menge des eingedrungenen Quecksilbers mit der Röhre G mifst und hiernach die Grade aufträgt. Der übrigen Schwierigkeiten nicht zu gedenken übersieht man bald, dafs bei jedem Steigen der Wärme während der Dauer des Versuches Salzwasser aus der Spitze dringen und beim Sinken Quecksilber hineingetrieben werden mufs, dessen Menge dann eine ungleich tiefere, als die wirklich statt gefundene Temperatur angeben würde.

Fig. 105.

66) Ein diesem ähnliches, aber ein Maximumthermometer, hat King[1] in Vorschlag gebracht. Dasselbe besteht aus einem mit Quecksilber gefüllten Thermometer A auf einer Scale, welche die gewählten Grade enthält. Die Röhre ist oben gebogen, bildet nach der Biegung bei F einen zweiten, mit dem ersten parallel herabgehenden Schenkel B, welcher in eine zweite Kugel H endigt. Zum besseren Verständnifs ist diese besonders in etwas vergröfsertem Mafsstabe gezeichnet. Da, wo der Quecksilberfaden im Röhrchen A endigt, beginnt ein Faden gefärbten Weingeists, welcher bis an die feine Spitze C reicht. In der sie umgebenden, gänzlich verschlossenen Kugel H befindet sich Quecksilber bis etwa zur Linie D, über diesem bis E wieder gefärbter Weingeist und darüber Luft. Steigt das Thermometer in Folge zunehmender Wärme, so dringt Weingeist aus der Spitze C, steigt über das Quecksilber, und dieses dauert so lange, bis das Maximum der Temperatur erreicht worden ist; wenn diese dann wieder sinkt, so

Fig. 106.

Fig. 107.

1 Edinburgh Journ. of Science. N. XVII. p. 113. Vergl. N. XVIII. p. 300. Wiener Zeitschrift Th. V. S. 104.

drückt die Luft Quecksilber in die Spitze C, und man darf nur die Grade, welche dieser Quecksilberfaden unten im Schenkel B zeigt, zu denen hinzuaddiren, die durch die Scale A angegeben werden, um die Gröfse der während der verflossenen Zeit statt gefundenen höchsten Temperatur zu wissen. Für eine abermalige Messung wird die Kugel G erwärmt, bis alles Quecksilber aus der Spitze C ausgeflossen ist, worauf man das Instrument in eine geneigte Lage bringt, damit das Quecksilber in der Kugel zur Seite herabsinkt und die Spitze C mit dem Weingeiste so lange in Berührung bleibt, bis die äufsere Temperatur wieder hergestellt ist. Eine noch einfachere vorgeschlagene Construction ist folgende. Zwei Thermometer sind auf der nämlichen Scale befestigt, das eine mit der Kugel A und einer der Symmetrie wegen gewählten obern F ist ein gewöhnliches Quecksilberthermometer, das andere mit der Kugel G und einer oberen D ist ganz mit Quecksilber gefüllt, und eine neben dem Röhrchen B befindliche Scale giebt von oben herabwärts gezählte, den auf der Scale des ersten Thermometers gezeichneten gleiche Grade an. Zur gröfseren Deutlichkeit ist die obere Kugel D in vergröfsertem Mafsstabe besonders gezeichnet worden. Die Scale des zweiten Thermometers zeigt 0°, wenn das Quecksilber bis an die Spitze C reicht, und beim Steigen der Temperatur wird ein angemessener Theil desselben aus der Spitze C in die, bis etwa zur punctirten Linie D mit ebendieser Flüssigkeit gefüllte, Kugel ausfliefsen. Zieht sich nach statt gefundenem Maximum der Wärme das Quecksilber im Thermometer GB wieder zusammen, so bleibt das obere Ende der Röhre B um eine dieser verminderten Temperatur proportionale Menge von Graden leer, und man darf diese nur zu denjenigen addiren, die das Thermometer A zur Zeit der Beobachtung zeigt, um das statt gefundene Maximum zu erhalten. Grofse Genauigkeit ist auf diese Weise nicht zu erwarten, doch scheint die letztere Einrichtung die beste zu seyn; im Ganzen ist bei dem Apparate wohl am merkwürdigsten, dafs er zu Sidney auf Neu-Südwallis 1827 erfunden wurde.

Fig. 108.

Fig. 109.

67) In England, wo so viele begüterte Privaten sich mit der Aufzeichnung meteorologischer Beobachtungen beschäftigen, ist man am meisten darauf bedacht gewesen, selbstregi-

strirende Thermometer zu verfertigen. Auch Keith[1] hat ein solches in Vorschlag gebracht, dessen Construction aus der Zeichnung leicht zu erkennen ist. Die lange und weite Röhre AB ist mit Weingeist gefüllt, die engere angeschmolzene BED mit Quecksilber, auf welchem bei E ein Stückchen Eisen schwimmt. Dieses letztere ist mit einem Drahte versehn, welcher verlängert und oben umgebogen mit einer Oeffnung durch einen andern, am obern Theile der Röhre befestigten Draht GK in lothrechter Stellung erhalten wird. Auf letzterem sind kleine Stückchen Wachstaffent l,l aufgesteckt, die sich zwar leicht auf demselben auf und nieder schieben lassen, doch aber Reibung genug haben, um bei ihrem geringen Gewichte nicht herabzugleiten. Wenn also das Quecksilber bei E durch größere Ausdehnung beider Flüssigkeiten im Thermometer steigt oder bei abnehmender Temperatur sinkt, so wird das Gewicht E gehoben oder es sinkt herab und das obere umgebogene Ende des Drahtes H verschiebt die kleinen Stückchen Wachstaffent, die somit auf der höchsten und tiefsten Stelle sitzen bleiben und also das Maximum und das Minimum der statt gefundenen Temperatur auf der aus Messing oder Elfenbein verfertigten Scale DF angeben. Der Vorschlag wird dahin erweitert, die Röhre AB sehr weit und 40 engl. Zoll lang zu wählen, dann ein Uhrwerk anzubringen, welches einen mit Papier überklebten hölzernen Cylinder während eines Monates einmal um seine Axe dreht, damit ein Bleistift an der Spitze H den Stand des Thermometers aufschreibt. Gilbert wendet gegen diesen Apparat ein, dafs er nur eine Regulirung nach einem andern Thermometer zulasse und einem Einflusse der Ausdehnung des Schwimmers und seines Drahtes durch Wärme ausgesetzt sey, allein Beides ist nicht sehr bedeutend und Letzteres würde sich durch empirische Graduirung genügend beseitigen lassen; wichtiger dagegen ist, dafs die seidenen Marken leicht in Unordnung kommen können und durch ihren Widerstand nothwendig Unrichtigkeiten erzeugen müssen. Entschieden gebührt daher der Vorzug dem Thermometrographen von Chrichton[2], welchen ich selbst längere Zeit ge-

Fig. 110.

---

1 Edinburgh Phil. Trans. T. IV. Daraus in Nicholson's Journ. T. III. p. 266. und in G. XVII. 319.

2 Tilloch's Philos. Mag. 1803. Mars. Van Mons in Journ. de Chim. et Phys. T. V. p. 82.

prüft und in seinem Gange überraschend genau gefunden habe. Da das thermoskopische Mittel bei demselben Metall ist, so könnte er auch den Metallthermometern beigezählt werden. Die Zeichnung stellt das Instrument von vorn betrachtet dar. A ist eine Metallstange, welche aus einem Streifen Stahl DE und einem Streifen Zink BC, jeder etwa 0,5 Lin. dick und 2 Lin. breit, besteht, beide auf einander gelöthet. Diese Doppelstange ist in dem messingnen Träger I unbeweglich befestigt und mit diesem auf dem Messingbleche abcd so festgeschraubt, dafs sie etwa 0,5 Lin. davon absteht. Das obere Ende der Stange ist mit einem Hebelarme versehn, welcher vermittelst eines feinen, um eine Rolle geschlungenen und durch eine Spiralfeder gespannten Drahtes diese Rolle umdreht und damit zugleich den stählernen, mit einem hervorragenden Stiftchen versehenen Hauptzeiger LM um seine Axe bei G dreht, oder die Umdrehung erfolgt, wie in der Zeichnung dargestellt ist, durch unmittelbares Eingreifen eines Stiftes in den kürzeren Hebelarm des Hauptzeigers. Ueber diesem liegen die beiden sehr feinen Zeiger, welche zusammengelegt mit ihren Spitzen sich genau über der Spitze des Hauptzeigers vereinigen, auf dem Zapfen G aber, jeder für sich, durch Reibung festsitzen, und daher an jedem Orte feststehn, bis sie durch den Hauptzeiger vermittelst des Stiftes H fortgeschoben werden, nach dem Rückgange des Hauptzeigers aber an der ihnen gegebenen Stelle stehn bleiben. Die drei Zeiger geben also gleichzeitig die bestehende Temperatur und die seit dem Zusammenlegen derselben statt gefundene höchste und niedrigste an. Der Siedepunct des Wassers ist bei demselben nicht erforderlich, da es nur zu meteorologischen Beobachtungen dienen soll und man durch Verkürzung der Scale gröfsere Grade auf derselben erhält, den Frostpunct kann man aber bei ihm unmittelbar bestimmen, und aufserdem hat es den Vorzug einer grofsen Empfindlichkeit in Folge der geringen Wärmecapacität der dazu verwandten Metalle und der gleichförmigen Ausdehnung derselben innerhalb der Grenzen der dadurch zu messenden Temperaturen; denn man begreift bald, dafs die beiden vereinten Metallbleche sich durch Wärme ungleich ausdehnen, wodurch die ganze Stange sich nach der einen oder andern Seite hin krümmt und daher das obere Ende derselben bei feststehendem unteren sich vor der Scale

Fig. 111.

hin und her bewegt, worauf der Gang der Zeiger beruht. Die geringe Ausdehnung der Metalle ist allerdings nicht zu übersehn, allein man kann die Stange hinlänglich lang und die ungleichen Längen beider Arme des Hauptzeigers so wählen, dafs die durchlaufenen Grade eine genügende Gröfse haben, um so mehr, als alle einzelne Theile sehr fest in einander greifen dürfen.

68) Wir können hier das durch v. Arnim[1] vorgeschlagene selbstregistrirende Thermometer anreihen, welches niemals praktisch ausgeführt worden zu seyn scheint, weil es in der Ausführung allzu grofse Schwierigkeiten darbieten dürfte. Ein gewöhnliches Quecksilberthermometer mit dicker Kugel a liegt auf einer messingnen Leiste fest, welche wie ein Waagebalken mit einer Messerscheide e in der Vertiefung c einer verticalen Säule genau balancirt ist. Geht die Temperatur tiefer herab, so tritt mehr Quecksilber in die Kugel, welche dadurch schwerer, die Röhre dagegen leichter wird. Am Ende der letzteren befindet sich eine stählerne Spitze mit einem Schraubengewinde, auf welcher das zum Balanciren dienende kleine Gegengewicht d hin und zurück geschraubt werden kann. Ist die höchste Temperatur bekannt, bis zu welcher das Thermometer erhitzt werden wird, so erwärme man es bis dahin, und balancire es durch Verschiebung des Gegengewichts so, dafs es in horizontaler Lage ruht. So wie es kälter wird, sinkt die Kugel herab, die Spitze steigt in die Höhe, und wenn man weifs, wie viele Grade dieses ausmacht, so trägt man diese auf die Scale ik auf. Neben der Scale läuft der gläserne, mit Rauch geschwärzte Glasstreifen lmh, auf welchem ein kleines federndes Härchen am Stifte d hinstreift und die Stelle bezeichnet, bis wohin das Ende des Röhrchens aufgestiegen ist. Wird das Thermometer bei einer mittlern Temperatur eingestellt, so zeigt der Strich, welchen das Härchen auf dem mit dem Rauch von brennendem Kienholz oder sonst geschwärzten Glasstreifen zeichnet, die höchste und die tiefste statt gefundene Temperatur, will man aber den Wechsel der Temperatur vollständig aufgezeichnet haben, so wird die Scheibe nop, welche auf der einen Seite ganz geschwärzt ist, durch ein Uhrwerk umgedreht, und liefert dann eine fortlau-

Fig. 112.

1 G. II. 289.

fende Zeichnung der statt gefundenen Temperaturunterschiede und ihrer Dauer. Man übersieht bald, dafs dieser auf jeden Fall theure Thermometrograph manchen Einflüssen der Luftbewegung, auffallenden Staubes, sich ansetzender Feuchtigkeit, die unter Umständen zu Eis gefrieren würde, selbst der Insecten, die sich darauf niederlassen könnten, und auf jeden Fall der ungleichen Reibung ausgesetzt seyn würde. Verlangt man nicht gerade die zu jeder bestimmten Zeit statt gefundene Temperatur zu kennen, sondern blofs die mittlere tägliche, so giebt hierzu eine negativ compensirte Uhr ein sinnreich ausgedachtes Mittel. Eine Uhr ohne Compensation haben Grassmann[1] und Brewster[2] in Vorschlag gebracht, erst neuerdings ist aber diese Idee durch Jürgensen[3] in der Art wirklich ausgeführt worden, dafs der beabsichtigte Zweck durch eine negativ compensirte Uhr noch vollständiger erreicht wurde. Statt des Ringes der Unruhe bei den Taschenuhren hat man bereits ein Kreuz mit vier getrennten Bogen aus zwei Metallen gewählt, deren ungleiche Ausdehnung das Oscillationscentrum in stets gleicher Entfernung von der geometrischen Axe der Spindel erhält, so dafs hiernach die Zahl der Schwingungen bei allen Veränderungen der Temperatur in gleichen Zeiten stets dieselbe bleibt. Diese Compensation hat Jürgensen nicht blofs umgekehrt, sondern an dem freien Ende eines jeden dieser Bogen noch eine zweite negative Compensation angebracht und dadurch den Einflufs der Wärme auf den Gang dieser Uhr so ausnehmend vergröfsert, dafs ein einziger Grad Unterschied der mittleren Temperatur während 24 Stunden eine Veränderung von fast 32 Secunden herbeiführt. Die mittleren Temperaturen werden nach einer Tabelle berechnet; aufserdem aber befindet sich ein Metallthermometer dabei, welches die bestehende Temperatur und zugleich die Maxima und Minima angiebt, so dafs also dieser Apparat als der vollständigste, bis jetzt bekannt gewordene selbstregistrirende gelten kann. Einige Compensationspendel zeigen zugleich auch

1 S. Art. *Temperatur*. S. 344.

2 In Edinb. Encyclopaed. Art. Atmospherical Clock. Nach Poggendorff in dessen Ann. XXXIX. 524.

3 Aus Compte rendu. 1836. T. II. p. 143. in Poggendorff's Ann. a. a. O. Vergl. Astron. Nachr. 1836. N. 169. S. 10.

die bestehende Temperatur, ohne sie jedoch zu registriren, vermittelst einer bei ihnen leicht anzubringenden Vorrichtung[1].

69) Zu den selbstregistrirenden Thermometern gehört auch das durch Magnus[2] vorgeschlagene Maximumthermometer, welches er *Erdthermometer*, *Geothermometer* genannt hat, weil es zunächst bestimmt war, die mit der Tiefe zunehmende Wärme der Erde zu messen, und dessen Zweckmäfsigkeit bereits bei mehreren Messungen in Bohrlöchern erprobt wurde. Fig. 113. Dasselbe besteht aus einem gewöhnlichen Thermometer mit einer etwas weiten Röhre und daher einem Cylinder von angemessener Gröfse. Weil mit diesem Thermometer nur wenige Grade gemessen werden, wählt man ein solches Verhältnifs des Inhalts der Röhre und des Cylinders, dafs 1° R. ungefähr 0,5 Zoll lang wird. Man soll dann den Eispunct bei diesem Thermometer bestimmen und diesen auf der Röhre mit einem Diamantstriche bezeichnen, damit dasselbe auf seiner Scale stets die richtige Lage wieder erhalte; da aber aus der Natur der Sache folgt, wie auch der Erfinder selbst nicht unbemerkt läfst, dafs die Messungen mit diesem Apparate von der darin enthaltenen Quecksilbermenge ganz unabhängig sind und nach jeder wirklichen Messung sich eine verschiedene Menge Quecksilber darin befindet, so scheint es angemessener, die Scale in willkürliche feine Theile zu theilen, die sich dann ohne Weiteres auf jede andere Scale des Normalthermometers reduciren lassen, womit dieses Geothermometer jederzeit beim Gebrauche verglichen werden mufs. Die Hauptsache beruht darauf, das obere Ende T der Röhre in eine höchst feine Spitze auszuziehn und so zu biegen, dafs die Axe dieser Spitze eine horizontale Lage erhält, damit jedes herausdringende Tröpfchen Quecksilber sogleich herabfällt, und sollte auch ein kleines Kügelchen durch Adhäsion hängen bleiben, so ist dessen Inhalt bei der Feinheit der Spitze und der Weite der Röhre so unbedeutend, dafs sein Volumen auf die Messung keinen merklichen Einflufs hat. Nach dem Gebrauche oder vor einer folgenden Anwendung mufs die Röhre wieder gefüllt werden. Anfangs geschah dieses, indem man das Ther-

---

1 S. Art. *Compensation.* Bd. II. S. 206.

2 Poggendorff's Ann. XXII. 138.

mometer erwärmte, bis das Quecksilber aus der Spitze zu dringen anfing, dann diese in reines Quecksilber tauchte und den Apparat erkalten liefs. Später hat MAGNUS[1] eine verbesserte Vorrichtung angebracht, nämlich die obere feine Spitze mit einer Kugel versehn, worin sich etwas Quecksilber befindet, in welches die Spitze eintaucht, wenn man das Thermometer horizontal hält. Das Füllen geschieht auf diese Weise leichter, inzwischen darf diese Kugel, wie anfangs beabsichtigt wurde, nicht gänzlich verschlossen seyn, weil sonst der Druck des Wassers zu sehr auf das Thermometer wirkt, es führt vielmehr in die Kugel ein sehr feines Haarröhrchen, durch welches die Luft eindringt, ohne dafs das Wasser dasselbe erreicht, auch fliefst kein Quecksilber durch dasselbe ab. Der Cylinder des Thermometers ruht zwischen zwei Messingscheiben, die durch die beiden Streben ac und bd im gehörigen Abstande von einander gehalten werden, unten auf einer Korkscheibe, oben stützt es sich gegen ein Stück Kork, durch welches das Röhrchen gesteckt ist. Auf der oberen Messingscheibe ist ein messingner Cylinder fg mit einer männlichen Schraube festgeschraubt, welcher zugleich zur Befestigung der Scale dient, auf welcher das Thermometerrohr festliegt. Ueber beides wird ein pafslicher gläserner Cylinder, unten mit einer messingnen Fassung versehn, festgeschraubt, in dessen unterem Ende sich ein aus der Zeichnung ersichtliches Löchelchen befindet, in welches beim Herablassen in tieferes Wasser dieses eindringt und die in dem Cylinder enthaltene Luft comprimirt, um den Druck dieser Luft gegen das im Thermometer enthaltene Quecksilber dem Drucke des Wassers gegen die äufseren Wandungen des Cylinders gleich zu machen.

Fig. 114.

Fig. 115.

Der Gebrauch des Instrumentes ist leicht zu übersehn. Steht das Quecksilber im Röhrchen so hoch, dafs auf jeden Fall bei der höchsten zu messenden Temperatur noch irgend ein Theil aus der Spitze desselben ausläuft, so wird es in verticaler Lage in die Tiefe hinabgesenkt und an der zur Messung bestimmten Stelle so lange, etwa 15 Minuten, ruhig gehalten, bis es die dortige Temperatur angenommen hat. Hierbei wird so viel Quecksilber aus der Spitze des Röhr-

1 Poggendorff Ann. XL. 139.

chens dringen, als die höhere Temperatur heraustreibt; beim Heraufziehn und Erkalten desselben zieht sich das Quecksilber wieder zusammen, und sein Stand, mit dem des Normalthermometers verglichen, was am besten durch Eintauchen beider in ein Gefäfs mit Wasser geschieht, giebt die bestehende Temperatur. Werden dann beide Thermometer langsam gleichmäfsig erwärmt, bis das Quecksilber aus der feinen Spitze des Geothermometers zu dringen beginnt, mindestens bis es das äufserste Ende derselben wirklich erreicht, so zeigt in diesem Momente das Normalthermometer genau diejenige Temperatur, welcher das Geothermometer an der untersuchten Stelle im Maximum ausgesetzt war, oder man findet die Temperatur in der gemessenen Tiefe, vorausgesetzt, dafs das Thermometer beim Herablassen bis an diese Stelle oder beim Heraufziehn durch keinen Raum passirte, wo eine gröfsere Wärme herrschte.

Wird das Instrument bis zu bedeutenden Tiefen im Wasser der Bohrlöcher herabgelassen, so drückt letzteres gegen die äufseren Wandungen des Thermometers und durch Compression der Luft in der umgebenden Röhre gleich stark gegen das Quecksilber im Thermometer, so dafs der richtige Gang desselben dadurch nicht gestört wird; allein wegen verhältnifsmäfsig grofser Zusammendrückbarkeit des Quecksilbers wird von diesem nur eine geringere Menge aus der feinen Spitze auslaufen, mithin die Zahl der gemessenen Grade kleiner werden, als die eigentliche Temperatur, die x heifsen möge. Um diese daher zu finden, ist eine Correction erforderlich, die nach Magnus durch folgende Betrachtung erhalten wird. Es sey das ursprüngliche Volumen des Quecksilbers, womit dasselbe bis 0° gefüllt ist, bei 0° Temperatur = V, dasjenige Volumen, welches nach dem Versuche darin enthalten ist, bei gleicher Temperatur = V′, die Temperatur, in welche das Thermometer nach dem Versuche gebracht wird, wenn man dasselbe mit dem Normalthermometer vergleicht, heifse t, die Zahl der Grade, welche das Instrument bei dieser Temperatur einnimmt, heifse t′ und die Ausdehnung des Quecksilbers für 1 Grad der Scale, wonach das Instrument getheilt ist, $\frac{1}{\delta}$, so hat man

$$V'\left(1+\frac{t}{\delta}\right)=V\left(1+\frac{t'}{\delta}\right).$$

Zugleich aber hat man

$$V'\left(1+\frac{x}{\delta}\right)=V\left(1+\frac{T}{\delta}\right),$$

denn V' hatte sich bei der Temperatur x so ausgedehnt, dafs es das ganze Instrument erfüllte, also den nämlichen Raum einnahm, welchen V bei der Temperatur T einnahm, wenn T diejenige Temperatur bezeichnet, bei welcher das ganz gefüllte Instrument mit dem Normalthermometer verglichen wurde, ehe man den Nullpunct desselben durch Eintauchen in schmelzenden Schnee bestimmte. Beide Gleichungen zur Fortschaffung von V und V' dividirt geben

$$\frac{1+\frac{t}{\delta}}{1+\frac{x}{\delta}}=\frac{1+\frac{t'}{\delta}}{1+\frac{T}{\delta}} \text{ oder } \frac{\delta+t}{\delta+x}=\frac{\delta+t'}{\delta+T},$$

woraus

$$x=\frac{\delta+T}{\delta+t'}(\delta+t)-\delta=\frac{(t-t'+T)\delta+tT}{\delta+t'}$$

gefunden wird. Nach Colladon und Sturm[1] beträgt der Unterschied der Zusammendrückung des Quecksilbers und des Glases durch eine Atmosphäre oder 0,76 Met. Quecksilberhöhe oder 10,32 Meter Wasserhöhe $\frac{1,73}{1000000}$ seines Volumens und die Menge des in Folge eines gleichen Druckes weniger aus der Spitze des Thermometers ausgelaufenen Quecksilbers beträgt also

$$\frac{1,73}{1000000}V'=\frac{1,73\,V'}{1000000}\cdot\frac{\delta}{V}$$

in Graden des Instrumentes ausgedrückt, wofür man bei dem geringen Unterschiede zwischen V und V' ohne merklichen Fehler

$$\frac{1,73}{1000000}\cdot\delta$$

1 Ann. Chim. et Phys. T. XXXV. p. 113. Poggendorff Ann. XII. 61.

setzen kann. Bezeichnet dann h die Höhe der Wassersäule, bis zu deren Tiefe das Instrument herabgelassen worden war, p aber die Höhe einer Wassersäule, deren Druck dem einer Atmosphäre gleich ist (10,32 Meter, 31,77 Par. Fuſs, 33,88 engl. Fuſs, 32,8 rhein. Fuſs), so ist

$$\frac{1,73}{1000000} \cdot \frac{\delta h}{p}$$

die Anzahl von Graden, um welche sich das Quecksilber weniger ausgedehnt hat und die man also der gefundenen Temperatur noch hinzusetzen muſs. Hiernach ist

$$x = \frac{(t - t' + T)\,\delta + t\,T}{\delta + t'} + \frac{1,73}{1000000} \cdot \frac{\delta h}{p}.$$

Da aber δ sehr groſs ist in Vergleich mit t, t' und T, so sind die nicht mit δ multiplicirten Glieder verhältniſsmäſsig klein, können also weggelassen werden, und man hat sonach

$$x = t - t' + T + \frac{1,73}{1000000} \cdot \frac{\delta h}{p}.$$

70) Die nicht zweifelhafte Zweckmäſsigkeit des so eben beschriebenen Apparates macht es überflüssig, ein zunächst zum Messen der Temperaturen in tiefen Seeen bestimmtes Maximum- und Minimumthermometer, welches Bellani[1] angegeben hat, ausführlich zu beschreiben, da es genügt, nur die Idee dem Wesen nach anzugeben. Ein Weingeistthermometer mit dem Gefäſse A und einer feinen Röhre von einer solchen Weite, daſs sie nur etwa 20 Grade nach Reaumür in ihrer ganzen Länge zeigen würde, ist oben mit einem zweiten Gefäſse B versehn, an welchem sich der kleine Behälter x befindet, um ein Quecksilberkügelchen von geeigneter Gröſse aufzunehmen. Das obere Gefäſs B ist theils mit Weingeist, theils mit Luft erfüllt, und man findet die Gröſse der Grade, welche der Apparat angiebt, indem man ihn in Wasser von etwa 10° bis 15° Temperatur eintaucht und zugleich das Quecksilberkügelchen über die Oeffnung der Röhre bei z bringt, dann denselben in Eiswasser einsenkt, damit der sich zusammenziehende Weingeist das Quecksilber in Gestalt eines kleinen Cylinders bis etwa nach p herabdrückt, wodurch man die

Fig. 116.

1 Brugnatelli Giornale di Fisica etc. Dec. 1. T. IV. p. 89.

Anzahl von Graden erhält, die dem Intervalle pz zugehören, und hiernach die Scale zeichnen kann. Wird dann das Thermometer bei niedrigerer Temperatur an einen Ort herabgelassen, wo eine höhere Temperatur herrscht, so dehnt sich der Weingeist aus, entweicht neben dem bei z befindlichen Quecksilberkügelchen, drückt dieses aber beim Uebergange in eine kältere Temperatur im Röhrchen herab, und der Punct, wo es sich dann befindet, zeigt die Anzahl von Graden, um welche das Thermometer vorher höher stand. Um als Minimumthermometer gebraucht zu werden, wird der Apparat blofs umgekehrt, auf eine hinlänglich höhere Temperatur gebracht, in welcher das Quecksilberkügelchen sich im untern Theile des Cylinders A bei z befindet; durch gröfsere Kälte zieht sich der Weingeist zusammen, entweicht neben dem Quecksilberkügelchen in das Gefäfs A bis zum Maximum der Kälte, drückt aber bei nachheriger wiederkehrender Wärme dasselbe in das Röhrchen hinab, und die Grade der Scale zeigen den Unterschied beider Temperaturen. Bellani giebt selbst an, dafs ihm ein Vorschlag zur Construction selbstregistrirender Thermometer von Landriani bekannt geworden sey, und es ist auffallend, dafs das von Letzterem später beschriebene Thermometer, dessen Erfindung er sich selbst zueignet[1], mit jenem eine überraschende Aehnlichkeit hat. Die Verfertigungsart dieser Thermometer ist genau so, als bei demjenigen, welches, zum Messen kleiner Wärmedifferenzen bestimmt, später beschrieben werden soll; auch dient eben jenes, jedoch mit kürzerer Scale, zum Messen des Maximums der Temperatur. Für das Minimumthermometer genügt es zu bemerken, dafs man in die enge Röhre einen kleinen Quecksilbercylinder, etwa in die Gegend von M, bringt; ein anderer oder vielmehr das daraus gebildete Quecksilberkügelchen liegt bei O. Sinkt die Temperatur, so steigt das erstere in die Höhe, bis das Minimum erreicht worden ist, und die von oben herab bis zum Cylinder M gezählten Grade weniger der vom zweiten bis O geben die geringste statt gefundene Temperatur an.

Fig. 117.

Fig. 118.

71) Bei Gelegenheit der Versammlung der Naturforscher und Aerzte in Prag im Jahre 1837 zeigte daselbst Mor-

---

1 Brugnatelli Giornale di Fisica. Dec. II. T. I. p. 413.

STADT[1] ein ganz eigentlich selbstregistrirendes Thermometer, von ihm *Thermograph* genannt, vor, welches der Idee nach seinen Zweck völlig erfüllen würde, wären nur nicht alle Instrumente dieser Art so manchen, nicht wohl zu beseitigenden Zufälligkeiten unterworfen. Dasselbe bestand aus einem Kasten von Stahlblech, ungefähr 8 Zoll breit, 6 Z. hoch und 0,75 Z. tief, dessen beide gröſsere Seitenflächen durch etliche durchgehende Streben bleibend in ihrer Entfernung von einander erhalten wurden. Aus der einen schmalen Seite ging ein Rohr etwa 0,5 Z. weit und 4 Z. hoch, lothrecht in die Höhe, und communicirte mit dem innern Raume des Gefäſses, welches nebst der Röhre bis etwa in ihre Mitte bei mittlerer Wärme mit reinem Quecksilber gefüllt war. In der Röhre schwimmt ein eiserner Cylinder auf dem Quecksilber und trägt einen hinlänglich starken Eisendraht, durch dessen oberes Ende horizontal ein Bleistift gesteckt ist. Vor der Spitze des letzteren wird ein mit Papier überzogener Cylinder durch ein Uhrwerk binnen 24 Stunden einmal um seine Axe gedreht, und man übersieht leicht, daſs beim Sinken oder Steigen des Quecksilbers im Gefäſse und somit auch in der Röhre durch Temperaturwechsel der Schwimmer in ungleiche Höhe gehoben werden muſs und auf der Papierhülle des Cylinders also die Thermometergrade aufschreiben kann, deren Gröſsen in voraus auf jenen Papierhüllen durch Linien gezeichnet sind, wobei man bloſs nöthig hat, beim Anstecken einer neuen Papierhülle die Spitze des Bleistiftes auf den gerade dann statt findenden Thermometergrad einzustellen. Durch die groſse Masse des enthaltenen Quecksilbers wird der Apparat zwar für schnell wechselnde Temperaturen unempfindlich, jedoch nicht in dem Grade, daſs hierdurch seiner Brauchbarkeit für meteorologische Beobachtungen Abbruch geschähe. Diesem sehr ähnlich ist der von KLINGERT[2] erfundene *Thermometrograph*, welcher zugleich bestimmt ist, von Blinden durch das Gefühl abgelesen zu werden. Er besteht aus einer hohlen, 1 Par. Fuſs langen, 4 Pfd. Quecksilber enthaltenden eisernen Säule,

---

1 Bericht über die Vers. deutscher Naturf. und Aerzte in Prag. 1837. S. 105.

2 Anzeige eines neu erfundenen Thermometers für Blinde. Breslau 1823. G. LXXV. 435.

auf einem Fufsbrete und mit einem luftdicht aufgeschraubten, horizontal liegenden, eisernen Balken, an dessen beiden Enden sich 6 Zoll lange verticale Röhren befinden. Die eine von diesen communicirt mit der Säule und ist gleichfalls bis zur Hälfte mit Quecksilber gefüllt. An einem verticalen Träger, in der Mitte des Querbalkens, ist ein 7 Par. Zoll im Durchmesser haltender Kreis befestigt, auf welchem Grade nach R. gezeichnet sind und in dessen Mitte sich eine um feine Zapfen drehbare Rolle befindet. Ueber diese geht eine Schnur, deren eines Ende an einem Schwimmer befestigt ist, welcher auf dem Quecksilber in der einen genannten Röhre schwimmt, während das andere ein in die zweite Röhre herabhängendes Gegengewicht trägt; beide Röhren sind mit Deckeln versehn, in denen feine Löchelchen zum Durchgange für die Fäden sich befinden. Durch das Steigen und Fallen des Quecksilbers in der einen Röhre in Folge seiner wechselnden Ausdehnung durch Wärme steigt und sinkt der Schwimmer, die daran befindliche Schnur dreht die Rolle in der Mitte der getheilten Scheibe und zugleich den an ihr befestigten Zeiger, welcher auf der kreisförmigen Scale die Thermometergrade angiebt. Am Rande derselben sind Zähne und Stifte zum Fühlen für Blinde eingeschnitten, in welche ein leichtes, vom Zeiger vorwärts zu schiebendes, aber nicht wieder zurückfallendes Messingblech eingreift, wodurch das Instrument zugleich ein Thermometrograph wird; ein gewöhnliches Thermometer dient dann zur Controle der gezeigten Grade. Das Instrument soll wegen der grofsen Oberfläche und geringen Wärmecapacität, auch guten Wärmeleitung des Eisens hinlänglich empfindlich seyn, es ist aber, aus leicht begreiflichen Gründen, nicht unter die Zahl der gebräuchlichen Apparate aufgenommen worden.

72) d. Die Metalle sind wegen ihrer geringen Wärmecapacität, der Gleichmäfsigkeit ihrer Ausdehnung und, mindestens die meisten, wegen ihres Widerstandes gegen die Einwirkung höherer Temperaturen zur Thermometrie vorzugsweise geeignet, allein die Vermehrung ihres Volumens durch Wärme ist nicht grofs und bei der Mehrzahl sehr gering, sie mufs daher durch künstliche Mechanismen stark vergröfsert werden, um hinlänglich bemerkbar zu seyn. Aus dieser Ursache hat man sie nur wenig zur Construction der Thermo-

meter verwandt, mehr für *Pyrometer*, wovon bereits oben[1] die Rede war; es giebt jedoch einige Apparate, welche zum Messen höherer Temperaturen durchaus nicht anwendbar sind und daher hier erwähnt werden müssen. Das bekannteste unter diesen ist von so vielen verschiedenen Künstlern ausgeführt worden, ohne von den gleichen Bemühungen anderer Kenntnifs zu haben, weil das dabei zum Grunde liegende Princip sich wegen seiner Einfachheit sehr leicht darbietet, dafs es in der That schwer ist, den ersten Erfinder bestimmt anzugeben. Schon im letzten Decennium des vorigen Jahrhunderts habe ich ein vom Uhrmacher AHRENS in Hannover verfertigtes Thermometer dieser Art gesehn, meistens nennt man den Uhrmacher JÖRGENSEN[2] in Kopenhagen als den Erfinder desselben, SCHOLZ[3] dagegen beschreibt dasselbe als eine Erfindung des Uhrmachers HOLZMANN in Wien, und auch dasjenige, welches WRENCH[4] unter dem Namen *Taschenthermometer* als von ihm erfunden bekannt gemacht hat, ist ganz auf dieselbe Weise construirt. Alle diese Thermometer haben die äufsere Form einer Taschenuhr, auf deren Zifferblatte die Thermometergrade gezeichnet sind, die durch einen Uhrzeiger angegeben werden. Im Innern dieser Uhr ist auf dem Boden oder meistens an der Seite das eine Ende a eines Bügels a b aus zusammengelötheten Blechen von Stahl und Messing unverrückbar festgeschraubt, und da die beiden vereinten Metalle sich durch Wärme ungleich ausdehnen, so mufs dieser Bügel, welcher auch nach der ersten Krümmung umgebogen und mit dieser parallel laufend rückwärts wieder bis zum Anfangspuncte geführt seyn kann[5], sich abwechselnd erweitern und verengern. Am andern freien Ende desselben befindet sich daher ein eiserner Fortsatz, welcher gegen den kurzen Arm eines Winkelhebels drückt, dessen längerer Arm vermittelst eines Stif-

Fig. 119.

---

1 S. Art. *Pyrometer*. Bd. VII. S. 978.

2 Gehlen N. Journ. Th. VI. S. 500.

3 Anfangsgründe der Physik u. s. w. 3te Aufl. Wien 1827. S. 439. Jahrbücher des polytechnischen Institutes zu Wien. Th. I. S. 203.

4 Dingler polyt. Journ. Th. XLI. S. 102.

5 Auf diese Weise sind diejenigen Instrumente construirt, welche F. HOURIET zu Paris verfertigt. S. Library of useful knowledge. Hft. II. p. 33.

tes den gezahnten Sextanten oder Octanten $\alpha\beta$ bewegt, der mit seinen Zähnen in die Welle γ eingreift und diese um ihre Axe dreht. Auf letztere ist der Zeiger aufgesteckt und zeigt demnach auf die Thermometergrade, die nach einem richtigen Thermometer auf dem getheilten Kreise gezeichnet sind, welcher etwa zwei Linien breit an der Innenseite des Instrumentes befestigt ist und in der Zeichnung nicht sichtbar seyn kann, weil er sich auf der entgegengesetzten Seite von derjenigen befindet, an welcher man den innern Mechanismus sieht. Wäre der stählerne Fortsatz des Bügels ohne Schlottern mit dem Arme des Hebels fest verbunden, hätte der längere Arm des letzteren keinen Spielraum zwischen den Stiften, durch die er den Sextanten bewegt, und wäre jeder todte Gang zwischen den Zähnen und dem Getriebe vermieden, so würde jede Veränderung der Temperatur durch Vorgang oder Rückgang des Zeigers angegeben werden. Da jene Bedingungen aber nicht statt zu finden pflegen, so versieht man das Getriebe mit einer Spiralfeder, welche bewirkt, dafs die einzelnen Theile stets dicht an einander liegen und somit jede Ausdehnung oder Zusammenziehung des Bügels durch den Zeiger bemerkbar wird. Neuerdings hat Winnerl[1] in Kopenhagen dieses Thermometer wesentlich verbessert, indem vermittelst eines Schiebers zwei Zeiger ausgelöst werden, deren einer das Maximum, der andere aber das Minimum angiebt, wobei jedoch der Hauptzeiger, welcher zur Angabe der jederzeit bestehenden Temperatur dient, unausgesetzt in Thätigkeit bleibt. Eine entgegengesetzte Bewegung des Schiebers bewirkt, dafs letzterer sich allein bewegt, und so dient also der Apparat als blofses Thermometer, im Ganzen aber ist derselbe in dieser vorzüglichen Ausführung so vortrefflich, dafs Schumacher ihn für den vollkommensten unter allen ihm bekannten erklärt[2].

73) Mit allgemeinem und grofsem Beifall wurde das durch

---

1 Astronom. Nachr. Th. VII. 1829. N. 157. S. 218.

2 Eine detaillirte Beschreibung dieses Apparates, welcher die Beachtung der Meteorologen im hohen Grade verdient, wenn seine Brauchbarkeit als Maximum- und Minimumthermometer wirklich ausgezeichnet ist, würde eine Menge von Zeichnungen erfordern und doch nur zunächst die ausübenden Künstler interessiren, weswegen ich sie hier weglasse und auf die angegebene Quelle verweise.

den berühmten Uhrmacher Breguet[1] zu Paris erfundene und von ihm zugleich verfertigte Metallthermometer (*Thermomètre metallique, Thermomètre de Breguet*) aufgenommen. Das-
Fig. 120. selbe besteht aus einer spiralförmig aufgewundenen, etwa 0,4 bis 0,8 Millim. breiten Lamelle von Platin, Gold und Silber, von denen die beiden äufseren für sich genügen würden, das Gold aber dient als Mittel, um beide zusammenzulöthen. Die drei Lamellen sind ursprünglich von mefsbarer Dicke, werden aber nach der Vereinigung bis zur Dünne von etwa 0,02 Millimeter ausgewalzt, dann zu einem schmalen Streifen ausgeschnitten und in dieser Gestalt zu einem etwa 1,5 Lin. im Durchmesser haltenden Cylinder von dicht neben einander liegenden Windungen schraubenförmig zur Länge von 2 bis 4 Zoll aufgewickelt, welcher mit dem oberen Ende an dem Bügel ff befestigt ist, am unteren aber den sehr feinen Zeiger $\alpha\beta$ trägt. Letzterer schwebt frei über dem horizontalen, in Grade getheilten Kreise cc, welcher auf drei kurzen Füfsen ruht, die in ein hölzernes Fufsbret ein wenig eingelassen sind, und das Ganze ist dann mit einer Glasglocke überdeckt, die man beim Gebrauche abnimmt. Um den zarten Windungen mehr Haltung zu geben, wird durch dieselben ein geeigneter Messingstift gesteckt, dessen Knopf oben bei δ sichtbar ist. Durch ungleiche Ausdehnung der beiden äufseren Metalle wickelt sich die schraubenförmige Windung mehr auf oder mehr zusammen und bewegt hierdurch den Zeiger so, dafs er auf wachsende Grade der Kälte oder der Wärme zeigt. Das Instrument ist allerdings, hauptsächlich wegen der geringen Wärmecapacität und der aufserordentlichen Feinheit der Lamelle, sehr empfindlich, jedoch bei weitem nicht so sehr, als gewisse Arten des Differentialthermometers, seine Empfindlichkeit zeigt sich aber vorzüglich dadurch, dafs es unter eine Campane gestellt bei jeder Verdichtung und Verdünnung der Luft sofort Ausscheidung oder Bindung von Wärme zeigt, wenn auch kein anderes Thermoskop dadurch afficirt wird. Andere Künstler, z. B. Oechsle in Pforzheim, wickeln die Lamelle spiralförmig auf und verfertigen auf diese Weise sehr feine Thermometer in Form von Taschenuhren, Uhrschlüsseln

1 Ann. de Chim. et Phys. T. V. p. 312. Schweigg. Journ. XXXII. p. 497.

u. s. w. Lechevallier[1] hat vorgeschlagen, zu beiden Seiten des Hauptzeigers noch einen beweglichen Zeiger anzubringen, deren einer dann auf das Maximum, der andere auf das Minimum der Temperatur geschoben würde; allein nach dem Exemplare zu schliefsen, welches ich von Breguet selbst verfertigt besitze, ist hierzu die Spirale zu schwach.

74) Es wurde bereits oben[2] ein von A. Neumann in Vorschlag gebrachtes *Pyrometer* erwähnt, dessen nähere Beschreibung aber hierher verwiesen, weil es selbst die tiefsten Grade unter dem Gefrierpuncte zu messen dienen könnte und daher zur Classe der eigentlichen Thermometer gehört. Zuerst tadelt er an den von Holzmann und Breguet angegebenen Thermometern, dafs die nach den veränderlichen Bogen gemessenen Grade nicht gleich seyn können, weil sich die Bogen durch die Krümmung, selbst bei mefsbarer Dicke der beiden Metalle, verändern. Es ist aber hierbei zu berücksichtigen, dafs bei Breguet's Thermometer die Lamellen höchst dünn sind und das zwischenliegende Gold blofs als Bindungsmittel dient, was Neumann übersehn hat, beide Thermometer aber werden, so wie das von Chrichton angegebene, nach einem genauen Qnecksilberthermometer graduirt, wodurch die etwa statt findenden Ungleichheiten der Grade bis auf eine unmerkliche Gröfse verschwinden. Neumann bringt dagegen einen langen, schraubenförmig aufgewundenen Platindraht in Vorschlag und nimmt an, dafs dessen ganze Längenausdehnung auf den am einen Ende desselben befestigten Hebelarm, wodurch das Zeigerwerk bewegt werden soll, wirken werde, was jedoch nicht der Fall seyn kann, weil die Ausdehnung vielmehr dazu dient, die Radien der einzelnen Krümmungen zu vergröfsern; denn wollte man einen solchen Draht schraubenförmig um einen unveränderlichen Cylinder winden, so würde derselbe nach der Erhitzung in Folge eingetretener Erweiterung vom Cylinder herabgleiten, ohne Vermehrung der Zahl seiner Windungen um ganze oder nur einen Theil derselben. Das Instrument könnte aber die demselben oben irrthümlich beigelegten Vorzüge wirklich erhalten, wenn man den feinen Platindraht um einen durch Wärme sich

---

1 Bulletin univ. des Sc. math. et phys.

2 S. Art. *Pyrometer*. Bd. VII. S. 994.

nur unmerklich ausdehnenden Cylinder, etwa von Porcellan oder noch besser von Graphit, wickelte und ihn durch ein geeignetes Gegengewicht stets straff angezogen erhielte, wonach also die statt findende Verlängerung des Drahtes bei seiner bedeutenden absoluten Länge als ein vorzügliches Mittel zum Messen hoher Temperaturen dienen könnte. Von dieser Beschaffenheit hatte ich mir den Apparat gedacht, den ich daher irrthümlich für sehr zweckmäſsig erklärte, da er vielmehr nach der ursprünglichen Angabe gar nicht thermoskopisch wirken kann. Ohne Zweifel würden aber die vielen Windungen selbst bei einem sehr feinen Drahte auf der Oberfläche des Cylinders zu viel Reibung erleiden und dadurch die Erhaltung desselben in gespanntem Zustande bei wechselnden Temperaturen unmöglich werden.

Bei dem entschiedenen Bedürfniſs guter Pyrometer wird es aber nicht unnütz seyn, folgende Construction eines einfachen und leicht ausführbaren Apparates hier in Vorschlag zu bringen. Graphit ist wegen seiner Unschmelzbarkeit und sehr geringen Ausdehnung durch Wärme bereits von Brongniart und Daniell zu den Gestellen der Pyrometer gewählt worden, bei dem nächstfolgenden kommt auſserdem die geringe Reibung auf seiner glatten Oberfläche noch vortheilhaft zu statten. A B ist ein Fuſsbret von Graphit, welches nebst den drei Trägern $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ und λ aus einem soliden Stücke von solchen Dimensionen verfertigt ist, als das gehörige Verhältniſs zu dem Hauptttheile, dem Cylinder, erfordert. Auf den Trägern $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ ruht die mit ihren sehr feinen Spitzen in den ersten eingesteckte, bei dem zweiten in einen Einschnitt herabgelassene, aus Platin bestehende Axe des Graphitcylinders a b, auf dessen Umfange eine nur zweimal umlaufende Schraubenwindung unmerklich tief eingeschnitten ist. In dieser liegt für groſse Hitzegrade ein feiner Platindraht, für geringere, nur bis etwa 500° C. steigende, ein reiner Silberdraht, dessen unteres Ende s auf dem Fuſsbrete befestigt, das andere aber um die Zeigeraxe l geschlungen, am kleinen Stiftchen o festgeknüpft und endlich mit dem Platingewichte p beschwert ist. Schon hieraus wird die Wirkungsart des Apparates klar. Alle Theile desselben bestehn aus Platin und Graphit, doch können der Faden und die Scale für geringere zu messende Temperaturen auch von Silber seyn; daſs die Axe des Graphitcylinders, um

Fig. 121.

welchen der thermoskopische Draht geschlungen ist, um ihre feinen Spitzen leicht beweglich sey, ist zwar nicht nothwendig, weil der verlängerte oder verkürzte Draht ohnehin leicht über die glatte Fläche des Graphits hingleiten würde, indefs wird die Sicherheit und Empfindlichkeit des Apparates hierdurch auf jeden Fall vermehrt. Die allgemeine Beschreibung schliefst noch keine Dimensionen der einzelnen Theile in sich, die jedoch nothwendig angegeben werden müssen, weil sich danach die Brauchbarkeit im Ganzen ermessen läfst. Wir wollen daher annehmen, dafs die Ausdehnung des Platins nach Dulong und Petit[1] 0,0009839 seiner Länge für 100° C. betrage, und sonach läfst sich der Unterschied seiner Ausdehnung und der des Graphits in genähertem Werthe füglich = 0,0009 seiner Einheit annehmen. Der Umfang des Cylinders, um welchen der Draht gewunden ist, seinen Durchmesser zu 2 Par. Zoll angenommen, beträgt 6,28 Z., eine Gröfse, die füglich als eine mittlere und für die meisten Zwecke als am besten geeignet gelten kann, obgleich man auch nach Umständen gröfsere oder kleinere Dimensionen des ganzen Instrumentes wählen könnte. Hiernach geben zwei Umwindungen des Platindrahtes 12,54 Zoll, und wenn wir für die *beiden* Enden, das eine bis zum Puncte seiner Anknüpfung auf dem Fufsbrete, das andere bis an den Stift seiner Befestigung auf der Welle, noch 1,46 Zoll rechnen, um eine runde Zahl zu erhalten, so beträgt die ganze Länge des die Temperatur durch seine Ausdehnung oder Zusammenziehung messenden Drahtes 14 Zoll und seine Verlängerung durch eine Temperaturvermehrung von 100° C. $14 \times 0,0009 = 0,0126$ Z. oder 0,1512 Par. Linien. Setzen wir den Umfang der Platinwelle, um welche das letzte Ende des Drahtes geschlungen ist, deren eigene Ausdehnung durch die des umgeschlungenen Drahtes compensirt wird, in runder Zahl = 3 Linien, so wird diese durch einen Temperaturwechsel von 100° C. um ihren 20sten Theil oder um 18 Grade im Bogen umgedreht, mithin durch 1000° C. um 180 Grade oder einen Halbkreis, und wenn dann die Länge des Zeigers zu nahe 4 Zoll, also die des Bogens, welchen seine Spitze durchläuft, zu 12 Zoll angenommen wird, so ergiebt sich die Gröfse eines Grades der

1 S. Art. *Ausdehnung*. Bd. I. S. 582.

Centesimalscale = 0,072 Par. Linien und die Scale kann also füglich von zwei zu zwei Centesimalgraden abgelesen werden. Wäre statt eines Platindrahtes ein Silberdraht gewählt, dessen Ausdehnung = 0,0017 gesetzt werden kann, so würden die angegebenen Gröſsen im Verhältniſs von 17 : 9 wachsen und also die Längen der einzelnen Grade 0,136 Linien betragen.

In dieser einfachen Gestalt dürfte der Apparat am zweckmäſsigsten seyn, und ich berühre nur kurz einige sonstige Bedingungen, die sich von selbst darbieten. Dahin gehört zuerst, daſs der Zeiger genau in seinem Schwerpuncte balancirt seyn müsse, damit für seine Bewegung bloſs die Reibung, die sein eigenes Gewicht und das der Welle und der kleinen Platinkugel p erzeugen, zu überwinden wäre, welche bei der Feinheit der Spitzen, um die sich die Welle dreht, der Glätte der Graphitflächen und dem geringen absoluten Gewichte aller dazu gehörigen Theile nur unbedeutend seyn kann, so daſs die geringste Spannung des Drahtes sie leicht überwinden wird. Ferner muſs der Zeiger bloſs aufgesteckt seyn, um ihn gehörig zu richten, sowohl anfänglich bei Auffindung der festen Puncte, als auch später, wenn etwas am Apparate verrückt seyn sollte oder ein neuer Draht eingezogen werden müſste. In der angenommenen Form lieſse sich das Instrument auf ein Klötzchen von Graphit oder eine sonstige geeignete Unterlage stellen, unter gegebenen Umständen könnte dieses unnöthig seyn, auch übersieht man bald, daſs sich die Welle des Zeigers willkürlich verlängern lasse, um die Scale entfernt von der Wärmequelle zu beobachten, und ebenso bietet sich von selbst dar, daſs man die Welle mit einem gezahnten Rade oder einem gezahnten Bogentheile versehn könne, um durch Eingreifen in ein kleineres Getriebe die zu messenden Grade mehrfach zu vergröſsern.

75) e. In einem besondern Artikel[1] wurden bereits die verschiedenen Constructionen von Leslie's Differentialthermometer beschrieben. Diese haben zwar seit der Entdeckung der thermomagnetischen Apparate ihren Werth als Meſswerkzeuge sehr geringer Wärmegrade verloren, allein ihr Gebrauch als Photometer ist noch durch keine andere Vorrich-

1 S. Art. *Differentialthermometer*. Bd. II. S. 535.

tung ersetzt worden, und es wird daher nicht überflüssig seyn, die spätere Construction derselben, die ohnehin wenig bekannt ist[1], hier noch nachträglich zu beschreiben. Hauptsächlich besteht der Unterschied dieser Instrumente und der einen Art der bekannten Differentialthermometer in ihrer Kleinheit, denn die Kugeln b und c, die eine, in der Regel die obere, von schwarzem, die andere von durchsichtigem Glase, haben nur 1,5 bis 2, höchstens 2,5 Linien im Durchmesser, die Röhre, woran sie befestigt sind, ist dünn und von der Weite, als die bei gewöhnlichen Weingeistthermometern, und die ganze Länge von der unteren Biegung bis zur oberen Kugel beträgt nicht mehr als 2,5 bis 5 Zoll. Die Röhre wird mit gefärbtem, sehr reinem Weingeiste oder Schwefeläther gefüllt[2] und nach hinlänglichem Sieden zur Entfernung der Luft zugeschmolzen, wenn gerade so viel der Flüssigkeit noch zurückgeblieben ist, als hinreicht, die kürzere Röhre von der Kugel bis durch die Krümmung gefüllt zu erhalten, eine Bedingung, welche die Verfertigung sehr erschwert[3]. Zur Montirung dient ein hölzerner Fuſs mit einem verticalen Cylinder, welcher bei a a zur Hälfte weggeschnitten ist. Auf die hierdurch gegebene Fläche, worauf die in feine willkürliche Theile getheilte Scale gezeichnet ist, wird das Photometer befestigt, dessen untere Krümmung in den hölzernen Cylinder eingesenkt ist; am untern Theile dieses Cylinders bei d d befindet sich eine Schraube, um einen hohlen hölzernen Cylinder A aufzuschrauben. Hierdurch wird das Instrument im völligen Dunkel erhalten, bei der Wegnahme des Deckels aber wirkt das verschieden intensive Licht auf die beiden Kugeln und bewirkt eine ungleiche Höhe oder eine Veränderung des Standes der Flüssigkeit in beiden Schenkeln.

Fig. 122.

Fig. 123.

---

1 Ich finde sie bloſs in Library of useful knowledge. Lond. 1828. Part II. p. 42. beschrieben, habe sie aber zu Edinburg in ihren verschiedenen Modificationen gesehn.

2 Welche von beiden Flüssigkeiten empfindlicher sey, habe ich an meinen Exemplaren noch nicht aufgefunden. Ein leicht wahrnehmbarer Unterschied scheint mir nicht vorhanden zu seyn, doch fand Landriani die Empfindlichkeit des absoluten Alkohols und des Schwefeläthers wie 11:15. S. Brugnatelli Giornale di Fis. Dec. II. T. I. p. 342.

3 Sie werden vom Mechanicus Loos in Darmstadt sehr gut verfertigt.

76) Rumford[1] construirte ein Instrument, bestimmt um sehr geringe Wärmemengen, zugleich auch den Unterschied zweier Wärmequellen zu messen, wodurch es Aehnlichkeit mit Leslie's Differentialthermometer erhält, und nannte es *Thermoskop*. Eine horizontale, 17 Zoll lange Glasröhre de, auf einem Brete befestigt, an beiden Enden rechtwinklig aufwärts gebogen, ist mit den 10 Zoll langen, vertical aufstehenden Theilen ad, a'e verbunden, welche oben mit einer Kugel von 1,5 Zoll Durchmesser versehn sind. Die Weite der Röhre soll so seyn, dafs 1 Z. Länge derselben 15 Grains Quecksilber fafst. Durch die offene Spitze b wird ein Tropfen gefärbten Weingeists hineingebracht, welcher in der Röhre ungefähr die Länge von 0,75 Zoll einnimmt, dann wird die Oeffnung der Spitze b an der Lampe zugeschmolzen und Sorge getragen, dafs bei gleicher Temperatur beider Kugeln der Weingeist sich genau in der Mitte der horizontalen Röhre befindet. Wirken gleiche Wärmequellen auf beide Kugeln, so bleibt der Weingeist unbeweglich, ungleiche aber dehnen die Luft verschieden aus, und diese treibt den Weingeist nach derjenigen Seite hin, deren Kugel am wenigsten erwärmt ist, wobei Rumford zu finden glaubte, dafs die Intensitäten der Wärme den Quadraten der Entfernung umgekehrt proportional seyen. Will man die Wirkung der einen Wärmequelle oder die nach einer Seite hin sich äufsernde aufheben, so geschieht dieses leicht durch einen Schirm von Goldpapier, auch kann man die Kugeln gegen gewisse Einflüsse empfindlicher machen, wenn man sie mit schwarzem Tusch überzieht. Dieser Apparat, sofern er als sehr empfindliches Luftthermoskop dient, ist für den jedesmaligen speciellen Gebrauch vielfach abgeändert worden, indem man statt der Kugeln flache Cylinder mit grofsen Oberflächen anbrachte, die Röhre bedeutend verlängerte, zuweilen auch nur einen einzigen Luftbehälter mit einer langen Glasröhre wählte u. s. w. Rumford wufste bei der Construction dieses Apparates schwerlich, dafs ein ähnlicher und obendrein weit empfindlicherer, *Mikrocalorimeter* (aus dem griechischen Worte μικρὸς klein, dem lateinischen *calor* Wärme und dem griechischen μετρέω ich messe, nicht

Fig. 124.

---

1 Philosoph. Trans. 1804. P. I. p. 99. Mém. de l'Inst. T. VI. p. 71.

eben beifallswerth, zusammengesetzt) genannt, durch G. G. Schmidt[1] erfunden und von Ciarcy ausgeführt worden war. Auch dieses besteht aus einer horizontalen, drei Fuſs langen oder selbst noch längeren Glasröhre c d, welche an beiden Enden zuerst etwas aufwärts, dann gekrümmt herabwärts gebogen und mit zwei Kugeln a, b versehn wird. Durch die feine Spitze der einen Kugel bringt man etwas gefärbten Weingeist in den Apparat, schafft alle darin enthaltene Luft durch Siedenlassen des Weingeistes fort, verschlieſst sogleich die Spitze und schmelzt diese an der Lampe zu. Von dem Weingeiste bleibt ungefähr so viel in den Kugeln zurück, daſs nicht mehr als 0,25 bis 0,2 ihres Inhalts damit gefüllt und er in beiden gleichmäſsig vertheilt ist; es wird dann dafür gesorgt, daſs bei gleicher Wärme beider Kugeln ein Faden Weingeist von etwa 1 Zoll Länge sich in der Mitte der Röhre bei *a* befindet, welcher bei ungleicher Temperatur der Kugeln durch die mehr elastischen Weingeistdämpfe der einen nach der Seite der andern hingetrieben wird. Weingeistdämpfe sind ausnehmend empfindlich gegen Wärme, und um so mehr, je höher die Temperatur derselben ist; im Allgemeinen wächst die Empfindlichkeit mit der Gröſse der Kugeln und der Enge der Röhre, weswegen die erstere eine Weite von 1,5 Zoll, die letztere von nicht mehr als 0,5 Linie innerem Durchmesser haben müssen, auch ist erforderlich, daſs die Füllung mit sehr reinem Alkohol oder mit Schwefeläther geschehe. Eine eigentliche genaue Messung der Wärme nach Thermometergraden ist zwar mit diesem Apparate nicht wohl möglich, wenn man aber beobachtet, durch was für lange Räume der Weingeist in der Röhre in Folge einer geringen Temperaturerhöhung der einen Kugel getrieben wird, so kann man begreiflich finden, daſs Schmidt die Empfindlichkeit dieses Thermoskopes zu $\frac{1}{1000}$ eines Grades nach R. angiebt.

Fig. 125.

Alle frühere, zum Messen geringer Wärmeunterschiede bestimmte Apparate werden bei weitem durch die neuesten thermoelektrischen oder thermomagnetischen übertroffen. Sobald die Entdeckung gemacht worden war, daſs durch Erwärmen der Löthstellen verschiedener Metalle ein elektrischer Strom entstehe,

1 Handbuch der Naturlehre. Gieſsen 1801. 2te Auflage. 1813. S. 319.

welcher die Magnetnadel ablenke, lag der Gedanke sehr nahe, diese Abweichung der Magnetnadel zum Messen der Wärme zu benutzen, und durch weiteres Verfolgen dieser Idee gelangte man allmälig zur Construction der jetzt bekannten feinsten thermomagnetischen Thermoskope und Thermometer, die mit vollem Rechte *Mikrothermoskope* und *Mikrothermometer* heifsen können. Die Hauptmomente der allmäligen Verbesserung dieser Instrumente sind folgende.

77) f. Von unerwartet grofsem Einflusse auf die Thermometrie war die Erfindung der Nobili'schen Doppelnadel und die Vervollkommnung des *Multiplicators* oder *Galvanometers*, weil beide vereint die geringsten elektrischen Strömungen durch Ablenkung der Magnetnadel sichtbar machen. So giebt der oben beschriebene Apparat[1] schon ein höchst empfindliches Thermoskop, Becquerel[2] ging aber sogleich bei seiner Wiederholung der durch Seebeck angegebenen thermoelektrischen Versuche zur eigentlichen Thermometrie über, indem er vermittelst zweier aus verschiedenem Platin verfertigten, an ihren einen Enden vereinten Drähte die Hitze der verschiedenen Theile einer Weingeistflamme mafs, wobei er von dem durch spätere Versuche bestätigten Satze ausging, dafs die erzeugten Ablenkungen der Magnetnadel den Intensitäten der Hitze um so mehr direct proportional sind, je höher die Schmelzpuncte der gewählten Metalle liegen. Seitdem ist, die Aufgabe im Allgemeinen aufgefafst, Becquerel auf dieser einmal von ihm betretenen Bahn, die Temperaturen durch blofs zwei vereinte Metalle, also durch Anwendung der einfachen thermomagnetischen Kette zu messen, fortgeschritten, Nobili dagegen bemühte sich, die Kraft durch Verbindung mehrerer abwechselnd vereinter Metalle zu verstärken oder die zusammengesetzte thermoelektrische Kette anzuwenden, Beide aber sind zu gleich wichtigen, höchst interessanten Resultaten gelangt. Nobili[3] entdeckte sofort nach der Erfindung der Dop-

1 S. Art. *Thermomagnetismus.* Fig. 50.

2 Ann. Chim. et Phys. T. XXXI. p. 371. Poggendorff Ann. IX. 357.

3 Biblioth. univ. T. XXIX. p. 124. Vergl. Dublin Journ. N. II. p. 227.

pelnadel und mit Anwendung des Multiplicators, dafs geringe Temperaturunterschiede in der Löthstelle zweier verbundener Metalle einen elektrischen Strom erzeugen, welcher der in einem Multiplicator an einem Coconfaden aufgehangenen Doppelnadel eine sehr beträchtliche Abweichung gab. Durch weiteres Verfolgen des ganzen Problems gelangte er einige Jahre später zur Construction seines ersten *Thermomultiplicators* oder *elektrischen Thermoskopes*, eines Apparates, welcher wohl am zweckmäfsigsten der Analogie nach die *zusammengesetzte thermoelektrische Säule* oder *Kette* genannt werden könnte, da die Bezeichnung *Multiplicator* schon für einen andern Apparat in Anspruch genommen ist. Dieser sehr empfindliche thermoskopische Apparat[1], welchen Nobili *Pila a Scatola* nennt, besteht aus sechs geeigneten Stücken Antimon und Wismuth, die mit ihren Enden zusammengelöthet und in einer gemeinschaftlichen verticalen Ebene liegend die 11 Löthstellen und die beiden Pole A und B zeigen. Um die Wirkungen der ungleichen Erwärmung auf die eine Reihe der Löthstellen mehr zu concentriren, werden diese 6 Combinationen in einen Kreis zusammengebogen und in eine Büchse SS gebracht, aus welcher die beiden etwas verlängerten Enden oder Pole A′, B′ hervorragen, um sie mit den beiden Drahtenden des Multiplicators in Verbindung zu bringen. Man sieht bei dieser Vorrichtung nur die eine ungerade Reihe der Löthstellen, 1, 3, 5, 7, 9, 11, die geraden sind durch die Büchse verdeckt und zugleich in Gyps eingeschlossen, indem die Büchse nach dem Einsetzen der 6 Combinationen mit Gyps oder Harzkitt ausgefüllt wurde, um dadurch zu bewirken, dafs die Metalle an keiner andern Stelle, als wo sie zusammengelöthet sind, mit einander in Berührung kommen. Dieser Apparat zeigte sich sofort sehr empfindlich, gab unter der Campane augenblicklich die Bindung der Wärme durch Verdünnung der Luft an, und selbst nach den verschiedenen Seiten eines Zimmers hin gerichtet machte er den Einflufs der ungleichen Zurückwerfung der Wärme von den Wänden sichtbar. Um das Hindernifs zu beseitigen, welches gegen die leichtere Aufnahme der Wärme aus der Blänke der Metallflä-

Fig. 126.

Fig. 127.

1 Bibliothèque univ. T. XLIV. p. 225. Poggendorff Ann. XX. 245. Schweigger's Journ. Th. LX. S. 433.

chen entspringt, pflegt man diese mit einem schwarzen Ueberzuge zu bedecken.

78) Nobili erwähnt bei der Beschreibung dieses Apparates, dafs Melloni sich einen solchen verschafft, ihn aber in einigen Stücken verbessert, hauptsächlich durch verminderte Gröfse der vereinten Elemente verfeinert habe, und nach der Beschreibung ist dieses abgeänderte Thermoskop kein anderes als dasjenige, welches später durch beide Gelehrte gemeinschaftlich bekannt gemacht, von Letzterem aber zu seinen wichtigen Untersuchungen über das Verhalten der Wärme gebraucht wurde. Nobili brachte es sofort dahin, dafs er auf diese, sogleich näher zu beschreibende Weise 40 Elemente, nach beiden Seiten symmetrisch geordnet und also auf jeder durch Wärme afficirbar, mit einander vereinigte und dadurch ein Thermoskop von wahrhaft erstaunenswürdiger Empfindlichkeit erhielt. Rücksichtlich seiner Bemühungen, diese Apparate weiter zu vervollkommnen, bezieht er sich selbst auf die Sammlung seiner Memoiren[1], die ich jedoch nicht zur Hand habe; inzwischen sind zwei eigenthümliche Constructionen von ihm bekannt geworden[2], die ich theils aus Achtung gegen das Andenken des berühmten Erfinders, theils weil sich vielleicht neue Ideen daran knüpfen lassen, hier kurz erwähne. Der eine Apparat, den er *Pila a Raggi* nennt, besteht aus einer möglichst grofsen Menge vereinter dünner Stangen oder nadelartiger Stäbchen von Wismuth und Antimon, die auf einer Kreisfläche so zusammengelegt sind, dafs die eine Reihe ihrer Löthstellen sich um ein Centrum in einem Kreise von etwa nur zwei Linien im Durchmesser vereinigt. Dieser Kreis der von der Mitte aus strahlenartig aus einander laufenden Elemente wird in eine Dose gelegt, deren Mitte an beiden Seiten ein Loch hat, um die Wärmestrahlen eindringen zu lassen, die sonach die eine Reihe der Löthstellen treffen, und auf die eine dieser Oeffnungen ist ein etwa 2 Zoll langes Rohr gesetzt, welches am andern Ende mit einem Deckel verschlossen wird, um durch ein veränderlich grofses Löchel-

---

1 Memorie cet. Del Cav. Prof. L. Nobili. Firenze 1834. T. II. p. 47.

2 Descrizione di due nuove pile termoelettriche cet. Firenze li 24 Settembre 1834.

chen in letzterem Licht einzulassen, wenn man dessen Wärmeerregung prüfen will. Der zweite Apparat, welchen Nobili in Vorschlag gebracht hat, wird von ihm *Pila a fessura* genannt; die verbundenen Elemente der thermoelektrischen Kette liegen dabei in derselben Ebene und die eine Reihe der Löthstellen liegt in einer diese schneidenden Linie. Die Construction wird völlig klar durch die Zeichnung, worin a und b die Elemente Antimon und Wismuth, A und B die beiden Pole und die Zahlen 1, 3, 5, 7 die eine Reihe der in gerader Linie liegenden Löthstellen, die geraden Zahlen 2, 4, 6 aber die andern Löthstellen bezeichnen. Die Lage der Löthstellen in einer Linie ist für viele Versuche wichtig, wo nur ein einzelner Wärmestreifen zur Untersuchung kommt, namentlich wenn es sich um die Auffindung der Wärmeinterferenzen handelt. Nobili hatte daher schon vorher[1] einen hierzu geeigneten Apparat ersonnen und *pila a pettine* genannt, weil die eine Reihe der Löthstellen nach Art der Zinken eines Kammes über einander liegt.

Fig. 128.

79) Das Hauptinstrument, welches allen späteren zum Grunde liegt und durch beide Gelehrte, Nobili und Melloni, gemeinschaftlich erfunden wurde[2], besteht aus einer thermoelektrischen Säule und einem hierfür geeigneten Galvanometer oder Multiplicator. Die Säule besteht, wie die Zeichnung sie und ihre Fassung im verticalen Durchschnitte zeigt, aus 38 Paaren Wismuth und Antimon mit zwei Drähten a und b, die von den äufsersten Stücken diese Metalle, also den Polen ausgehn und den elektrischen Strom zum Multiplicator führen. Die Stücke, welche als Elemente der Säule dienen, sind von abgeplatteter prismatischer Gestalt, an den Enden keilförmig verjüngt und unter sehr spitzen Winkeln zusammengelöthet, wie man dieses bei einigen derselben, nach der Seitenansicht gezeichnet, wahrnimmt. Die einzelnen Verbindungen der hieraus entstandenen zusammenhängenden Metallkette sind so geordnet, dafs sie sich etwa in ihrer Mitte sämmtlich in einen Ring vereinigen lassen, wobei sich von selbst versteht, dafs sie von dem metallenen Ringe elektrisch isolirt seyn müssen, so wie es erforderlich ist, dafs die zu-

Fig. 129.

Fig. 130.

1 Memorie cet. T. II. p. 48.
2 Poggendorff Ann. XXVII. 440.

sammengelötheten Stücke blofs an diesen Löthstellen, sonst aber nirgends, unter sich und mit andern in Berührung kommen dürfen. Die beiden Metalle sind durch die geeigneten Buchstaben a, b (Antimon, Wismuth) bezeichnet, die eine Reihe der Löthstellen, die der ungeraden, liegt in derselben vorderen Ebene, parallel mit dem Ringe, die andere, die der geraden, in der andern hinteren; zwei von den Polen ausgehende, durch den Ring hindurchgeführte Drähte c, c' sind so zugespitzt, dafs sich die Hülsen F, F', welche mit den Enden des Multiplicatordrahtes in Verbindung stehn, metallisch genau berührend darauf stecken lassen. Es ergiebt sich hiernach von selbst, dafs bei Erwärmung oder Erkältung der einen Reihe von Löthstellen, während die andere die bestehende Temperatur behält, ein elektrischer Strom den Galvanometerdraht durchläuft und die Magnetnadel nach der einen oder andern Seite ablenkt. Am Ringe endlich ist ein Zapfen r mit einer Schraube befestigt, um den Apparat auf einem Gestelle festzuschrauben, welches eine Drehung desselben nach einer beliebigen Gegend hin gestattet. Die Erfinder bemerken mit Recht, dafs dieses Thermoskop durch die leichte Aufnahme der Wärmestrahlen einen grofsen Vorzug vor allen Wärmemessern hat, bei denen die Glashülle hindernd wirkt, weswegen dasselbe sich bei den ersten Versuchen sogleich weit empfindlicher zeigte, als ein Rumford'sches Thermoskop. Um die Wärmestrahlen, insbesondere wenn sie von entfernten Orten herkommen, besser aufzufangen, wird auf die Vorderseite des Instrumentes eine kegelförmige Hülle R aufgesteckt, auf die hintere aber ein Cylinder T, um die entgegengesetzten Löthstellen gegen den Einflufs aller äufsern Wärmequellen zu schützen; beide sind inwendig geschwärzt und mit einem Deckel versehn, den man nach Umständen schliefsen oder öffnen kann.

Fig. 131. 132.

80) Die hier beschriebene Construction der durch ihre ganz aufserordentliche Empfindlichkeit so ausgezeichneten *thermoelektrischen Thermometer* hat man seitdem im Wesentlichen beibehalten, und insbesondere sind sie von Melloni zu seinen wichtigen Untersuchungen über das Verhalten der Wärme angewandt worden, wovon seiner Zeit die Rede seyn wird[1]. Sie

---

1 S. Art. *Wärme, strahlende.*

werden von GOURJON in Paris zugleich mit den übrigen, von MELLONI gebrauchten Apparaten verfertigt, man erhält sie aber sehr fein und höchst sauber gearbeitet von OERTLING in Berlin, zugleich mit einem geeigneten Multiplicator, für 32 Thaler, und nach einem solchen Exemplare ist die Zeichnung entworfen. Man erkennt darin bald das messingne Stativ mit seinem Fuſse AB und dem Träger ab, welcher hohl und mit einer in ihm beweglichen massiven Stange versehn ist, um das Instrument vermittelst einer Klemmschraube bei b höher oder niedriger zu stellen. In dem messingnen Cylinder ss befinden sich 28 an ihren Enden zusammengelöthete Paare von Wismuth und Antimon[1], welche vorn in 4 Reihen, jede mit 7 Elementen so geordnet sind, daſs die flachen, scharf keilförmig zugespitzten Enden eine mit der vordern Grundfläche des sie einschlieſsenden hohlen Cylinders ss parallele, etwa 0,5 bis 1 Linie zurücktretende Ebene bilden, der Cylinder hat vorn einen aufgesteckten und hinten einen aufgeschraubten Deckel, ist vermittelst des Scharnieres g in verticaler und vermittelst des in dem hohlen Träger ab steckenden Stabes in horizontaler Ebene drehbar, wobei er jedoch durch Reibung in jeder ihm gegebenen Lage ruht. An beiden Seiten des Cylinders, einander gegenüber, sind messingne Kügelchen *α*, *α* angeschraubt (wovon nur eins in der Zeichnung sichtbar ist), die mit den Polen der Säule in leitender Verbindung stehn, in welche dann die zum Multiplicator führenden Leitungsdrähte vermittelst kleiner Schrauben festgeklemmt werden. Letztere müssen von angemessener Dikke, ungefähr 0,1 Lin. stark seyn und stehn mit den Windungen des Multiplicators in unmittelbarer Verbindung, dessen Construction bereits beschrieben worden ist[2]. Bei den von GOURJON verfertigten Apparaten haben die Nadeln 53 Millim. Länge, der Multiplicatordraht hat 0,76 Millim. Dicke und ist 150mal umgewunden.

Fig. 133.

Wie schon erwähnt worden, ist BECQUEREL[3] der anfänglichen Construction thermoelektrischer Säulen treu geblieben

1 MELLONI's Säule enthält 50 Paare. S. BECQUEREL Traité expérimental de l'Électricité. T. III. p. 425.

2 S. Art. *Multiplicator*. Bd. VI. S. 2281.

3 Traité expérimental de l'Électricité. T. IV. p. 1 ff.

und hat durch Verbesserung dieser Combinationen zweier Elemente für die Thermometrie wohl unzweifelhaft ebenso viel genützt, als Nobili und Melloni durch die zusammengesetzte Säule, hauptsächlich insofern es ihm gelungen ist, eigentliche Thermometer zu erhalten, statt dafs die letztgenannten Gelehrten nur Thermoskope, allerdings von ganz unerwarteter Feinheit, geliefert haben. Das Princip, worauf die Messung der Wärme beruht, besteht ganz einfach darin, dafs zwei Löthstellen der Apparate in Anwendung kommen, deren eine auf einer genau bestimmten Temperatur erhalten, die andere der zu messenden ausgesetzt wird, und die dann nach der einen oder andern Seite statt findende Abweichung der Magnetnadel des Multiplicators giebt den Unterschied beider Temperaturen, nachdem man vorher durch genaue Versuche ausgemittelt hat, welches Verhältnifs zwischen der Menge der von der Nadel durchlaufenen Bogentheile zu der Zahl der Thermometergrade statt findet.

81) Becquerel unterscheidet diejenigen thermoelektrischen Apparate, die bestimmt sind, höhere Temperaturen zu messen, von denen, die für mittlere, etwa von — 50° bis + 100° C., in Anwendung kommen. Ein solcher der erstern Art ist bereits[1] erwähnt worden und besteht aus zwei Drähten von verschiedenartigem Platin. Man wählt für hohe Temperaturen absichtlich zwei in der thermoelektrischen Reihe nicht weit von einander abstehende Metalle, damit die Abweichung der Magnetnadel nicht zu stark ist, also auch Platin und Palladium, ungefähr 0,3 Millim. dick, die man mit ihren einen Enden nur durch einen Knoten zusammenschürzt. Diese beiden vereinten Metalle haben, ebenso wie zwei verschiedene Arten Platin, die Eigenschaft, dafs bis mindestens 350° C. die Abweichungen der Magnetnadel in Folge des elektrischen Stromes, welcher entsteht, wenn man eine der Löthstellen auf 0° C. oder auf einer sonstigen constanten niedrigen Temperatur erhält, die andere aber der Hitze aussetzt, den Graden der Wärme fortwährend proportional bleiben. Mit einem Apparate aus zwei Platindrähten mafs Becquerel in Verbindung mit Brongniart die Hitze eines Porzellanofens zu Sèvres und fand sie bei einer Abweichung der Magnetnadel von 27°,5

---

1 S. Art. *Thermomagnetismus*, am Ende.

nach dem vorher ausgemittelten Verhältnisse = 2542°,8 C., wonach also die höchsten Temperaturen hierdurch meſsbar sind.

82) Sollen geringere Temperaturen unter 100° C. gemessen werden, so müssen die Metalle zu den besser leitenden gehören, damit der durch geringe Wärmeunterschiede erregte elektrische Strom die Magnetnadel genügend zur Abweichung bringt, und Becquerel giebt daher einer Verbindung von Kupfer und Eisen den Vorzug. Dahin gehört dann auch der Apparat, womit er selbst und Breschet die Temperaturen in verschiedenen Tiefen des Genfersees untersucht haben[1] und den man überhaupt bei unzugänglichen oder mit sonstigen Thermometern nicht wohl erreichbaren Orten anwendet. Senkt man die Drähte ins Wasser oder ist ein nachtheiliger Einfluſs von Säuren zu fürchten, so müssen sie verzinnt, mit Seide umwickelt und mit Pech oder Harzfirniſs überzogen werden. Man windet dann die vereinten Drähte um eine Rolle, die sich mit einer Handhabe umdrehn läſst, und senkt die beiden zusammengelötheten Enden bis an den Ort hinab, dessen Temperatur man messen will. Auf diese Weise kann die Wärme in gröſseren Tiefen, z. B. in Bohrlöchern, gefunden werden, sobald sie von derjenigen der Oberfläche, wo sich die andere der Löthstellen befindet, verschieden ist, und wenn der Doppelfaden der Metalldrähte nicht länger als etwa 20 Meter ist, so sollen sogar Bruchtheile eines Centesimalgrades meſsbar seyn. Will man die Temperaturen der Wasserschichten in Seeen bis 150 oder 200 Meter Tiefe messen, so senkt man die zusammengelötheten Enden, nachdem sie mit einem Gewichte von etwa zwei Kilogrammen beschwert worden sind, langsam hinab, und gewahrt sogleich, durch die beobachtete Ablenkung der Magnetnadel, ob die Temperatur sich ändert, was selbst ein Registerthermometer nicht leistet. Für geringere Tiefen ist eine Dicke der Drähte von 1 Millim. hinreichend, müssen sie aber bis 400 Fuſs lang oder länger seyn, so werden Temperaturunterschiede von 10° bis 15° nur schwer angezeigt, und man müſste dickere Drähte nehmen, wenn dadurch der Apparat nicht zu unbehülflich würde.

Fig. 134.

83) Von gröſster Wichtigkeit ist die Anwendung dieser

1 S. Art. *Temperatur*. S. 270.

Gattung von Apparaten zur Erforschung der Temperaturen in den Organen lebender Pflanzen und Thiere, wohin man selbst mit den kleinsten Thermometern entweder überhaupt oder ohne nachtheilige und die Versuche selbst störende Verletzungen nicht dringen kann, nicht zu gedenken, dafs andere Thermometer stets eine Menge Wärme absorbiren, ehe sie nach Verlauf einiger Zeit die Temperatur der Umgebung anzeigen, weswegen sich schnell vorübergehende Wechsel mit ihnen nicht messen lassen. Bei den thermoelektrischen Apparaten genügen Nadeln aus zwei zusammengelötheten Metalldrähten von nicht mehr als 0,5 Millim. Dicke und einem Decimeter Länge, zuweilen blofs mit ihren Spitzen zusammengelöthet und übrigens durch eine feine Membrane getrennt; die andern beiden Enden werden dann mit den Drahtenden eines empfindlichen Thermomultiplicators oder Galvanometers verbunden. Kupfer und Stahl eignen sich vorzüglich zu solchen Apparaten, die Becquerel wegen ihrer Bestimmung zum Messen der Wärme in Pflanzen und Thieren *thermophysiologische* nennt und deren Empfindlichkeit so grofs seyn soll, dafs sie 0°,01 C. angeben. Dabei ist erforderlich, dafs die andere Löthstelle in einer constanten, von der zu untersuchenden wenig verschiedenen Temperatur erhalten werde. Für diesen Zweck hat Sorel einen eigenen Apparat ersonnen, es scheint mir aber nicht nöthig, die Beschreibung desselben hier mitzutheilen, da sich leicht geeignete Vorrichtungen hierfür herstellen lassen. Um zu wissen, welche Temperatur die Spitze der thermoelektrischen Nadel beim Einstechen in einen vegetabilischen oder animalischen Körper gehabt habe, darf man sie nur in ein Gefäfs mit Wasser tauchen und dessen Temperatur so lange erhöhn, bis die Magnetnadel eine gleiche Abweichung erreicht; aufserdem aber giebt die Abweichung der Magnetnadel bei einem gemessenen Unterschiede der Wärme dieses Wassers und der Umgebung das Verhältnifs derjenigen Wärmegrade an, die eine gewisse Abweichung der Magnetnadel bewirken. Es ist bei diesen Apparaten nicht nöthig, die Enden der Drähte an die des Multiplicators zu löthen, sondern es genügt, sie mehrmals so umzuschlingen, wie die Zeichnung angiebt, da es genugsam erwiesen ist, dafs genaue Berührung blanker Metallflächen zur Fortführung des elektrischen Stromes hinreicht. Solche Windungen kann man nach

Fig. 135.

Belieben aufstecken und abziehn, dann ist es aber räthlich, ihre inneren Flächen zuweilen mit einer kleinen runden Feile oder einem geeigneten Ausräumer wieder blank zu machen. Beim Einsenken der Löthstelle zweier Drähte in einen lebenden vegetabilischen oder animalischen Körper kann es sich ereignen, dafs die beiden Metalle mit der vorhandenen Feuchtigkeit eine hydroelektrische Kette bilden, deren Wirkungen dann von den thermoelektrischen nicht leicht zu unterscheiden sind. Man vermeidet dieses, wenn man die einzustechenden Drähte mit Schellackfirnifs überzieht und diesen Ueberzug von Zeit zu Zeit erneuert, was jedoch den Schmerz beim Einstechen vergröfsert. Endlich ist aber noch zu bemerken, dafs man die Leitungsdrähte, welche von den zusammengelötheten Nadeln zum Multiplicator führen, nicht beträchtlich verlängern oder verkürzen darf, weil sonst das Verhältnifs der Abweichungen der Magnetnadel zu den Unterschieden der Temperaturen verändert wird. Im Allgemeinen ist es gleichgültig, ob die mit ihren einen Enden zusammengelötheten Drähte (am zweckmäfsigsten von Eisen und Kupfer) eine gerade Linie bilden, oder beliebig gegen einander geneigt sind, in den meisten Fällen aber wird man am zweckmäfsigsten die Form von Lancetten wählen, die am Ende, da wo sich die Löthstelle befindet, zugespitzt oder schwach abgerundet, gerade oder gebogen sind. Die Länge der Löthstelle, welche beide Enden der Drähte verbindet, beträgt nur etwa eine Linie, und da sie sich aufserdem nirgends metallisch berühren dürfen, so wird der Rest mit einem feinen Häutchen (Ammiumhäutchen, nach Becquerel die feine Haut, welche den Kiel der Gänsefedern zu umgeben pflegt) überzogen, die man mittelst etwas Firnifs aufklebt und diesen Firnifs von Zeit zu Zeit erneuert. Um zu erfahren, ob aufser den thermoelektrischen Wirkungen noch hydroelektrische erzeugt werden, wie man stets fürchten mufs, taucht man die gelöthete Spitze in Wasser, dessen Schichten eine durchaus gleichmäfsige Temperatur haben, und senkt sie dann mehrere Centimeter tiefer ein. Wenn hierdurch die Abweichung der Magnetnadel sich nicht ändert, so ist man gegen den Einflufs hydroelektrischer Strömungen gesichert. Ebenso müssen die sämmtlichen Nadeln, wenn man deren mehrere zu dem nämlichen Versuche gebrauchen und die erzeugten Abwei-

Fig. 136.

chungen der Magnetnadel auf gleiche Weise berechnen will, aus ganz gleichen Metallen, also aus den nämlichen Drähten verfertigt seyn, weil eine Verschiedenheit der im Ganzen gleichen Metalle ein anderes Verhältnifs der magnetischen Ablenkungen und der diese bedingenden Wärmegrade herbeiführt. Um eine Vorstellung von der Methode zu erzeugen, die man bei Versuchen dieser Art anwendet, möge die Zeichnung derjenigen Apparate dienen, vermittelst deren Becquerel und Breschet die Temperaturen der verschiedenen Theile des thierischen Körpers und die Wärmeentwickelung durch Contraction der Muskeln untersuchten. Hierin sind die in den Muskel gebrachte Löthstelle, die zweite Löthstelle und das Gefäfs mit Wasser, worin letztere stets auf der Temperatur der mittleren thierischen Wärme erhalten wurde, der Multiplicator und die Verbindung desselben mit dem thermoelektrischen Apparate von selbst klar[1]. Eine Mittheilung der Resultate, die zunächst der Physiologie angehören, würde hier nicht am rechten Orte seyn, wichtig aber ist zu bemerken, dafs ein Wärmeunterschied von 1° C. eine Ablenkung der Magnetnadel von 10 Graden bewirkte und man daher sehr gut 0°,1 Temperaturunterschied messen konnte.

Fig. 137.

84) Auch Pouillet[2] hat thermoelektrische Apparate zum Messen sehr hoher und sehr tiefer Temperaturen benutzt, wie bereits erwähnt worden ist[3], weswegen es hier genügt, zu bemerken, dafs die von ihm angewandte einfache thermoelektrische Säule aus Eisen und Platin bestand, indem in die Schwanzschraube eines Flintenlaufes ein Platindraht mit genauer metallischer Berührung eingesenkt und festgeklemmt war, die Fortsetzung desselben aber durch eingebrachte Magnesia oder Asbest von den Wandungen des Eisens getrennt gehalten wurde, ohne auch die Ränder des Loches in einer am andern

1 Am schönsten und vollständigsten findet man Zeichnung und Beschreibung dieses Apparates und der Versuche in Annales des Sciences naturelles cet. Sec. Sér. T. III. Zoolog. Par. 1835. p. 257.

2 Aus Compte rendu 1836. II. p. 782. in Poggendorff Ann. XXXIX. 574.

3 S. Art. *Thermomagnetismus.* Der dort beschriebene und hier wieder erwähnte Apparat besteht im Wesentlichen aus einem an seinen beiden Enden mit Eisen metallisch verbundenen Platindrahte, aber die Wahl des Flintenlaufes ist dabei nicht zweckmäfsig.

Ende des Laufes eingebrachten Schraube, durch welches der Platindraht hervorragte, zu berühren. Zum Messen hoher Kältegrade, namentlich der durch Verdampfung fester Kohlensäure THILORIER's erzeugten [1], gebrauchte POUILLET [2] eine einfache Kette aus Kupfer und Wismuth. Um die Thermometergrade zu bestimmen, welche bei diesem speciellen Apparate den Ablenkungen der Magnetnadel [3] zugehören, wurde die eine Löthstelle in einer constanten Temperatur von 0° C. erhalten, die andere wachsenden Temperaturen ausgesetzt, die durch ein gewöhnliches Quecksilberthermometer genau bestimmt waren, und die so erhaltenen Abweichungen der Magnetnadel gaben dann das Maſs der Temperaturen. Diese Versuche lieferten folgende Resultate:

Versuch	Temperatur der ersten Löthstelle	Temperatur der zweiten Löthstelle	Beobachtete Ablenkung	Sinus der Ablenkung	Mittlere Intensität für 1° C.
Nr. 1	0°	17°,6	11°,30	0,1994	0,01134
— 2	0	21,0	13,45	0,2377	0,01132
— 3	0	30,0	20,00	0,3420	0,01140
— 4	0	40,0	26,45	0,4500	0,01125
— 5	0	50,0	34,30	0,5664	0,01133
— 6	0	60,0	42,40	0,6777	0,01128
— 7	0	66,0	48,00	0,7489	0,01134
— 8	0	77,0	61,30	0,8788	0,01141
				Mittel	0,01134

Aus dieser Tabelle ergiebt sich, daſs die thermoelektrische Kette aus Kupfer und Wismuth eine den Temperaturen von

1 Vergl. *Wärme, künstliche Kälte.*

2 Aus Compte rendu 1837. T. I. p. 513. in Poggendorff's Ann. XLI. 147.

3 Es ist nicht überflüssig, zu bemerken, daſs bei allen Apparaten dieser Art nicht die Nobili'sche Doppelnadel, die zu empfindlich ist und minder genaue Messungen verstattet, sondern die einfache Nadel angewandt wird, wobei man den aus einem dünnen Kupferblechstreifen gewundenen Multiplicator so drehn muſs, daſs die Längenaxe seiner Windungen mit der Axe der Magnetnadel stets in die nämliche verticale Ebene fällt. Vergl. *Thermomagnetismus.* Abschn. II. N. 6.

17° bis 77° C. proportionale Intensität besitzt[1], und wenn man diesemnach annehmen darf, dafs dieses nämliche Verhalten auch von 0° bis — 80° oder — 100° statt findet, so ist dieser Apparat zum Messen hoher Kältegrade sehr geeignet. Die durch Verflüchtigung der Kohlensäure erzeugte Kälte wurde damit = — 78°,75 C. und der Gefrierpunct des Quecksilbers = — 40°,5, letzterer nur wenig tiefer, als andere Versuche ergeben, gefunden.

85) g. Verschiedene sonstige Thermometer, die zu eigenthümlichen Zwecken bestimmt sind oder sich durch die Art ihrer Construction auszeichnen, darf ich hier nur kurz berühren, da die Abweichungen derselben von den gewöhnlichen leicht verstanden werden und ihr Werth nicht bedeutend genug ist, um in ausführliche Erörterungen darüber einzugehn. Dahin gehört das Thermometer, welches Marshall Hall[2] vorgeschlagen hat, um kleine Unterschiede der Temperaturen zu messen, dessen Bedürfnifs er fühlte, als er die Wärme einzelner Theile des thierischen Körpers genauer zu ermitteln sich bemühte. Als Mittel, um diesen Zweck zu erreichen, wählte er Verlängerung der Scale; allein dieses führt bald zu einer nicht weiter zu überschreitenden Grenze, und er mufste sich daher entschliefsen, die ungebührlich lange Scale durch Beschränkung auf wenige Grade gehörig zu verkürzen. Deswegen wählte er ein Quecksilberthermometer mit einem Cylinder und einem sehr engen Rohre, deren Verhältnifs zu einander so seyn soll, dafs Zehntel eines Fahrenheit'schen Grades noch eine beträchtliche Länge auf der Scale erhalten. Um dabei das Thermometer, welches nicht zum absoluten Mafse der Wärme dienen, sondern nur kleine Unterschiede angeben soll, auf jede erforderliche Temperatur einzustellen, ist dasselbe oben mit einer Kugel versehn, welche das überflüssige Quecksilber aufnimmt. Wenn also die ganze Länge der Scale nicht mehr als etwa 10 Grade nach F. beträgt, so bringt man aus der obern Kugel so viel Quecksilber in die Röhre, dafs

Fig. 133.

---

1 Bei der von Pouillet angewandten Kette aus Eisen und Platin war dieses nicht der Fall, s. a. a. O. Becquerel's Kette aus ungleichen Platindrähten dürfte daher, auch wegen ihrer bequemeren und einfacheren Construction, den Vorzug verdienen.

2 London and Edinburgh Phil. Mag. N. XLIV. p. 56.

das Ende des daraus gebildeten Fadens bei einer von der zu untersuchenden nur wenig verschiedenen Temperatur ungefähr bis in die Mitte der Scale reicht, reducirt diesen Stand auf den eines andern genauen Thermometers und bestimmt hiernach die gemessene Temperatur. Die Regulirung des Instrumentes geschieht in den meisten Fällen am leichtesten dadurch, dafs man das Gefäfs so lange erwärmt, bis das Quecksilber des Fadens mit dem in der obern Kugel in Verbindung kommt; man läfst dann dasselbe bis wenige Grade über der zu untersuchenden Temperatur erkalten und in diesem Momente das überflüssige Quecksilber in die Kugel herabfallen, worauf sich das Ende des Fadens bis ungefähr in die Mitte der Scale zurückzieht. Das Thermometer ist viel leichter zu handhaben, als der oben beschriebene thermoelektrische Apparat, aber bei unvermeidlicher Gröfse des Gefäfses und aufserordentlicher Feinheit des Fadens ungleich weniger empfindlich, auch nicht in alle Theile des thierischen Körpers mit solcher Leichtigkeit und Feinheit hineinzubringen, als jener, dessen Vorzüge eben hierauf beruhn.

86) Ein anderes Thermometer, um sehr geringe Unterschiede der Wärme zu messen, ein eigentliches *Mikrothermometer*, ist von Landriani[1] erfunden worden. Das Princip seiner Construction ist gleichfalls kein anderes, als aufserordentliche Feinheit der Röhre bei grofsem Inhalte der Kugel und dadurch erreichte ungewöhnliche Länge der einzelnen Grade. Dem Weingeiste wird hierbei im Allgemeinen als thermoskopischer Substanz der Vorzug vor allen andern Flüssigkeiten eingeräumt, namentlich auch vor dem Quecksilber, aus Gründen, die wohl nicht durchaus haltbar sind; inzwischen können diese individuellen Thermometer nicht füglich mit Quecksilber gefüllt werden, und dann bleibt allerdings nur der Weingeist übrig, da Schwefeläther von ihm weniger geeignet gefunden wurde, ungeachtet directe Versuche seine Ausdehnung im Verhältnifs von 15:11 gröfser gaben, sonstige thermoskopische, noch mehr geeignete Flüssigkeiten scheint aber Landriani damals nicht beachtet zu haben. Diese wirklich verfertigten und beim Gebrauche vortrefflich befundenen Thermometer hatten eine Kugel von nur 3,5 Lin. Durchmesser

1 Brugnatelli Giorn. di Fisica. Dec. II. T. I. p. 338.

und waren an 4 Fuſs und darüber lange sehr dicke Glasröhren angeblasen, von einer so feinen Oeffnung im Innern, daſs jeder Grad 10 bis 12 Zoll lang war, mithin füglich $\frac{1}{500}$ bis $\frac{1}{600}$ eines Grades geschätzt werden konnte. Dicke Röhren wurden gewählt, theils um weniger zerbrechlich zu seyn, theils weil sie das Bild des abzulesenden Fadens vergröſsern; genaues Caliber, bei solcher Länge unmöglich, verlangt LANDRIANI nicht, weil die geringen Unterschiede der Weite durch die Länge der einzelnen Grade verschwinden, und auſserdem können die ganzen Grade nach einem genauen Quecksilberthermometer bestimmt werden und dann erhalten die Theile der Grade eine hinlängliche Genauigkeit. Wesentlich bei diesem Thermometer ist, daſs auſser der eigentlichen Kugel am obern Theile der Röhre noch zwei Erweiterungen angebracht sind, wovon die untere D stets mit Weingeist gefüllt ist, die obere E aber nur zur Hälfte, indem sich in der andern Hälfte Luft befindet, über welcher das Rohr zugeschmolzen ist. Es würde sehr schwierig seyn, einen so feinen Faden Weingeist zu erkennen, selbst wenn er gefärbt wäre, auſserdem aber legt LANDRIANI einen groſsen Werth darauf, daſs von der Flüssigkeitssäule kein Theil an den Wänden hängen bleibe und jede hieraus erwachsende Unrichtigkeit vermieden werde (obgleich man diese bei Weingeistthermometern nicht wahrgenommen hat); inzwischen ist die ganze Einrichtung des Instruments von der Art, daſs die Grade nicht durch das Ende der darin enthaltenen Flüssigkeitssäule, sondern durch einen kleinen in der Röhre befindlichen, bei N sichtbaren Cylinder von Quecksilber angezeigt werden. Ehe das Thermometer oben zugeschmolzen wird, erweitert man die Oeffnung der Röhre oben ein wenig, bringt ein geeignet groſses Quecksilberkügelchen auf die Oeffnung und erwärmt das Thermometer, bis von dem noch überflüssig im Thermometer enthaltenen Weingeiste ein Tropfen herausdringt; beim Abkühlen treibt die Luft das Quecksilberkügelchen in die obere Erweiterung E, von wo es weiter in D herabsinkt. Naah dem jedesmaligen Bedürfniſs, wenn man eine kleine Differenz der zunehmenden oder abnehmenden Temperatur messen will, bringt man den Cylinder an die geeignete Stelle in der Röhre, und seine Bewegung giebt dann die Veränderung der Temperatur an, da der Zusammenhang der Quecksilbertheilchen und der Wein-

Fig. 139.

geisttheilchen unter sich zu stark ist, als dafs sie in dem engen Röhrchen neben einander vorbeigehn sollten. Bei diesem Thermometer ist aufser der Gröfse des Gefäfses noch obendrein die übermäfsige Länge desselben ein abschreckendes Hindernifs seiner Brauchbarkeit.

87) Fourier giebt ein *Contactthermometer* an, dessen Beschreibung man hier suchen könnte, allein es ist kein eigenthümliches Instrument und der Gegenstand wird im Art. *Wärme* berührt werden. Anders verhält es sich mit Collardeau's *Thermomanometer*[1], einem Quecksilberthermometer mit einer zum Messen der Elasticitäten des Wasserdampfes bestimmten Scale. Hierbei kommt es also darauf an, diejenigen Elasticitäten des Wasserdampfes genau zu kennen, welche gewissen Wärmegraden zugehören, und es ist dann ein Leichtes, diese Elasticitäten statt der Temperaturen auf die Scale zu zeichnen, wie bei dem vorliegenden Instrumente durch Aetzen auf die Glasröhre selbst geschehn ist. Zur Bestimmung dieser Elasticitäten wird das Thermomanometer zugleich mit einem richtigen Thermometer in ein Oelbad gesenkt und hiernach werden dann die Grade empirisch aufgetragen. Collardeau nimmt folgende einander zugehörige Gröfsen an:

Temperatur des Dampfes		Atmosphären.	Temperatur des Dampfes		Atmosphären
100° C.	80°,0 R.	1	154°,0 C.	123°,2 R.	5
122,0	97,6	2	161,5	129,2	6
135,0	108,0	3	168,0	134,4	7
145,2	116,2	4	173,0	138,4	8

Inwiefern diese Bestimmungen mit den genauesten über die Elasticität der Dämpfe übereinkommen, mufs eine Vergleichung ergeben, da aber fortgesetzte Versuche stets genauere Resultate hierüber erwarten lassen, so würde bei einer etwas bedeutenderen Aenderung der Apparat seine Brauchbarkeit verlieren, und man ersieht hieraus, dafs es allezeit besser ist, mit genauen Thermometern die Temperaturen zu messen und

1 Jahrbücher des polytechnischen Instituts. Th. XVI. S. 341. Aus Bulletin de la Soc. d'Encouragement cet. XXVI. Année. 1827.

von diesen auf die Elasticitäten zu schliefsen. Das Thermomanometer hat übrigens zur niedrigsten Zahl 10, oder 10 Zehntheile eines atmosphärischen Druckes von 0,76 Meter Quecksilberhöhe, welche also die Einheiten der Scale bilden, die jedoch nicht gleich sind, indem die Röhre konisch, von der Kugel an nach oben abnehmend, verjüngt ist, damit die oberen Grade oder Theile gröfser werden. Ein Instrument endlich, welches WALTER R. JOHNSON[1] erfunden und *Dampfpyrometer* (*Steam Pyrometer*) genannt hat, womit die Hitze gegebener Körper aus dem Gewichte des durch sie in Dampfgestalt entfernten Wassers bestimmt werden soll, würde eine für den davon zu erwartenden Nutzen zu weitläuftige Beschreibung erfordern, als dafs ich diese hier aufnehmen sollte, da ohnehin ein Jeder, welcher sich dieses Mittels bedienen wollte, leicht einen geeigneten Apparat auffinden würde.

88) Wichtiger, als die Nachweisung solcher, unter den vielen vorhandenen nicht durch vorzügliche Brauchbarkeit ausgezeichneter Werkzeuge, dürfte ein kurzer Nachtrag zur *Pyrometrie* seyn. In dem diesem Gegenstande gewidmeten Artikel ist das von POUILLET erfundene *Luftpyrometer* beschrieben worden[2]; seitdem hat dieser Gelehrte selbst eine Beschreibung und eine Anweisung zum Gebrauche desselben nebst einigen sehr interessanten, mit demselben erhaltenen Resultaten geliefert[3], woraus ich noch Folgendes entnehme. Soll die Wärme aus der Ausdehnung der in der Kugel und dem Leitungsrohre aus Platin enthaltenen Luft gefunden werden (welches letztere übrigens einen so engen Canal haben mufs, dafs das Luftvolumen in demselben im Verhältnifs zu dem in der Kugel als verschwindende Gröfse gelten und der Einflufs seiner ungleichen Erhitzung vernachlässigt werden kann), so ist dazu folgende Berechnung erforderlich. Heifst der Rauminhalt der Platinkugel c, der Rauminhalt des zuleitenden Rohres bis zum Nullpuncte der zum Messen bestimmten getheilten Glasröhre z, die Anzahl der in dieser graduirten Glasröhre unter dem verschiedenen Drucke p und p' befindlichen Kubikcentimeter Luft n und n', so ist

1 Amer. Journ. of Science and Arts. T. XXII. p. 96.

2 S. Art. *Pyrometer*. Bd. VII. S. 999.

3 Aus Compte rendu 1836. T. II. p. 782. in Poggendorff's Ann. XXXIX. 567.

$$c + z = \frac{p'n' - pn}{p - p'} \ldots\ldots \quad 1)$$

Nennt man V das Volumen, welches die Luft im Apparate bei 0° Temperatur und unter 0,76 Meter Luftdruck einnehmen würde, t und p die bestehende Temperatur und den beobachteten Luftdruck, n′ die unter diesen Umständen in der graduirten Glasröhre enthaltene Menge von Kubikcentimetern Luft, a den Ausdehnungscoefficienten der Luft, so ist

$$V = \frac{p}{0{,}76} \cdot \frac{(c + z + n')}{1 + at} \ldots\ldots \quad 2)$$

Hiernach wird dann n oder die Anzahl von Kubikcentimetern Luft in der graduirten Glasröhre bei der Temperatur 0 und unter dem Luftdrucke p

$$n = \frac{0{,}76V}{p} - (c + z) \ldots\ldots \quad 3)$$

Ferner sey N das Volumen Luft, auf die Temperatur 0° C. und den Luftdruck p reducirt, welches aus der Platinkugel durch die Temperatur x in die graduirte Röhre getrieben wird, wenn N′ die Anzahl von Kubikcentimetern Luft bezeichnet, die in derselben beobachtet werden, so ist

$$N = \frac{N' - zat}{1 + at} - n \ldots\ldots \quad 4)$$

Heifst dann l′ der Ausdehnungscoefficient des Platins durch Wärme, so ist auch

$$V = \frac{p}{0{,}76}\left[\frac{N' + z}{1 + at} + \frac{c(1 + l'x)}{1 + ax}\right] \ldots\ldots \quad 5)$$

und man erhält dann

$$x = \frac{N}{c(a - l') - aN} \ldots\ldots \quad 6)$$

Will man in voraus berechnen, welche Anzahl N′ von Kubikcentimetern Luft in der graduirten Röhre bei der Temperatur t und dem Luftdrucke p vorhanden seyn wird, wenn die Platinkugel bis zur Temperatur x erhitzt wird, so hat man

$$N' = \left[\frac{cx(a - l')}{1 + ax} + \frac{0{,}76V}{p}\right] - (c + z)(1 + at) + zat \ldots \quad 7)$$

woraus sich ergiebt, dafs die Werthe von N′, welche zu 1000° und zu 1200° C. gehören, um fast ein Kubikcentimeter ver-

schieden sind, und dafs an dieser Stelle der Scale das Intervall von 100° C. auf der graduirten Röhre eine Länge von 13 bis 14 Millimetern einnimmt, obgleich diese Intervalle mit zunehmenden Temperaturen kleiner werden. POUILLET hat bei seinen Versuchen die auffallende Erfahrung gemacht, dafs die durch die Formel 2 gefundenen Werthe von V nicht constant sind, wie sie seyn müfsten, sondern zunehmen, so wie der Druck abnimmt. Auch die durch die Formel 5 gegebenen Werthe von V sind nicht constant, sondern wachsen, so wie die Temperatur der Platinkugel steigt, jedoch nur bis 120° C., indem sie von da an bis 300° C. vollkommen constant sind. POUILLET folgert hieraus, dafs unterhalb 120° C. die Luft in der Platinkugel weder dem Mariotte'schen noch dem von GAY-LUSSAC für die Ausdehnung derselben aufgefundenen Gesetze folge, ungeachtet letzteres für Luft in einem Glasgefäfse von DULONG und PETIT bis 360° C. als gültig befunden worden ist. Man wird veranlafst, diese Unregelmäfsigkeit von einer Art Verdichtung der Luft an der Oberfläche des Metalls herzuleiten, derjenigen analog, welche DE SAUSSURE bei verschiedenen porösen Körpern gefunden hat[1].

89) POUILLET[2] hat sein Pyrometer auch zum Messen sehr hoher Kältegrade angewandt, was zwar einen Widerspruch zu enthalten scheint, aber doch buchstäblich wahr ist und obendrein zu dem Resultate führt, dafs dieser Apparat die Grade einer tiefen Temperatur noch genauer mifst, als die einer hohen, so dafs man ihn mit Recht *Universalthermometer* nennen könnte. Die Kugel bestand bei dem ersten angestellten Versuche aus Glas, und wurde in einen durch THILORIER bereiteten Brei aus fester Kohlensäure und Schwefelsäure getaucht. Nach 15 bis 20 Minuten hörte die Zusammenziehung der Luft auf, und sie blieb dann noch eine halbe Stunde unverändert, woraus man schliefsen konnte, dafs der Apparat die Temperatur dieses Breies genau messe. Es war aber das vorher bestimmte, auf 0° C. und 0,76 Met. Luftdruck

---

1 Da der Apparat schwerlich mit absolut trockner Luft gefüllt war, so fragt sich, welchen Antheil die darin enthaltene Feuchtigkeit an den beobachteten Abnormitäten gehabt habe.

2 Aus Compt. rend. 1837. T. I. p. 513. in Poggendorff's Ann. XLI. 144. L'Institut 1837. N. 199. p. 81.

reducirte Volumen der im Apparate enthaltenen Luft $V = 91{,}57$; der Rauminhalt der Kugel $c = 56{,}825$ und des Rohrs $z = 2{,}415$ Kubikcentimeter. Im Augenblicke der Beobachtung fand sich $N' = 8{,}78$ Kubikcentimeter; $t = 11^\circ{,}3$ C.; $p = 0{,}76465$ Meter, und das Thermometer am Barometer zeigte $13^\circ{,}3$ C., wobei N' die Zahl der in der graduirten Röhre befindlichen Kubikcentimeter Luft bezeichnet. Diese Werthe substituirt geben

$$n = \frac{0{,}76\,V}{p} - (c + z); \quad N = \frac{N' - zat}{1 + at} - n;$$

$$x = \frac{N}{c(a - l') - aN} = -78^\circ{,}85 \text{ C.}$$

Der Versuch wurde darauf mit einer Platinkugel wiederholt, wobei $V = 92{,}595$; $c = 56{,}73$; $z = 2{,}64$ waren. Es fand sich dann $N' = 9{,}8$; $t = 11^\circ{,}3$; $p = 0{,}76465$ Met. und das Thermometer am Barometer $= 13^\circ{,}3$. Diese Werthe substituirt gaben

$$x = -78^0{,}87 \text{ C.}$$

Hieraus ergiebt sich also, daſs das Luftpyrometer sich sehr gut zum Messen tiefer Kältegrade anwenden läſst und zwischen 10^0 C. bis -80^0 C. keine Verdichtung der Luft an den Wandungen des Platins statt findet.

90) Das von Pouillet angegebene Pyrometer oder Universalthermometer zeigt sich als ein sehr genaues Meſswerkzeug; allein die Versuche damit erfordern einen zu groſsen Aufwand von Zeit und Mühe, als daſs man es ein praktisches nennen könnte, und sein Gebrauch erstreckt sich daher hauptsächlich nur darauf, dasselbe als einen Normalapparat zu gebrauchen, um andere danach zu prüfen, zu graduiren und zu reguliren. Pouillet, hiervon selbst überzeugt, bringt daher noch andere Mittel zur Messung hoher Temperaturen in Vorschlag, namentlich das oben erwähnte thermomagnetische Pyrometer. Auſserdem erwähnt er[1], daſs die Wärme stark erhitzter Körper, namentlich des Platins, zum Messen hoher Hitzegrade benutzt werden könne, weswegen er die specifische Wärme dieses Metalls mittelst seines Luftpyrometers genau bestimmte. Arago[2] empfiehlt dieses Mittel, jedoch nur

1 Poggendorff Ann. XXXIX. 571.

2 Ann. Chim. et Phys. T. LXIV. p. 334.

als ein nicht absolut genaues, weswegen er bei der Aufstellung der zur Berechnung erforderlichen Formel die Correctionen wegläfst. Hat man nämlich zwei ungleiche Massen, am besten von Metall, M und M', welche in einer zu untersuchenden Wärmequelle die Temperatur x erhalten haben, und wirft man sie nach einander in zwei Massen Wasser m und m' (worin das Gefäfs zugleich mit begriffen seyn möge) von der Temperatur = t, die alsdann nach dem Hineinwerfen von M und M' die Temperaturen Θ und Θ' erhalten, so ist, wenn die specifische Wärme von M und M' durch c bezeichnet wird:

$$Mc(x-\Theta) = m(\Theta - t),$$
$$M'c(x-\Theta') = m'(\Theta' - t),$$

woraus man erhält:

$$x = \frac{h\,\Theta'(\Theta - t) - n(\Theta' - t)}{h(\Theta - t) - n(\Theta' - t)},$$

wenn h und n die Gröfsen M'm und Mm' bezeichnen. Poggendorff[1] giebt an, dafs auch Lamé[2] dasselbe Verfahren, jedoch nur als ein erstes annäherndes, empfehle, weil die Wärmecapacitäten der Körper sich mit den Temperaturen ändern, zugleich aber erwähnt er, dafs dasselbe Verfahren schon früher durch Schwarz[3] angewandt worden sey, welcher einen Platinwürfel in Quecksilber erkalten zu lassen vorschlug, obgleich auch hierbei aus dem Wärmeverluste des Würfels vor dem Eintauchen in Quecksilber und durch einige Verdampfung des letzteren Metalles Fehler entstehn müssen. Durch das nämliche Verfahren bestimmte Coulomb die zum Härten der Magnete erforderliche Hitze und Laroche die Wärme des Kupfers, welches er in den Focus des einen Brennspiegels bei der Untersuchung der strahlenden Wärme brachte. Die Formel, deren sich Lamé bedient, ist übrigens noch einfacher. Ist nämlich die Wassermasse = M, ihre anfängliche Temperatur = t und ihre Temperatur nach dem Hineinwerfen = Θ, ist die hineingeworfene Metallmasse = m, ihre specifische Wärme = c und ihre Temperatur = T, so erhält man

$$M(\Theta - t) = mc\,(T - \Theta).$$

1 Dessen Annalen XXXIX. 518. Vergl. XIV. 530.
2 In dessen Traité de Phys. p. 417.
3 Bullet. des Sciences technol. T. IX. p. 239.

Eine vorläufige Beobachtung vereinfacht die Rechnung. Denn wenn für diese die Bezeichnungen M, m, c, t', Θ', T' gesetzt werden, so ist

$$M(\Theta' - t') = mc(T' - \Theta')$$

und man erhält

$$\frac{T - \Theta}{T' - \Theta'} = \frac{\Theta - t}{\Theta' - t'},$$

woraus T gefunden wird.

Endlich möge noch bemerkt werden, dafs M'. Sweeny[1] vorgeschlagen hat, die Hitze der Oefen aus der Temperatur zu messen, welche die von einem Hohlspiegel gegen ein Thermometer reflectirten Strahlen desselben erzeugen.

M.

Thermoroskope.

So nennt Dutrochet[2] ein Instrument, bestehend aus einer Röhre, in welcher eine Flüssigkeit an der einen Seite durch von aufsen angebrachte Wärme steigt, an der andern sinkt. Der Name ist abgeleitet von *θερμός* heifs, *ῥόος* das Fliefsen und *σκοπέω* ich sehe; indefs finde ich nicht, dafs es eine weitere Aufnahme unter die physikalischen Apparate gefunden hat.

M.

Thermosiphon.

Dieses ist ein von Fowler[3] erfundener und patentisirter Apparat, welcher wegen vielfacher nützlicher Anwendbarkeit beachtet zu werden verdient. Der Name, von *θερμός* heifs und *σίφων* der Heber abgeleitet, bezeichnet genau die sinnreiche Idee, welche dabei zum Grunde liegt. In seiner einfachsten, mehrere Veränderungen gestattenden Gestalt bezeich-

1 Aus Gill's technic. Reposit. T. III. p. 239. in Poggendorff's Ann. XIV. 530.

2 Ann. de Chim. et Phys. T. XLVIII. p. 268.

3 Edinburgh Journ. of Sc. New Ser. N. II. p. 345.

Fig. 140. nen A und B zwei metallene Gefäfse, von denen das erstere auf einem heizbaren Herde steht, das andere in mäfsiger Entfernung an demjenigen Orte, dem man die Wärme zuführen will, beide in gleichem Niveau durch eine horizontale Röhre E verbunden, in welcher sich an irgend einer geeigneten Stelle ein Hahn befindet. Beide Gefäfse werden mit einer Flüssigkeit angefüllt, welche das Metall nicht angreift, am besten und wohl ohne Ausnahme mit Wasser. Aufserdem geht eine heberförmig gebogene Röhre vom einen Gefäfs ins andere mit ihren Enden bis unter den Spiegel des Wassers und ist mit zwei Hähnen F und F′ und einem Trichter zum Füllen G versehn, welcher oben durch einen Kork oder eine sonstige Vorrichtung sich luftdicht verschliefsen läfst; auch ist der im Gefäfse A befindliche Schenkel etwas aufwärts gebogen, damit die durch die Hitze aus dem Wasser entwickelten Luftblasen nicht eindringen. Der Erfinder hat durch Versuche ausgemittelt, dafs G bis 20 F. Höhe über dem Wasserspiegel in den Gefäfsen haben kann und dafs dann die Entfernung des Gefäfses B bis 60 Fufs, die Weite der Röhren aber 3 Z. Durchmesser betragen kann. Es braucht kaum bemerkt zu werden, dafs zuerst die Gefäfse bis zur gehörigen Höhe gefüllt werden müssen; dann verschliefst man F und F′, öffnet G und giefst Wasser bis zum Ueberfliefsen ein, öffnet F und F′, damit die unterhalb der Hahnen befindlichen Luftblasen aufsteigen, verschliefst F und F′, öffnet G und füllt den entstandenen Raum abermals aus, worauf G verschlossen, F und F′ aber für immer geöffnet werden. Beim Gebrauche der Maschine mufs auch E offen seyn, und wird dann das Wasser im Gefäfse A erhitzt, so steigt das wärmere im Heber auf und fliefst in das zweite Gefäfs B, dessen abgekühltes Wasser durch das untere Rohr nach A strömt. Durch die Hitze wird zuweilen Luft aus dem Wasser entwickelt, welche den Heber zum Stillstande bringt und erfordert, dafs man ihn aufs Neue füllt, doch versichert der Erfinder, dafs dieser Fall nur selten eintritt; er zeigt dann ferner, wie dieser Apparat mit Vortheil zum Heizen, insbesondere der Orangerie- und Pflanzenhäuser, anwendbar sey, wo man ohnehin gern feuchte Luft hat. Es ist mir aber auffallend, dafs der Erfinder, namentlich für den genannten Zweck, den Heber beibehält, und nicht eine weit einfachere Vorrichtung in Vorschlag bringt, die

obendrein so nahe liegt. Wählt man nämlich für die Röhre FF′ statt des Hebers eine horizontale gerade Röhre, oder selbst nur eine offene Rinne, die in beiden Gefäſsen bis unter den Spiegel des Wassers herabgeht, so steht das Wasser im Gefäſse A wegen seiner Ausdehnung durch Wärme höher, als im Gefäſse B, und das Strömen aus A in B durch das obere Rohr und des kälteren Wassers rückwärts von B nach A durch das untere Rohr erfolgt von selbst, auch kann man nach Belieben in jedes dieser Gefäſse nachfüllen, um den Spiegel gleich hoch zu erhalten.

M.

Thermostat

nennt Heeren[1] diejenigen Apparate, deren sich die Chemiker vielfach bedienen, um Gläser, Tiegel und sonstige Gefäſse mit Flüssigkeiten oder sonstigen Substanzen über der Weingeistlampe bequem zu erhitzen. Sie bestehn aus einem metallenen Fuſse mit einer metallenen Säule, auf welcher sich hohle Cylinder mit einem horizontalen Arme und einem an dessen Ende befindlichen Drahtringe auf- und abwärts schieben lassen, um die im Ringe festgehaltenen Gefäſse der Flamme näher zu bringen oder weiter davon zu entfernen.

M.

Thorium,

ein höchstseltenes Erdmetall, von Berzelius im *Thorit* entdeckt und als dunkelbleigraues, schweres Pulver dargestellt.

Sein Oxyd, die *Thorerde* (59,6 Thorium auf 8 Sauerstoff) ist weiſs, von 9,402 spec. Gewicht, erzeugt mit Wasser ein weiſses Hydrat, mit Säuren Salze von rein und stark zusammenziehendem Geschmacke und löst sich nach der Fällung aus der sauren Auflösung nicht in ätzenden, aber in kohlensauren Alkalien.

G.

---

1 Journ. für prakt. Chemie. Th. II. S. 1. 1834. Nr. 9.

Trabanten.

Satelliten, Monde; *Satellites;* Satellites; *Satellites.*

Trabanten oder Monde der Planeten sind kleinere Himmelskörper, welche sich um die Planeten unsers Sonnensystems und mit diesen gemeinschaftlich um die Sonne bewegen. Die Erde hat bekanntlich nur einen solchen Satelliten, den Mond[1], Jupiter hat vier, Saturn sieben und Uranus endlich wenigstens zwei, vielleicht aber sechs solcher Satelliten. Auch bei der Venus haben einige Astronomen einen solchen Nebenplaneten bemerken wollen, wie wir weiter unten sehn werden. Wir wollen das Merkwürdigste, was über diese Monde bisher bekannt geworden und was durch einen der vorhergehenden Artikel (*Nebenplaneten*) nur sehr unvollständig und nach bereits veralteten Angaben mitgetheilt worden ist, hier kurz zusammenstellen und mit der näheren Betrachtung der Jupitersmonde beginnen.

A. Satelliten Jupiters.

I. Entfernung und Umlaufszeit.

Gleich nach der Entdeckung der Fernröhre bemerkte man um Jupiter vier kleine Gestirne, die ihn auf seinem Laufe um die Sonne zu begleiten schienen. Die Stellung dieser Monde gegen ihren Hauptplaneten, in dessen Nähe sie sich stets aufhielten, änderte sich so schnell, daſs man ihre Bewegung schon in einer einzigen Nacht deutlich erkennen konnte. Man erblickte sie bald vor, bald hinter ihrem Hauptplaneten, so daſs sie zu beiden Seiten desselben, einem Pendel gleich, hin und wieder zu gehn schienen. Doch bemerkte man zugleich, daſs die Oscillationen dieses Pendels oder daſs die Entfernungen dieser Monde vom Jupiter nicht bei allen vieren dieselben sind. Der erste unter ihnen, wie man den dem Jupiter näch-

1 S. Art. *Mond.* Bd. VI. S. 2342.

sten zu nennen pflegte, entfernt sich vom Mittelpuncte seines Hauptplaneten, wenn der letzte selbst in seiner mittleren Distanz von der Sonne ist, im Mittel nur um 111",11 oder um 0° 1' 51",11, der zweite, nächstentfernte, um 176",78; der dritte um 282",00 und der vierte oder der am weitesten von Jupiter abstehende um 495",98. Nimmt man den Halbmesser Jupiters (eigentlich des Aequators dieses Planeten) für seine mittlere Distanz von der Sonne gleich 18",3714, so findet man für die genannten mittlern Entfernungen der Satelliten vom Mittelpuncte ihres Hauptplaneten:

	Mittlere Distanz in Halbmessern Jupiters	in geogr. Meilen
I Satellit . . .	6,0185	56500
II —	9,6235	89940
III — . . .	15,3502	143500
IV — . . .	26,9983	252300

so dafs also der erste dieser Satelliten nahe ebenso weit vom Jupiter, als unser Mond von der Erde absteht, während diese Entfernung beim vierten Satelliten nahe fünfmal gröfser ist. Die fortgesetzte Beobachtung dieser gröfsten Ausweichungen oder Elongationen, wie man sie zu nennen pflegt, liefsen auch bald die Dauer der Umlaufszeiten dieser Monde um ihren Hauptplaneten erkennen, obschon andere Erscheinungen, von welchen wir bald reden werden, noch viel genauere Mittel zu diesem Zwecke angeboten haben. Nach den neuesten Bestimmungen sind die siderischen Revolutionen dieser Satelliten in mittleren Sonnentagen ausgedrückt

des I	1,7691378	Tage
II	3,5511810	
III	7,1545528	
IV	16,6890190.	

Bemerken wir noch, dafs die vorhergehenden Angaben aus der *Expos. du syst. du monde* von LAPLACE (letzte Ausgabe) genommen sind und dafs seitdem STRUVE[1] mit seinem grofsen

1 S. Schumacher Astronom. Nachr. N. 97 u. 139.

Refractor von Fraunhofer den Jupiter neuen, sehr genauen Messungen unterworfen hat, aus welchen hervorgeht

Jupiters Aequatorialhalbmesser	A . . .	19″,163
— Polarhalbmesser	B . . .	17,769

für die mittlere Distanz (5,20279) des Planeten. Daraus folgt die Abplattung α Jupiters

$$\alpha = \frac{A - B}{A} = 0,0728 = \frac{1}{13,71}.$$

Schröter in Lilienthal hat diese Abplattung gleich $\frac{1}{12}$, also gegen Struve zu grofs, Arago[1] aber hat $\alpha = \frac{1}{17,7}$, also gegen Struve viel zu klein gefunden.

II. Gröfse und Massen dieser Satelliten.

Die scheinbaren Halbmesser dieser Monde, wie sie von der Erde, zur Zeit der mittlern Entfernung Jupiters, gesehn werden, sind

	nach Struve	. . .	nach Schröter
I	0″,507	. . . .	0″,531
II	0,455		0,435
III	0,744		0,771
IV	0,636		0,537

bis auf den IV. Trabanten wohl übereinstimmend. Werden Struve's Zahlen durch 508,69 multiplicirt, so erhält man für den Halbmesser diesen Trabanten in geogr. Meilen:

I	. . .	259 Meilen
II	. . .	230
III	. . .	379
IV	. . .	324.

Der Halbmesser unseres Erdmonds beträgt nahe 230 Meilen, ist also an Gröfse dem zweiten Jupitersmonde gleich, während der dritte und vierte bedeutend gröfser sind.

So kleine und überdiefs so lichtschwache Scheibchen, deren Durchmesser kaum 1,5 Secunde beträgt, können wohl von keinem unbewaffneten menschlichen Auge gesehn werden.

---

1 Laplace Exposition du Système du monde. T. I. p. 68. Es heifst daselbst: *par des mesures très précises.*

Auch haben die Alten, bis zur Entdeckung des Fernrohrs, nichts von ihrer Existenz gewufst. Inzwischen haben sie den Jupiter oft und aufmerksam genug betrachtet, wie die Beobachtungen zeigen, die wir im Almagest des Ptolemäus und in den Schriften der arabischen Astronomen finden, der ungemeinen, ans Unglaubliche grenzenden Nachrichten von der Virtuosität des Gesichts nicht zu gedenken, die uns z. B. Plinius in seiner Naturgeschichte erhalten hat. Dessenungeachtet fehlt es nicht an Erzählungen, wo man diese Satelliten mit bloſsen Augen gesehn haben will. So beruft sich auch Uckert[1] auf das Zeugnifs Musschenbroek's, der dasselbe nicht von sich selbst, aber doch von Andern behauptet haben soll. Allein alle diese Nachrichten werden wohl ihre beste Erklärung darin finden, dafs der Sache unkundige Zuschauer dem Jupiter nahe stehende Fixsterne für jene Trabanten genommen haben.

Aus den vorhergehenden Angaben kann man leicht finden, unter welchem Winkel diese Monde einem Beobachter im Mittelpuncte Jupiters erscheinen würden. Dieser scheinbare Halbmesser beträgt nämlich

für I	...	0°	16′	38″
II	...	0	8	36
III	...	0	9	29
IV	...	0	3	46.

Der erste Satellit erscheint daher den Jupitersbewohnern nahe so grofs, wie unser Mond uns, während der vierte Satellit im Durchmesser nur den 5ten und in der Oberfläche den 25sten Theil unseres Monds beträgt.

Wie endlich unmittelbare Beobachtungen die *Gröſse*, so haben auch theoretische Untersuchungen die *Masse* dieser vier Himmelskörper kennen gelehrt. Nach den neuesten Angaben von Laplace[2] hat man, wenn die Masse Jupiters als Einheit angenommen wird,

Masse von	I	....	0,00001733
	II	....	0,00002324
	III	....	0,00008850
	IV	....	0,00004266.

1 V. Zach monatl. Correspond. Th. XXIV. S. 392.
2 Exposition du Syst. du Monde. T. II. p. 104.

Vergleicht man aber diese Massen mit den bekannten Massen der Erde und ihres Monds, so erhält man

Masse von I	... 0,0054	der Erdmasse	... 0,373	unserer Mondmasse
II	... 0,0072	— —	0,497	— —
III	... 0,0273	— —	1,884	— —
IV	... 0,0132	— —	0,911	— —

so daſs also der Satellit I noch nicht die Hälfte, der III. aber nahe das Doppelte unserer Mondmasse hat.

Ist aber Volumen und Masse eines Himmelskörpers bekannt, so läſst sich auch leicht die *Dichtigkeit* desselben und die *Fallhöhe* der Körper auf seiner Oberfläche bestimmen. Aus dem Vorhergehenden findet man

Dichte von I	0,69 der Dichte Jupiters	.. 0,16 der Dichte der Erde	.. 0,77 d. Dichte d. Wassers
II	1,72 — —	0,40 — —	1,94 - —
III	1,22 — —	0,30 — —	1,38 - —
IV	1,68 — —	0,40 — —	1,90 - —

und die Fallhöhe der auf der Oberfläche dieser Satelliten sich selbst überlassenen Körper, die bei uns 15,092 Par. Fuſs oder 2173 Linien beträgt, ist

auf I	nur	0,78 Par. Fuſs
II	—	1,59
III	—	1,98
IV	—	1,91.

III. Lage der Bahnen der Satelliten.

Aus den oben gegebenen siderischen Revolutionen dieser Satelliten findet man sofort auch die tropischen und synodischen Umlaufszeiten derselben. Ist nämlich T und T′ die siderische und tropische Revolution Jupiters und t, t′ und s die siderische, tropische und synodische Revolution eines Satelliten dieses Planeten, so hat man, wenn T, T′ und t bekannt sind, die Gröſsen t′ und s durch folgende Gleichungen z

$$s = \frac{Tt}{T - t},$$

$$t' = \frac{TT't}{TT' + (T - T')t},$$

wobei noch bemerkt werden kann, dafs die Gröfse T' aus T durch die Gleichung gegeben wird

$$T' = \frac{T}{1 - \frac{T m'}{360}}$$

wo m = — 0,0000382 die tägliche Präcession der Aequinoctien in Graden ausgedrückt bezeichnet. Man findet so

	synodische		tropische	
	Revolution			
I . . .	1,769864	. . . .	1,769138	Tage
II . . .	3,554093	. . . .	3,551180	—
III . . .	7,166385	. . . .	7,154547	—
IV . . .	16,753553	. . . .	16,688989	—

Man sieht, dafs zwischen den oben angeführten siderischen Umlaufszeiten und zwischen den mittleren Abständen der Satelliten vom Mittelpuncte ihres Hauptplaneten das merkwürdige, von Kepler entdeckte Verhältnifs besteht, nach welchem die Quadrate der Revolutionen sich wie die Würfel der Abstände verhalten, ein, wie es scheint, allgemeines Gesetz der Natur, da nicht nur die Planeten und Satelliten unseres Sonnensystems demselben gehorchen, sondern da man dasselbe auch jenseit unseres Sonnensystems, bei den Doppelsternen, wieder findet.

Die *Bahnen* dieser Satelliten sind ohne Zweifel elliptisch, obschon es schwer ist, die geringe Abweichung derselben von der Kreisform in dieser grofsen Entfernung von mehr als hundert Millionen geographische Meilen durch Beobachtungen zu bestimmen. Etwas Näheres hat man über die *Lagen* dieser Bahnen erfahren. Man bemerkte bald, dafs sie sämmtlich nur sehr wenig gegen den Aequator Jupiters geneigt sind und dafs überdiefs die Knotenlinien dieser Bahnen durchaus mit der Knotenlinie des Aequators Jupiters in der Bahn dieses Planeten zusammenfallen. Man fand für diese Neigungen der Satellitenbahnen gegen den Jupitersäquator

I Satellit . . .	0°,002
II	0,0184
III	0,0842
IV	0,4092.

Allein die Lage des Jupitersäquators ist selbst veränderlich am

Himmel. Im Anfange dieses Jahrhunderts oder am ersten Januar 1801 war die jovicentrische Länge des aufsteigenden Knotens dieses Aequators in der Jupitersbahn gleich 314°,465 und die jährliche retrograde Bewegung dieses Knotens gleich 0°,000074. Die Neigung des Aequators gegen die Jupitersbahn ist für dieselbe Epoche 3°,0920 mit der jährlichen Zunahme von 0°,0000063. Bezeichnet also t die Anzahl Jahre, die seit dem Anfange des Jahres 1801 verflossen ist, so ist die Länge des aufsteigenden Knotens des Jupitersäquators in seiner Bahn

$$314^0,465 - 0^0,000074\,t + 0^0,013917\,t$$

oder

$$314^0,465 + 0^0,013843\,t,$$

wobei die jährliche Präcession der Aequinoctien 51″,1012 oder 0°,013917 angenommen wurde und die Neigung des Aequators gegen die Bahn Jupiters

$$3°,0920 + 0°,0000063\,t.$$

Da nun die eben angeführten Neigungen der Satellitenbahnen gegen den Jupitersäquator constant sind, so erhält man die mittleren Neigungen dieser Satellitenbahnen gegen die Jupitersbahn, wenn man diese Neigungen gegen den Aequator von 3°,0920 subtrahirt, so dafs daher die Neigungen der Satellitenbahnen gegen die Jupitersbahn sind

I Satellit . . .	3°,090
II	3,074
III	3,008
IV	2,683.

Die *periodischen Aenderungen* dieser Neigungen aber lassen sich am einfachsten so darstellen. Die wahre Bahn eines jeden Satelliten bewegt sich gleichförmig und mit einer constanten Neigung gegen seine mittlere Bahn so, dafs die wahre Länge der Bahn durch ihren Neigungswinkel gegen die mittlere Bahn und durch die Länge ihres auf diese mittlere Bahn sich beziehenden aufsteigenden Knotens gegeben ist. Diese Neigungen und Knotenlängen der wahren Bahnen auf ihren mittleren sind, wenn t die vorige Bedeutung hat, folgende:

Der wahren Bahnen

	Neigung gegen die mittl. Bahn		Knotenlänge in der mitteren Bahn
Sat. I . . .		unmerklich	
II . . .	0°,437	. . .	12°,880 — 12°,048 t
III . . .	0,206	. . .	222,979 — 2,554 t
IV . . .	0,249	. . .	70,479 — 0,691 t

und zu diesen Knotenlängen mufs noch die Präcession = 0°,013917 t addirt werden, um diese Längen von dem wahren Frühlingspuncte der Erdbahn zu haben.

Ist daher n und k die Neigung und die Länge des aufsteigenden Knotens der Satellitenbahn gegen die Jupitersbahn und bezeichnet v die jovicentrische Länge des Satelliten in seiner Bahn, so hat man für die jovicentrische Breite s des Satelliten über der Jupitersbahn:

$$\text{Sin. } s = \text{Sin. } n \text{ Sin. } (v - k)$$

oder, da n, also auch s nur klein ist,

$$s = n \text{ Sin. } (v - k).$$

Nach dem Vorhergehenden ist aber für das Jahr 1801 + t die Länge des mittleren Knotens aller Satellitenbahnen, von dem Frühlingsnachtgleichenpuncte der Erde gezählt, gleich 314°,465 + 0°,013843 t, also hat man auch für den Satelliten I die jovicentrische Breite

$$s = 3°,090 \text{ Sin. } (v - 314°,465 - 0°,013843\,t)$$

und ebenso für den zweiten

$$s' = 3°,074 \text{ Sin. } (v' - 314°,465 - 0°,013843\,t).$$

Da aber die Länge des aufsteigenden Knotens der wahren Bahn von II auf der mittleren Bahn gleich

$$12°,8805 - 12°,0483\,t + 0°,013917\,t$$
$$= 12°,8805 - 12°,03438\,t$$

ist, so folgt daraus die Vermehrung der Breite dieses Satelliten

$$\Delta s' = 0°,4636 \text{ Sin. } (v' - 12°,8805 - 12°,03438\,t),$$

so dafs daher die wahre Breite $s' + \Delta s'$ dieses zweiten Satelliten seyn wird

$$3°,074 \text{ Sin. } (v' - 314°,465 - 0°,0138\,t)$$
$$+ 0°,464 \text{ Sin. } (v' - 12°,880 + 12°,0344\,t).$$

Ebenso erhält man für die wahre jovicentrische Breite des dritten Satelliten

$$3^\circ,008 \text{ Sin.} (v'' - 314^\circ,465 - 0^\circ,0138\, t)$$
$$+ 0^\circ,206 \text{ Sin.} (v'' - 222^\circ,979 + 2^\circ,5538\, t)$$

und endlich für die des vierten Satelliten

$$2^0,683 \text{ Sin.} (v''' - 314^0,465 - 0^0,0138\, t)$$
$$+ 0^0,249 \text{ Sin.} (v''' - 70^0,479 + 0^0,6914\, t).$$

Da nämlich die hier betrachteten Neigungen sämmtlich nur klein sind, so kann man sie ohne merklichen Fehler durch folgende einfache Gleichungen unter einander verbinden. Ist zum Beispiel N und K die Neigung und Länge des aufsteigenden Knotens der Jupitersbahn gegen die Ekliptik, n und k die Neigung und Länge des aufsteigenden Knotens der Satellitenbahn gegen die Jupitersbahn, und endlich ν und $\varkappa$ die Neigung und Länge des Knotens der Satellitenbahn gegen die Ekliptik, so hat man durch die sphärische Trigonometrie die völlig strengen Formeln

$$\text{Cos.}\, \nu = \text{Cos. n Cos. N} - \text{Sin. n Sin. N Cos.} (k - K),$$

$$\text{Tang.} (\varkappa - K) = \frac{\text{Sin. n Sin.} (k - K)}{\text{Cos. n Sin. N} + \text{Sin. n Cos. N Cos.} (k - K)},$$

woraus man, wenn N, n und ν nur klein sind, leicht folgende abgekürzte Ausdrücke ableitet:

$$\left.\begin{aligned} \nu\, \text{Cos.}\, \varkappa &= \text{n Cos. k} + \text{N Cos. K} \\ \nu\, \text{Sin.}\, \varkappa &= \text{n Sin. k} + \text{N Sin. K} \end{aligned}\right\}.$$

Aus den vorhergehenden Angaben erhält man auch sofort die tropischen Umlaufszeiten der Knoten der wahren Bahnen auf ihren mittleren in Beziehung auf den Frühlingspunct der Erde. So ist für den zweiten Satelliten die jährliche siderische Bewegung 12°,048, also die jährliche tropische Bewegung $12^\circ,048 - 0^\circ,0139 = 12^\circ,0341$, und daher die gesuchte tropische Umlaufszeit dieses Knotens

$$\frac{360}{12,0341} = 29,914 \text{ Julian. Jahre.}$$

Ebenso erhält man für den Knoten des dritten Satelliten die tropische Umlaufszeit 141,739 und für den des vierten 531,350 Jahre.

Die *Neigungen* werden am gröſsten, wenn diese aufsteigenden Knoten der Bahnen mit dem aufsteigenden Knoten des

Jupitersäquators zusammenfallen, und am kleinsten, wenn sie mit dem niedersteigenden Knoten dieses Aequators coincidiren. Um die Perioden dieser Aenderungen der Neigungen zu finden, hat man z. B. für den zweiten Satelliten die jährliche tropische Bewegung der Knoten der wahren Bahn auf der mittleren, nach dem Vorhergehenden,

$$-12^\circ{,}0483 + 0^\circ{,}0139 = -12^\circ{,}0344,$$

während die jährliche tropische Bewegung der Knoten des Jupiteräquators ist

$$+0^\circ{,}0138,$$

also ist auch die jährliche Bewegung der Knoten der wahren Bahn auf der mittleren in Beziehung auf den Knoten des Jupiteräquators gleich $12^\circ{,}0482$ und daher die Periode der Aenderung der Neigung des zweiten Satelliten

$$\frac{360}{12{,}0482} = 29{,}88 \text{ Jahre.}$$

Ebenso findet man für den dritten 140,97 und für den vierten 520,71 Jahre.

Um endlich die Epochen dieser gröfsten Neigungen der Satellitenbahnen zu finden, so werden diese Epochen dann statt haben, wenn die aufsteigenden Knoten der Satellitenbahnen, z. B. für den zweiten, oder wenn die Gröfse

$$12^\circ{,}880 - 12^\circ{,}0344\, t$$

mit dem aufsteigenden Knoten des Jupiteräquators, das heifst, mit

$$314^\circ{,}465 + 0^\circ{,}01384\, t$$

zusammenfällt.

Setzt man also diese beiden Ausdrücke einander gleich, so erhält man

$$t = -25{,}0315 \text{ Jahre,}$$

und da, nach dem eben Gesagten, die Periode der gröfsten Neigungen bei diesem Satelliten 29,88 Jahre beträgt, so sind die Epochen der gröfsten Neigungen

1835,73	1746,09
1805,85	1716,21
1775,97	1686,33 u. s. w.

und ebenso für den dritten

1906,15
1765,17
1624,20,

so wie für den vierten

1968,80

1448,09 u. s. w.

Diefs stimmt genau genug mit denjenigen Resultaten überein, die Maraldi aus seinen unmittelbaren Beobachtungen dieser gröfsten Neigungen gefunden hat, indem er diese Epochen für den zweiten Satelliten auf die Jahre 1747, 1717 und 1687, für den dritten aber auf 1765 und 1633 bestimmt hat.

IV. Ellipticität dieser Bahnen.

Die Abweichung der Bahn der zwei ersten Satelliten von einem Kreise oder die Ellipticität dieser zwei Bahnen ist zu gering, um von uns bemerkt zu werden. Wir nehmen daher dieselben als vollkommen kreisförmig an. Die Bahn des dritten Monds aber hat eine bemerkbare Excentricität. Schon Wargentin, der sich zuerst mit diesen Nebenplaneten anhaltend beschäftigte und ihre Bewegungen zu erforschen suchte, fand, dafs die Excentricität dieses Satelliten veränderlich ist. Um das Jahr 1682 hatte nämlich die Mittelpunctsgleichung dieser Bahn ihren gröfsten Werth 0°,221 und im J. 1777 ihren kleinsten 0°,085.

Die Bahn des vierten Satelliten hat die gröfste Excentricität, da sie in ihrem gröfsten Werthe auf 0°,854 steigt. Auch sie ist veränderlich, jedoch weniger als jene, da sie in ihrem Minimum nur auf 0°,814 herabsinkt.

Die Ursache dieser Aenderungen der elliptischen Form der Bahnen der beiden äufsersten Satelliten entdeckte Laplace durch seine theoretischen Untersuchungen und fand, dafs jeder dieser zwei Monde gleichsam eine doppelte Mittelpunctsgleichung habe, von welchen die eine von der Lage seiner eignen, die zweite aber von der Lage der grofsen Axe der anderen Bahn abhängt. Um die Lagen dieser grofsen Axen zu bestimmen, hat man für die *jovicentrische Länge des Perijoviums* (d. h. des dem Jupiter nächsten Endes dieser grofsen Axe), von dem Frühlingspuncte der Erde gezählt, bei dem dritten Monde

$$309°,439 + 2°,6248\,t$$

und bei dem vierten

$$180°,343 + 0°,7302\,t,$$

wo t die Anzahl julianischer Jahre seit 1750 bezeichnet. Fügen wir diesen Angaben noch die *Epochen* dieser vier Satelliten oder ihre mittleren jovicentrischen Längen bei, die durch folgende Ausdrücke gegeben werden:

	Jovicentr. Länge für 1750 + t.
I Sat. . . .	15°,0128 + 74324°,35467 t
II — . . .	311,8404 + 37027,13231 t
III — . . .	10,2541 + 18378,52114 t
IV — . . .	72,5512 + 7878,84714 t.

Da die grofsen Axen dieser vier Bahnen schon oben gegeben wurden, so reicht das Vorhergehende hin, den Ort dieser Satelliten in ihren Bahnen oder auch in Beziehung auf die Ekliptik für jede gegebene Zeit durch Rechnung zu bestimmen, so lange man nämlich auf die *Störungen*, welche diese Himmelskörper erleiden, keine Rücksicht nimmt.

V. Störungen der Satelliten.

Da die Masse Jupiters gegen die seiner vier Satelliten so grofs und da überdiefs seine Entfernung von der Sonne so bedeutend ist, so wird diejenige Störung, welche die Sonne in der Bewegung dieser Satelliten erzeugt, nur sehr gering seyn können. Dadurch fällt die grofse Schwierigkeit ganz weg, die bei der Bestimmung der Bewegung unsers Mondes, auf welchen die so viel nähere Sonne noch sehr bedeutend einwirkt, den Geometern so viele Mühe gemacht hat. Wenn man daher hier, wo es blofs um eine allgemeine Ansicht des Gegenstandes zu thun ist, von dieser Einwirkung der Sonne, so wie von der noch viel kleinern des Saturn, ganz abstrahirt, so bleibt blofs die Betrachtung derjenigen Störungen übrig, welche diese Monde von einander selbst erleiden. Die Berechnung dieser Störungen ist aber dann sehr einfach[1], und es wird hier genügen, nur die Resultate ausführlicherer Untersuchungen, und zwar blofs für die Zeit der Finsternisse dieser Monde, mitzutheilen, da diese letzten vorzüglich der Gegenstand unserer Beobachtungen sind. Nennt man l die mittlere und λ die wahre, durch die Störungen veränderte,

1 Vergl. Littrow Elemente der phys. Astronomie. Wien 1827. S. 384.

jovicentrische Länge des Mondes, ω das Perijovium seiner Bahn, so wie m die mittlere Anomalie Jupiters vom Perihel gezählt, und bezeichnet man diese Gröſsen l, λ und ω für den II., III., IVten Satelliten mit 1, 2, 3 Accenten, so erhält man für die wahren Längen dieser Monde die folgenden Ausdrücke[1]:

$$\begin{aligned}\lambda = l &- 0°{,}45\,\text{Sin.}\,2(l-l') \\ &- 0{,}02\,\text{Sin.}\,(l-2l'+\omega'') \\ &- 0{,}01\,\text{Sin.}\,(l-2l'+\omega''').\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda' = l' &- 0°{,}01\,\text{Sin.}\,(l'-l'') \\ &+ 1{,}07\,\text{Sin.}\,2(l'-l'') \\ &+ 0{,}01\,\text{Sin.}\,4(l'-l'') \\ &+ 0{,}03\,\text{Sin.}\,(l'-\omega'') \\ &+ 0{,}01\,\text{Sin.}\,(l'-\omega''') \\ &+ 0{,}05\,\text{Sin.}\,(l-2l'+\omega'') \\ &+ 0{,}02\,\text{Sin.}\,(l'-2l''+\omega''') \\ &- 0{,}01\,\text{Sin.}\,m.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda'' = l'' &- 0°{,}07\,\text{Sin.}\,(l'-l'') \\ &+ 0{,}01\,\text{Sin.}\,2(l''-l''') \\ &+ 0{,}15\,\text{Sin.}\,(l''-\omega'') \\ &+ 0{,}07\,\text{Sin.}\,(l''-\omega''') \\ &+ 0{,}01\,\text{Sin.}\,(l'-2l''+\omega'') \\ &- 0{,}01\,\text{Sin.}\,m.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda''' = l''' &- 0°{,}02\,\text{Sin.}\,(l'''-\omega'') \\ &+ 0{,}83\,\text{Sin.}\,(l'''-\omega''') \\ &- 0{,}03\,\text{Sin.}\,m.\end{aligned}$$

Mit diesen Ausdrücken erhält man also für die Zeiten der Finsternisse aus den mittleren jovicentrischen Längen dieser Monde die wahren Längen derselben. Da man aber nicht sowohl die Correction der mittleren Längen, sondern vielmehr die Correction der mittleren jovicentrischen Conjunctionen oder Oppositionen dieser Monde mit der Sonne sucht, so wird man nur die Coefficienten der vorhergehenden Sinus durch die synodischen Revolutionen, in Secunden ausgedrückt, multipliciren und das Product durch 360 dividiren, um dadurch die gesuchte Correction der mittleren Conjunction oder die

1 Vergl. Littrow Elemente d. phys. Astron. Wien 1827. S. 394.

Grösse λ — I in Zeitsecunden ausgedrückt zu erhalten. Für den ersten Mond z. B. hat man diesen Factor:

$$\frac{1,769864 \times 86400}{360} = 425,$$

so dafs man daher folgende Factoren erhält

für den I	Sat. . .	425
II		853
III		1720
IV		4021.

Auf diese Weise umgestaltet geben die vier vorhergehenden Gleichungen die Zeiten der wahren Conjunctionen dieser Satelliten, die als Hauptelement der Berechnung ihrer *Finsternisse* zu betrachten sind.

VI. Finsternisse der Satelliten im Allgemeinen.

Der Schatten, welchen Jupiter als ein dunkler Körper hinter sich wirft, wenn er von der Sonne beschienen wird, ist die Ursache, dafs uns die Satelliten desselben oft plötzlich und zu einer Zeit verschwinden, wo sie noch weit von dem Rande ihres Hauptplaneten entfernt sind. Der dritte und vierte erscheinen oft ebenso plötzlich wieder nach ihrer Verschwindung und zwar auf derselben Seite Jupiters. Diese Erscheinungen sind ganz unsern Mondfinsternissen ähnlich, auch lassen die sie begleitenden Umstände keinen Zweifel über die Identität beider Phänomene. Diese Monde verschwinden nämlich immer auf der der Sonne gegenüberstehenden Seite Jupiters oder dort, wohin der Schattenkegel dieses Planeten gerichtet ist; sie verschwinden näher am Jupiter, wenn dieser Planet selbst näher zu seiner Opposition mit der Sonne kommt, und die Dauer ihrer Verschwindung stimmt ganz mit der Zei übereín, die sie, den astronomischen Rechnungen gemäfs, bedürfen, um den von ihnen beschriebenen Weg in jenem Schattenkegel zurückzulegen.

Zuweilen sieht man auch diese Monde vor der Scheibe Jupiters, wo sie sich durch ihre Farbe von dem Licht dieser Scheibe unterscheiden lassen. Gute Fernröhre zeigen dann sogar den Schatten, welchen die Monde auf den Jupiter wer-

fen und welcher sie auf ihrem Wege über die Scheibe ihres Hauptplaneten begleitet. Diese Erscheinungen sind demnach wahre Sonnenfinsternisse für Jupiter, da denjenigen Orten der Oberfläche dieses Planeten, die eben von jenen Schatten getroffen werden, der Anblick der Sonne ganz ebenso entzogen wird, wie auch wir die Sonne verfinstert sehn, wenn der Mond zur Zeit seines Neulichts zwischen uns und die Sonne tritt. Bei diesen Vorübergängen der Satelliten vor der Jupitersscheibe erscheinen die Satelliten zuweilen nicht als helle, sondern als dunkle Flecken, und zwar von beträchtlich kleinerer Dimension, als die sie begleitenden Schatten. SCHRÖTER und HARDING, welche diese dunklen Flecken öfter gesehn haben, waren der Meinung, daſs diese Monde auf ihrer Oberfläche groſse dunkle Stellen haben, die kein Licht reflectiren.

Fig. 141. Sey S der Mittelpunct der Sonne und I der Jupiters, wie $\alpha\beta\gamma\delta$ die Bahn eines seiner Monde. Die Erde bewege sich in ihrer Bahn ABCDE von A nach D oder von West gen Ost, so wie auch der Mond in derselben Richtung von α nach β geht. Zieht man die zwei geraden Linien, welche die Oberfläche der Sonne und Jupiters auf derselben Seite berühren, so erhält man die Begrenzung mNn des Schattenkegels, den Jupiter auf der von der Sonne abgewendeten Seite hinter sich wirft.

Wenn der Mond in der Gegend $\alpha\beta$ seiner Bahn ankommt oder wenn er in den Schattenkegel Jupiters tritt, so verliert er dadurch sein von der Sonne geborgtes Licht und wird uns daher unsichtbar, weil er eben eine Mondfinsterniſs hat. Wenn aber der Satellit in der Gegend $\gamma\delta$ seiner Bahn oder wenn er vor dem Jupiter, zwischen ihm und der Sonne steht, so wirft er seinen eignen Schatten auf Jupiter und dieser letztere hat dann eine Sonnenfinsterniſs. Da der Durchmesser des ersten Satelliten den Bewohnern Jupiters nach dem Vorhergehenden (N. II) unter dem Winkel von 33′ 16″, der Durchmesser der Sonne aber nur unter dem Winkel von 6 Minuten, also über fünfmal kleiner erscheint, so wird dieser Mond den Bewohnern Jupiters bei ihren totalen Finsternissen die Sonne durch längere Zeit ganz bedecken können. Da ferner wegen der ungemeinen Gröſse Jupiters die Basis seines Schattenkegels ebenfalls sehr groſs, im Gegentheil aber jene Satelliten gegen ihren Hauptplaneten sehr klein sind, und da endlich die Bah-

nen dieser Monde gegen die Bahn Jupiters, in welcher die Schattenaxe IN liegt, nur sehr wenig geneigt sind, so werden diese Monde, wenigstens die drei ersten, bei jeder Opposition durch diesen Schattenkegel gehn oder verfinstert werden, so dafs daher auf Jupiter die Finsternisse selbst eines und desselben Mondes viel häufiger seyn werden, als auf der Erde.

Bei unsern Mond- und Sonnenfinsternissen liegen Mond, Sonne und Erde stets in derselben geraden Linie. Da wir aber die Bewegung der Jupitersmonde nicht aus dem Mittelpuncte I ihrer kreisförmigen Bahnen, sondern aus irgend einem Puncte A, B, C.. der Erdbahn betrachten, der im Allgemeinen aufser der geraden Linie, welche die Sonne mit dem Jupiter und seinem Monde verbindet, also aufser der Schattenlinie IN liegt, so wird es auf diese Stelle der Erde gegen jene Schattenlinie IN ankommen, ob die Finsternisse, welche jene Monde erleiden, uns sichtbar oder unsichtbar sind. Der Mond wird nämlich in dem Augenblicke verfinstert, wo er in dem Puncte α seiner Bahn in den Schattenkegel mNn tritt. Steht die Erde in der Gegend AB auf der Westseite der Schattenaxe IN, so wird ihr die Finsternifs in α sichtbar seyn, steht sie aber irgendwo in DE auf der Ostseite, so wird ihr der Ort α, wo der Mond in den Schatten tritt, von der Scheibe mn des Jupiter selbst verdeckt seyn und sie wird daher den Eintritt des Monds in den Schatten nicht sehn. In dem Puncte C, oder wenn die Erde in der Schattenaxe selbst liegt, ist Jupiter für sie in Opposition mit der Sonne. Vor dieser Opposition werden also die Eintritte der Monde in den Schatten von der Erde aus sichbar, nach der Opposition aber werden sie unsichtbar seyn. Je näher übrigens die Erde auf ihrem Wege von A nach B diesem Puncte C kommt, desto näher kommt auch die Gesichtslinie Aα, Bα,.. der Schattenaxe IN oder desto näher an dem westlichen Rande n des Jupiter werden sich diese Eintritte der Monde ereignen. Aus dem Puncte B z. B. sieht die Erde den Eintritt des Monds in α unter der Entfernung oder unter dem Winkel IBα von Jupiters Mittelpunct und den Austritt in β des Monds aus dem Schatten unter dem Winkel IBβ. Wenn daher diese Gesichtslinie Bβ den westlichen Rand Jupiters in n eben berührt, so sieht die Erde diesen Austritt des Monds

gar nicht, weil der Mond in dem Augenblicke, wo er den Schatten Jupiters in β verläſst, sofort hinter die Scheibe dieses Planeten tritt und uns daher noch immer unsichtbar bleibt, da er jetzt vom Jupiter selbst für uns verdeckt wird. Bald darauf, wenn die Erde von B gegen b hin vorrückt, werden diese Austritte ganz hinter der Scheibe Jupiters statt haben, und noch einige Zeit später in b' wird man von der Erde auch nicht einmal die Eintritte in α mehr sehn können, da auch diese schon von der Scheibe des Planeten verdeckt werden.

Vor der Opposition Jupiters also, oder zu der Zeit, wo dieser Planet nach Mitternacht in den ersten Morgenstunden durch den Meridian geht, fällt der Schattenkegel desselben für uns auf die westliche Seite, nach der Opposition aber auf die östliche, daher wir auch dort die Eintritte der Monde auf der westlichen, hier aber die Austritte auf der östlichen Seite Jupiters sehn, während uns dort die Austritte auf der östlichen und hier die Eintritte auf der westlichen Seite im Allgemeinen unsichtbar sind, indem uns beide von der Scheibe des Planeten verdeckt werden. In der Mitte zwischen Opposition und Conjunction aber, in den sogenannten Quadraturen, wo Jupiter volle 90 Grade östlich oder westlich von der Sonne steht und daher um 6 Uhr Morgens oder Abends durch den Meridian geht, zu dieser Zeit fällt auch sein Schatten am stärksten östlich oder westlich, und zwar so sehr, daſs die vom Jupiter ferneren Theile dieses Schattens *ganz* auf der einen oder auf der andern Seite der Planetenscheibe liegen, daher wir auch dann die Eintritte und die Austritte oder den Anfang und das Ende derselben Finsterniſs auf einer und derselben Seite Jupiters sehn können. Dieſs ist in der That sehr oft der Fall bei dem dritten und vierten Satelliten, deren Entfernung vom Jupiter schon so bedeutend ist. Die zwei ersten aber stehn ihren Hauptplaneten immer so nahe, daſs man vor der Opposition bloſs ihre Eintritte und nach der Opposition bloſs ihre Austritte, nie aber beide zugleich sehn kann.

Wenn aber der Satellit in die Gegend $\gamma\delta$ seiner Bahn kommt, die zwischen dem Planeten und der Erde liegt, so sieht man ihn von der Erde über die Scheibe Jupiters ziehn, und da hier der Satellit seinen eigenen Schatten auf die Scheibe Jupiters wirft, so entstehn dadurch auf der Oberfläche dieses

Planeten wahre Verdeckungen der Sonne oder wahre Sonnenfinsternisse, wie bereits oben gesagt worden ist.

VII. Bestimmung des Schattenkegels.

Um die Finsternisse der Satelliten Jupiters zu bestimmen, mufs man vor Allem die Gröfse, Gestalt und Lage des Schattens kennen, den Jupiter hinter sich wirft, wenn er von der Sonne beschienen wird. Es sey A′ der Mittelpunct und A′M′ = a der Halbmesser einer leuchtenden, ferner A der Mittelpunct, so wie AM = b der Halbmesser einer dunklen Kugel, und endlich AA′ = c die Entfernung der Mittelpuncte dieser zwei Kugeln. Zieht man zu den beiden Kreisen, welche hier die zwei Kugeln vorstellen, die äufseren Tangenten, die sich in T, und die inneren Tangenten, die sich in t schneiden, so wird die Grenze des vollen Schattens durch MTN und die des Halbmessers durch MtN bezeichnet. Beide Schatten sind Kegel, von welchen der erste seinen Scheitel in T und seine Basis MN an der dunklen Kugel hat, während der zweite oder der Halbschattenkegel seinen Scheitel in t, zwischen den beiden Kugeln, und seine Basis jenseit der dunkeln Kugel in einer unendlichen Entfernung hat. Man ziehe aus den Mittelpuncten A′ und A der beiden Kugeln nach den Berührungspuncten M′ und M derselben die beiden Halbmesser A′M′ und AM und fälle von den Puncten M′ und M die Lothe M′a′ und Ma auf die Linie A′AT der beiden Mittelpuncte. Nennt man α den Winkel ATM an dem Scheitel T des vollen Schattens und x die Entfernung A′T des leuchtenden Körpers von dem Scheitel dieses Schattenkegels, so hat man

Fig. 142.

$$a = M'T \, \mathrm{Tang}.\alpha$$

$$M'T = \sqrt{x^2 - a^2},$$

so wie

$$\sqrt{(x-c)^2 - b^2} = b \, . \, \mathrm{Cotg}.\alpha.$$

Eliminirt man aus diesen drei Gleichungen die Gröfsen M′T und Tang. α, so erhält man

$$x - c = \pm \frac{bx}{a},$$

wo hier und in der Folge das obere Zeichen für den vollen, das untere aber für den Halbschatten gehört.

Die letzte Gleichung giebt

$$x = A'T = \frac{ac}{a \mp b},$$

also auch

$$AT = x - c = \frac{\pm bc}{a \mp b},$$

und diefs sind die beiden Entfernungen A′T und AT des Scheitels T und t von den Mittelpuncten beider Kugeln. Ebenso findet man für die zwei Gröfsen A′a′ und Aa die Werthe

$$A'a' = \frac{a}{c}(a \mp b)$$

und

$$Aa = \frac{b}{c}(a \mp b).$$

Die krummen Linien, in welchen die beiden Kugeln von den zwei Schattenkegeln berührt werden, sind Kreise, deren Mittelpuncte a′ und a und deren Halbmesser die Lothe a′ M′ und aM auf die Axe A′AT sind. Es ist aber

$$a'M' = \sqrt{a^2 - (A'a')^2} \text{ und } aM = \sqrt{a^2 - (Aa)^2},$$

also sind auch, wenn man die vorhergehenden Werthe von A′a′ und Aa substituirt, die Halbmesser der erwähnten Kreise

$$a'M' = \frac{a}{c}\sqrt{c^2 - (a \mp b)^2},$$

$$aM = \frac{b}{c}\sqrt{c^2 - (a \mp b)^2}.$$

Um noch den Halbmesser BC des kreisförmigen Schnitts zu finden, der durch eine Ebene entsteht, die in der Entfernung AB = r von dem Mittelpuncte der dunklen Kugel senkrecht auf der Axe A′AT steht, hat man, wenn der Winkel ATM = α ist,

$$\text{Tang.}\,\alpha = \frac{BC}{BT} \text{ oder } \text{Tang.}\,\alpha = \frac{BC}{AT - r}.$$

Es war aber

$$AT = \frac{bc}{a \mp b} \text{ und } \text{Sin.}\,\alpha = \frac{a \mp b}{c},$$

also ist auch, wenn man diese Werthe von AT und α in der vorhergehenden Gleichung substituirt,

$$BC = \frac{\pm b(c+r) - ar}{\sqrt{c^2 - (a \mp b)^2}}.$$

Setzt man endlich die Gröfse $A'B = c + r = x$ oder $r = x - c$ und $BC = \sqrt{y^2 + z^2}$ und substituirt man diese Werthe von r und BC in der letzten Gleichung, so erhält man

$$(y^2 + z^2)\,[c^2 - (a \mp b)^2] = [ac - x(a \mp b)]^2,$$

für die Gleichung der Oberfläche des Schattenkegels zwischen den drei unter sich senkrechten Coordinaten x, y, z, wo wieder das obere Zeichen für den vollen, das untere aber für den Halbschatten gehört.

Zusammengesetzter wird die Auflösung dieser Aufgabe, oder die Bestimmung derjenigen Fläche, welche zwei ihrer Gestalt und Lage nach gegebene Flächen ringsum berührt, wenn diese zwei gegebenen Flächen nicht mehr Kugeln, wie in dem Vorhergehenden, sondern z. B. Ellipsoide sind[1]. Bei Jupiter sollte auf diese Abweichung von der Kugelgestalt allerdings Rücksicht genommen werden, da die Abplattung dieses Planeten sehr grofs ist und nahe $\frac{1}{14}$ beträgt. Allein wegen der geringen Neigung des Aequators dieses Planeten gegen seine Bahn, welche Neigung nur 3,092 Grade beträgt, wird man die grofse Axe Jupiters als in der Bahn desselben liegend und die kleine darauf senkrecht annehmen können. Dann wird also auch der Schnitt des Schattenkegels mit einer Ebene, die auf der Axe dieses Schattens senkrecht steht, eine Ellipse seyn, deren grofse Axe in der Jupitersbahn und deren kleine darauf senkrecht ist. Heifst dann A der Winkel, unter welchem aus dem Mittelpuncte Jupiters die halbe grofse Axe dieses elliptischen Schattenschnitts gesehn wird, und ist $\alpha = \frac{1}{14}$ die Abplattung Jupiters, so ist die halbe kleine Axe des Schattenschnitts gleich $A(1 - \alpha)$ und daher die Gleichung des Schattenschnitts selbst

$$\frac{y^2}{A^2} + \frac{z^2}{A^2(1-\alpha)^2} = 1 \quad \ldots \quad (A)$$

Wenden wir das Vorhergehende auf die Körper unsers Son-

1 Vergl. Littrow analytische Geometrie. Wien 1823.

nensystems an, so hat man, wenn man blofs den vollen Schatten berücksichtigt, für die Länge des Schattens

$$AT = \frac{bc}{a-b} \text{ und } A'T = AT + c = \frac{ac}{a-b}$$

und für die Entfernungen der Mittelpuncte der beiden Kugeln von den Mittelpuncten der Kreise, in welchen sie von dem Schattenkegel berührt werden,

$$Aa = \frac{b}{c}(a-b) \text{ und } A'a' = \frac{a}{b}.(Aa) = \frac{a}{c}(a-b).$$

Ist ferner $A'B = r$, so erhält man für den Halbmesser BC des Schattenschnitts, der durch eine auf AT senkrecht stehende und durch den Punct B gehende Ebene entsteht,

$$BC = \frac{bc - (a-b)r}{c \operatorname{Cos.} \varphi},$$

$$\text{wo } \operatorname{Sin.} \varphi = \frac{a-b}{c} \text{ ist,}$$

und statt des letzten Ausdrucks wird man auch, da für die meisten Planeten c sehr grofs gegen a und b ist, die abgekürzte Gleichung nehmen können

$$BC = b - \frac{(a-b)}{c} r.$$

So hat man für den vollen Schatten bei unseren *Mondfinsternissen*

$a = 96238$	geogr. Meilen	Halbmesser der Sonne,
$b = 859{,}44$	— —	Halbmesser der Erde,
$c = 20665800$	—	mittlere Entfernung der Erde von der Sonne,

woraus daher folgt

$$AT = 186216 \text{ geogr. Meilen}$$
$$A'T = 20852016$$
$$Aa = 3{,}97$$
$$A'a' = 444{,}17$$
$$BC = 859{,}44 - 0{,}004615\, r.$$

Für unsere *Sonnenfinsternisse* aber ist der Halbmesser des Monds $b = 233$ Meilen und die mittlere Entfernung des Monds von der Sonne

$$c = 20665800 - 51600 = 20614200 \text{ Meilen,}$$

während wieder $a = 96238$ ist. Daraus folgt

$$\begin{aligned} AT &= 50030 \text{ Meilen} \\ A'T &= 20664230 \\ Aa &= 1{,}08 \\ A'a' &= 448{,}20 \\ BC &= 233 - 0{,}004657\, r. \end{aligned}$$

Für die Verfinsterung der Jupiterssatelliten endlich ist der Halbmesser Jupiters $b = 9990$ Meilen und die mittlere Entfernung dieses Planeten von der Sonne

$$5{,}20278 \times 20665800 = 107519600$$

und, wie zuvor, $a = 96238$, so daſs man daher erhält

$$\begin{aligned} AT &= 12453870 \text{ Meilen} \\ A'T &= 119913470 \\ Aa &= 8{,}013 \\ A'a' &= 77{,}198 \\ BC &= 9990 - 0{,}00080217\, r. \end{aligned}$$

Man sieht daraus, daſs der Schattenkegel des Monds zur Zeit des Neumonds, wenn dieser Nebenplanet in seiner mittleren Entfernung von 51600 Meilen von der Erde ist, nur die Länge von 50030 M. hat, also noch nicht die Oberfläche der Erde erreicht. Wegen der verschiedenen Entfernung des Mondes von der Erde ist auch die Länge seines Schattenkegels verschieden. Der möglich gröſste und kleinste hat die Länge von 51110 und 49400 Meilen. Auch der Schattenkegel der Erde ist wegen der Excentricität der Erdbahn verschieden und immer zwischen den beiden Extremen 188640 und 182410 Meilen enthalten. Beim Jupiter aber ist die Länge seines Schattenkegels so groſs, daſs er selbst über den vierten Satelliten desselben noch mehr als 12 Millionen Meilen hinausreicht, daher auch diese Satelliten viel öfter verfinstert werden, als unser Mond.

VIII. Bestimmung der Dauer der Finsternisse der Jupitersmonde.

Sey C der Mittelpunct und AmB der Umkreis des oben (in VII) bestimmten elliptischen Schattenschnitts, cm ein Theil des Wegs des Satelliten und cC, so wie mM senkrecht auf den Jupitersäquator AB. Nennt man β die Breite und λ die jovicentrische Länge des Satelliten im Augenblick der Oppo-

Fig. 143.

sition desselben mit der Sonne, und ist m der Winkel, welchen der Satellit von dem Augenblicke der Immersion m in den Schatten bis zur Conjunction in c zurücklegt, so ist also

$$Cc = \beta \text{ und } CM = m,$$

so wie

$$mM = \beta - m \cdot \frac{\partial \beta}{\partial \lambda},$$

wo $m \cdot \frac{\partial \beta}{\partial \lambda}$ die Aenderung der Breite des Satelliten in der Zwischenzeit von der Immersion bis zur Opposition ist.

Wendet man diefs auf die Gleichung (A Nr. VII) an, so hat man, da

$$y = m \text{ und } z = \beta - \frac{m \partial \beta}{\partial \lambda}$$

ist, für die Gleichung des elliptischen Schattenschnitts

$$\frac{m^2}{A^2} + \frac{\left(\beta - \frac{m \partial \beta}{\partial \lambda}\right)^2}{A^2 (1 - \alpha)^2} = 1,$$

woraus man, da α nur klein ist, annähernd erhält

$$m = \frac{\beta \partial \beta}{(1 - \alpha)^2 \partial \lambda} \pm \frac{\sqrt{A^2 (1 - \alpha)^2 - \beta^2}}{1 - \alpha},$$

das obere Zeichen für die Immersion und das untere für die Emersion. Daraus folgt, dafs der ganze Winkel, welchen der Satellit um den Mittelpunct Jupiters während der ganzen Dauer der Finsternifs beschreibt, gleich

$$\frac{2 \sqrt{A^2 (1 - \alpha)^2 - \beta^2}}{1 - \alpha}$$

seyn wird. Nennt man also S die synodische Bewegung des Satelliten, in der Einheit der Zeit A ausgedrückt, und bezeichnet man durch T die ganze Dauer der Finsternifs, so ist

$$T = \frac{2 \sqrt{A^2 (1 - \alpha)^2 - \beta^2}}{(1 - \alpha) . S} \ldots \text{ (B)}$$

und diese Gleichung giebt die gesuchte Dauer der Finsternifs, wenn die Breite β des Satelliten in der Opposition bekannt ist, also auch umgekehrt diese Breite β, wenn die Dauer T durch unmittelbare Beobachtung der Finsternifs bekannt geworden ist.

Will man dann auch die Länge des Satelliten zur Zeit der Mitte der Finsternifs so hat man aus dem Vorhergehenden die Länge desselben für die Zeit der Immersion oder Emersion

$$\lambda - \frac{\beta \partial \beta}{\partial \lambda} \mp \frac{\sqrt{A^2(1-\alpha)^2 - \beta^2}}{1-\alpha},$$

woraus daher sofort folgt, dafs die jovicentrische Länge zur Zeit der Mitte der Finsternifs seyn wird

$$\lambda - \frac{\beta \partial \beta}{\partial \lambda}.$$

Um noch den Werth von $\frac{\partial \beta}{\partial \lambda}$ zu eliminiren, hat man, wenn n die Neigung und x die Länge des Knotens der Satellitenbahn mit der Jupitersbahn bezeichnet, durch sphärische Trigonometrie

$$\text{Tang.}\, \beta = \text{Tang.}\, n \,\text{Sin.}\, (\lambda - x),$$

also auch

$$\frac{\partial \beta}{\partial \lambda} = \text{Tang.}\, n \,\text{Cos.}\, (\lambda - x)\ \text{Cos.}^2 \beta,$$

so dafs daher die jovicentrische Länge des Satelliten zur Zeit der Mitte der Finsternifs

$$\lambda - \text{Tang.}^2 n \,.\, \text{Cos.}\, (\lambda - x)\, \text{Cos.}^2 \beta$$

seyn wird.

Diese jovicentrische Länge des Satelliten kann auch auf folgende Weise gefunden werden. Ist nämlich L die Länge der Sonne S, fenner l, b die geocentrische Länge und Breite Jupiters P zur Zeit der Mitte der Finsternifs, so wie $TS = R$ die Entfernung der Erde T von der Sonne und $TP = \varrho$ vom Jupiter, V der Frühlingspunct, so hat man, da diese Gröfsen aus den astronomischen Tafeln oder aus den Beobachtungen bekannt sind, Fig. 144.

$$VTS = L,\ VTp = l,\ PTp = b \text{ und } STp = l - L,$$
$$\text{Cos.}\, \psi = \text{Cos.}\, b\ \text{Cos.}\, (l - L)$$

und

$$\text{Cotg.}\, \pi = \frac{\varrho - R\,\text{Cos.}\, \psi}{R\,\text{Sin.}\, \psi},$$

wo ψ gleich dem Winkel STp und π gleich PTS oder die sogenannte jährliche Parallaxe Jupiters bezeichnet. Ist dann λ' die heliocentrische Länge Jupiters, die ebenfalls durch die

Tafeln gegeben ist, so ist $\pi = 1 - \lambda'$ oder $\lambda' = 1 - \pi$ und dieses λ' ist zugleich, da hier von der Mitte der Finsterniſs die Rede ist, gleich der gesuchten jovicentrichen Länge des Satelliten.

Kennt man aber auf diese Weise zwei jovicentrische Längen λ', λ'' und zwei Breiten β', β'' des Satelliten, so findet man daraus auch die Neigung n seiner Bahn und die Länge ☊ des aufsteigenden Knotens dieser Bahn in der Ekliptik durch die folgenden Gleichungen der sphärischen Trigonometrie:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Tang. n Sin.}(\lambda' - ☊) = \text{Tang.}\,\beta' \\ \text{Tang. n . Sin.}(\lambda'' - ☊) = \text{Tang.}\,\beta''\end{array}\right\}$$

oder bequemer durch

$$\text{Tang. n . Sin.}(\lambda' - ☊) = \text{Tang.}\,\beta'$$

$$\text{Tang. n Cos.}(\lambda' - ☊) = \frac{\text{Tang.}\,\beta'' - \text{Tang.}\,\beta' \,\text{Cos.}(\lambda'' - \lambda')}{\text{Sin.}(\lambda'' - \lambda')}.$$

Hat man endlich in einer gröſsern Reihe von Beobachtungen die Werthe t und t' der halben gröſsten und der halben kleinsten Dauer der Finsterniſs eines Satelliten kennen gelernt, so findet man die Neigung n der Satellitenbahn durch folgenden einfachen Ausdruck, in welchem wieder S die synodische Umlaufszeit des Satelliten bezeichnet:

$$n = \frac{360}{S} \cdot \sqrt{t^2 - t'^2}.$$

Fig. 145. Ist nämlich AmnB der Durchschnitt des Schattenkegels in der Nähe des Satelliten, C dessen Mittelpunct, Nmn die Bahn für die kürzeste Dauer der Finsterniſs, und ist CR auf dieser Bahn senkrecht, so hat man, da Rm = Rn ist und da der Satellit zur Zeit der längsten Finsterniſs durch ACB geht,

$$\frac{Cm}{Rm} = \frac{CA}{Rm} = \frac{t}{t'}.$$

Die Gröſse Cm oder CA, im Bogen ausgedrückt, findet man aber durch die Proportion

$$S : t = 360^\circ : Cm$$

oder es ist

$$Cm = 360\,\frac{t}{S}$$

und daher auch

$$Rm = Cm. \frac{t'}{t} = 360 \frac{t'}{S}.$$

Da aber $CR = \sqrt{Cm^2 - Rm^2}$ ist, so ist auch

$$CR = \frac{360}{S} \sqrt{t^2 - t'^2},$$

wie zuvor, wo CR die gröfste jovicentrische Breite des Satelliten (für die kürzeste Finsternifs), also auch gleich der Neigung seiner Bahn gegen die Bahn Jupiters ist.

Durch die Beobachtungen hat man die gröfste Dauer dieser Finsternisse, wie folgt, gefunden:

für den I Sateliten	. . .	2,2622 Stunden
II	—	. . .	2,8678
III	—	. . .	3,5611
IV	—	. . .	4,7489.

IX. Merkwürdige Verhältnisse der Längen und der Geschwindigkeiten der drei ersten Satelliten.

Wenn man die oben gegebenen siderischen Umlaufszeiten dieser Satelliten näher betrachtet, so sieht man, dafs die Revolution des ersten nahe gleich der Hälfte des zweiten und dafs ebenso die Revolution des zweiten nahe gleich der Hälfte des dritten ist. Wenn diese Verhältnisse ganz genau statt hätten, so würde man, wenn T, T′, T″ die Revolution des I., II., III. Satelliten bezeichnen, die Gleichung haben

$$\frac{1}{T} + \frac{2}{T''} = \frac{3}{T'}.$$

Wir haben nämlich gefunden

$$T = 1{,}7691, \quad T' = 3{,}5512, \quad T'' = 7{,}1545,$$

also ist auch

$$\frac{1}{T} = 0{,}5653, \quad \frac{1}{T'} = 0{,}2816, \quad \frac{1}{T''} = 0{,}1398,$$

so dafs demnach zwischen den drei letzten Gleichungen die obige Gleichung sehr nahe besteht. Da aber die Gröfsen $\frac{1}{T}$, $\frac{1}{T'}$ und $\frac{1}{T''}$ nichts anderes, als die täglichen mittleren siderischen Bewegungen der Satelliten sind, so hat man, wenn

man diese Bewegungen durch ∂l, $\partial l'$ und $\partial l''$ bezeichnet, ebenfalls

$$\partial l + 2\partial l'' = 3\partial l' \;\ldots\; (C).$$

Ein anderes, nicht weniger merkwürdiges Verhältniſs besteht auch zwischen den *Epochen* dieser drei Satelliten oder zwischen den mittleren Längen derselben für irgend eine gegebene Zeit. Heiſst nämlich l, l' und l'' diese Länge des I., II. und III. Satelliten für irgend eine Zeit, so ist immer sehr nahe

$$l + 2l'' = 3l' + 180° \;\ldots\; (D).$$

Die sämmtlichen Beobachtungen dieser Satelliten seit der Zeit ihrer Entdeckung haben gezeigt, daſs diese beiden Gleichungen (C) und (D) sehr nahe erfüllt werden. Die Abweichungen sind immer nur sehr gering und innerhalb der Grenzen der möglichen Beobachtungsfehler gefunden worden. Die Theorie endlich hat gezeigt, daſs diese beiden Gleichungen in vollkommener Schärfe existiren. Es ist in der That sehr unwahrscheinlich, daſs diese drei Monde durch einen bloſsen Zufall in diejenigen Entfernungen von Jupiter gesetzt worden sind, welche für jene Verhältnisse nothwendig sind, aber es kann angenommen werden, daſs dieser Zufall jene Monde wenigstens nahe dorthin gesetzt habe, wo sie diesen Verhältnissen entsprechen. Unter dieser Voraussetzung zeigte aber die Theorie, daſs dann bloſs durch die gegenseitige Einwirkung dieser drei Satelliten auf einander jene anfänglich nur genäherten Verhältnisse in der Folge der Zeit ganz genau werden muſsten und daſs sie, einmal genau hergestellt, auch immer in diesem Zustande verbleiben werden, so lange das System selbst durch keine gewaltsame äuſsere Einwirkung, wie z. B. durch einen Kometen, gestört wird. Auch die seculären Gleichungen, welchen die mittleren Bewegungen dieser Satelliten unterworfen und die der seculären Beschleunigung unsers Mondes ähnlich sind[1], werden jene Verhältnisse nicht zu stören im Stande seyn, so wenig als etwa ein widerstehendes Mittel, in welchem sich diese Monde bewegen mögen, oder sonst eine andere Ursache, deren Einwirkung nur nach und nach merklich wird. Denn dieselbe gegenseitige Anziehung dieser drei Monde wird auch jene seculären Gleichungen

1 S. Art. *Mond.* Bd. VI. S. 2379.

der Monde denselben Verhältnissen unterwerfen, so daſs die seculäre Gleichung des ersten, mehr der doppelten des dritten, wieder gleich der dreifachen des zweiten Satelliten seyn wird. Selbst jetzt schon sieht man diejenigen ihrer Ungleichheiten, die erst in vielen Jahren wiederkehren, den erwähnten Verhältnissen sich coordiniren und zwar desto inniger anschlieſsen, je gröſser die Perioden dieser Ungleichheiten selbst sind. Diese Eigenschaft, durch welche jene drei ersten Monde Jupiters gleichsam ein isolirtes System geworden sind, das sich selbst im Himmelsraume das Gleichgewicht hält, muſs sich selbst auf die Rotationen derselben erstrecken, wenn diese, wie die Beobachtungen zu bestätigen scheinen, ihren Revolutionen um den Hauptplaneten gleich sind, wie dieſs auch beim Monde der Erde der Fall ist. Die Anziehung dieses gröſsten aller Hauptplaneten ist stark genug, diese Erscheinung hervorzubringen und der Umdrehung seiner Monde dieselben seculären Ungleichheiten mitzutheilen, von welchen ihre Umlaufszeiten afficirt sind.

Daſs übrigens der merkwürdige Komet, der im Jahre 1770 mitten durch das System dieser Satelliten gegangen ist, jene Verhältnisse nicht gestört und überhaupt keine einzige merkbare Veränderung in denselben hervorgebracht hat, ist wohl ein neuer Beweis, daſs die Masse dieses, wie vielleicht aller Kometen, nur äuſserst gering seyn kann. Die Rechnung zeigt, daſs dieser Komet, wenn seine Masse nur den hunderttausendsten Theil der Masse der Erde betragen hätte, schon uns bemerkbare Aenderungen in jenem Systeme hätte hervorbringen müssen. Dasselbe schöne Verhältniſs, welches zwischen den siderischen Bewegungen statt hat, muſs auch zwischen den synodischen bestehn, da die synodische Bewegung nur die Differenz der siderischen Bewegung des Satelliten und der seines Hauptplaneten ist. Wenn man in der Gleichung (C) statt der siderischen Bewegung die synodische substituirt, so verschwindet die Bewegung Jupiters ganz aus der Gleichung, so daſs also dieselbe ungeändert bleibt.

Eine merkwürdige Folge dieses Verhältnisses ist, daſs die drei ersten Monde Jupiters nie zu gleicher Zeit eine Verfinsterung erleiden können. Denn wenn z. B. der zweite und der dritte zugleich verfinstert werden, so wird der erste immer mit Jupiter in Conjunction seyn oder vor ihm stehn, und wenn

der zweite und dritte Mond zugleich vor der Jupitersscheibe stehn oder auf dem Jupiter eine Sonnenfinsternifs verursachen, so wird der erste in Opposition oder hinter der Scheibe Jupiters stehn. Auch ist, so viel mir bekannt, der Fall nur ein einziges Mal vorgekommen, wo man Jupiter ganz ohne Satelliten gesehn hat. Diese Beobachtung ist von MOLYNEUX am 2ten Nov. 1681 alten Styls gemacht worden[1].

X. Entdeckung der Satelliten und Bestimmung der Masse Jupiters durch dieselben.

Was die Geschichte der Entdeckung der Jupiterstrabanten und der allmäligen Ausbildung ihrer Theorie, so wie die Beobachtung ihrer Rotation und endlich den Gebrauch derselben zu Längenbestimmungen betrifft, so enthält der bereits erwähnte Art. *Nebenplaneten* das Vorzüglichste, was darüber hier angeführt werden könnte. Wir beschliefsen daher diesen Gegenstand blofs durch einige nachträgliche zerstreute Bemerkungen.

Es scheint keinem Zweifel unterworfen zu seyn, dafs SIMON MARIUS zu Ansbach von Allen zuerst, und zwar im November 1609, die vier Satelliten Jupiters gesehn habe. Nach ihm erblickte sie GALILEI zu Padua am 7. Jan. 1610. Fast zu gleicher Zeit sah sie THOMAS HARRIOT am 16. Jan. 1610 zu London und am Ende desselben Jahres, nämlich im November 1610, bemerkten sie auch PEYRESC, GAUTIER und GASSENDI zu Aix in Frankreich[2]. Bemerkenswerth ist dabei, wie MARIUS auf diese Entdeckung kam. Im Jahre 1608 nämlich fand der brandenburgische geheime Rath J. PH. FUCHS von Bimbach in Mähren auf der Messe zu Frankfurt a. M. eines der damals noch wenig bekannten Fernröhre, das ein Niederländer zum Verkaufe dahin gebracht hatte. Er bezeugte Lust, dasselbe zu kaufen, stand aber wieder davon ab, da ihm der gesetzte Preis zu hoch schien. Bei seiner Rückkehr nach Ansbach erzählte FUCHS diese Begebenheit mit allen

1 MOLYNEUX, Optics. p. 271.

2 V. ZACH Mon. Corr. Bd. VIII. S. 43. XV. 435.

Umständen dem Simon Marius, dem er auch das Werkzeug so genau beschrieb, dafs Marius sogleich ein solches, obschon noch unvollkommenes Fernrohr zusammensetzen konnte. Im folgenden Jahre 1609 erhielt Fuchs aus den Niederlanden und auch aus Venedig bessere Gläser, mit welchen Marius schon bessere Fernröhre zusammensetzte, und mit diesen letzten entdeckte er die Jupiterssatelliten. Dieses wäre demnach nahe dieselbe Geschichte, die man auch von Galilei erzählt, der im J. 1609 auf die blofse Nachricht von der Existenz dieses Werkzeuges dasselbe ebenfalls selbst erfunden haben soll. Wenn wir diese Geschichte bemerkenswerth genannt haben, so ist es nicht sowohl wegen ihrer selbst, als wegen der Zeit, in welcher sie vorgefallen ist. Also im Jahre 1608 waren die neu erfundenen Fernröhre schon so verbreitet, dafs man sie auf die Messe nach Frankfurt bringen konnte. Auch in England waren im J. 1610 die Fernröhre schon sehr bekannt. So führt v. Zach einen Brief von Sir Christopher Heydon, London 6. Jul. 1610 datirt, an, in welchem es heifst: *Of my own experience with one of our ordinary trunks I have seen eleven stars in the Pleiades, whereas no age ever remembers above seven*, d. h. mit einem unserer *gewöhnlichen Guckkasten (Trunks)*, wie Heydon die ersten Fernröhre seiner Zeit nennt, weil sie vermuthlich die Gestalt von viereckigen Prismen, von kastenförmigen Parallelepipeden hatten. Der oben erwähnte Harriot nennt sie schon *Perspective-Cylinder*, weil sie wahrscheinlich schon in metallenen Röhren gefafst waren. Bekanntlich giebt Borelli[1] den Zacharias Jahnsen oder Johannides als denjenigen an, der das Fernrohr im J. 1590 zu Middelburg in Zeeland erfunden hat. Jahnsen war Glasschleifer und Brillenmacher in Middelburg und soll durch ein Spiel seiner Kinder mit Glaslinsen auf die Entdeckung geleitet worden seyn. Borelli belegt diese seine Aussagen mit Zeugnissen des Magistrats jener Stadt. Man hat diese Entdeckung auch einem gewissen Lippersheim oder dem Jacob Metius oder dem Cornelius Drebbel u. A. zuschreiben wollen. Von diesen wird besonders der Letzte von Bossut und von Montucla in ihren Geschichten der Mathematik in Schutz genommen, indem sie ihm ein

---

1 De vero telescopii inventore. Hag. Com. 1655.

ausgezeichnetes Talent und eine seltene gelehrte Bildung zuschreiben. Allein Adelung in seiner „Geschichte der menschlichen Narrheit" stellt diesen Drebbel geradezu als einen Charlatan dar, der nur ein Paar ganz unbedeutende Schriftchen hinterlassen habe, die durch ihren Styl schon den unwissenden Marktschreier verriethen. Auch soll er nicht, wie doch so oft gesagt wurde, der Erfinder des Thermometers, so wenig wie der des Fernrohrs seyn, obschon er sich dieser beiden und mehrerer andern Erfindungen auf eine groſssprecherische Weise selbst gerühmt haben soll.

Was die Benennung dieser Satelliten Jupiters betrifft, so wurden sie von Simon Marius, seinem Markgrafen von Brandenburg zu Ehren, *Sidera Brandenburgica* und von Galilei, seinem Herzog Medici zu Liebe, *sidera Medicea* genannt. Der Letzte oder einer seiner Schüler benannte selbst die einzelnen Satelliten mit den Familiennamen der Medicäer. So hieſs der erste Satellit Catharina oder auch Franciscus, der zweite Maria oder Ferdinandus, der dritte Cosmus *major* und der vierte Cosmus *minor*. Allein diese Schmeicheleien wurden bald vergessen und heutzutage sind sie selbst am Hofe jener Fürsten nicht mehr bekannt.

In den neuesten Zeiten ist besonders der vierte dieser Satelliten der Gegenstand anhaltender Beschäftigung der Astronomen geworden. Bekanntlich läſst sich die Masse derjenigen Hauptplaneten, die mit Satelliten versehn sind, bestimmen, wenn man die Halbmesser der Bahnen und die Umlaufszeiten der beiden Körper kennt. Ist nämlich a die halbe groſse Axe und T die siderische Umlaufszeit eines Planeten, so wie M die Masse der Sonne und m die Masse des Planeten, und bezeichnet man analog die halbe Axe der Satellitenbahn durch a′ und die siderische Umlaufszeit des Satelliten durch T′, so hat man

$$\frac{M}{m} = \left(\frac{a}{a'}\right)^3 \cdot \left(\frac{T'}{T}\right)^2.$$

Für Jupiter ist $a = 5{,}20279$ Halbmesser der Erdbahn und $T = 4332{,}59631$ Tage, für seinen vierten Satelliten aber ist $T' = 16{,}6890$ Tage und $a' = 26{,}998$ Halbmesser Jupiters. Da aber der Halbmesser Jupiters in seiner mittleren Entfernung von der Sonne aus dem Mittelpuncte der Sonne unter dem

Winkel von 18″,371 gesehn wird, so ist der Halbmesser Jupiters gleich a. Tang. 18″,371 Halbmesser der Erdbahn, und daher auch die mittlere Entfernung des vierten Satelliten von dem Mittelpuncte Jupiters oder der hier anzuwendende Werth der Gröſse a′ gleich

$$a' = 26{,}998 \, . \, a \, . \, \text{Tang.} \; 18'',371$$

oder

$$a' = 0{,}0125105 \text{ Halbmesser der Erdbahn.}$$

Substituirt man diese Werthe von a, a′ uud T, T′ in der vorhergehenden Gleichung, so erhält man

$$\frac{M}{m} = 1067$$

oder die Masse m des Jupiter ist gleich $\frac{1}{1067}$, wenn man die Masse M der Sonne gleich der Einheit annimmt. Von dieser Gröſse hatte schon NEWTON[1] die Masse Jupiters gefunden, indem er die Beobachtungen der gröſsten Digression zu Grunde legte, die sein Zeitgenosse POUND an diesem vierten Satelliten beobachtet hatte, und ganz ebenso groſs giebt sie auch noch LAPLACE[2] an. Bekanntlich lassen sich aber diese Massen der Planeten auch aus den Störungen schlieſsen, welche sie auf die andern Planeten ausüben. Da nun die drei genannten Planeten die gröſsten unsers Sonnensystems und daher ihre gegenseitigen Störungen sehr beträchtlich sind, so wurde dadurch LAPLACE verursacht, die Massen dieser Planeten auch auf diesem neuen Wege zu suchen. BOUVARD, der die hierher gehörenden Rechnungen auf LAPLACE's Veranlassung übernahm, fand dadurch folgende Massen:

für Jupiter . . $\frac{1}{1070}$,
- Saturn . . $\frac{1}{3512}$,
- Uranus . . $\frac{1}{17918}$.

Dazu macht LAPLACE die Bemerkung, daſs man die Differenz zwischen diesen und den älteren Angaben ungemein klein finden wird, wenn man die Schwierigkeiten bedenkt, die sich

1 In seinen Principien. Lib. III.

2 Mécan. céleste und Exposit. du Système du Monde. Liv. IV. Chap. III. Am letzten Orte findet LAPLACE auf demselben Wege die Masse Saturns = $\frac{1}{3359}$ und des Uranus = $\frac{1}{19500}$.

der Messung der Elongation des Satelliten und der Ellipticität seiner Bahn entgegensetzen. Er sagt hierüber[1]: „Indem ich meine Wahrscheinlichkeitsrechnung an die Calcüls anbrachte, die Bouvard ausgeführt hat, so habe ich gefunden, dafs man eine Million gegen Eins wetten kann, dafs die von Bouvard gefundene Masse Jupiters noch nicht um den hundertsten Theil ihres Werthes fehlerhaft ist.“ Ebenso will er Elftausend gegen Eins wetten, dafs die neue Masse Saturns um kein Hundertstel ihres Werthes irrig ist, und endlich nur 2500 gegen Eins, dafs die neue Masse des Uranus noch bis auf ihren vierten Theil richtig ist. Diese Ungewifsheit für Uranus kommt daher, dafs die Masse dieses Planeten gegen die des Saturn sehr klein, dafs also auch die Störung, welche Saturn von Uranus erfährt, nur gering ist, und dafs man daher aus diesen Störungen nicht mehr so sicher auf die wahre Ursache derselben, d. h. auf die Masse des Uranus, zurückschliefsen kann. Hierbei blieb es bis auf unsere Tage. Allein in den letzten Zeiten bemerkte man, dafs die Störungen, welche Jupiter auf die vier neuen Planeten ausübte, noch viel gröfser und daher auch noch viel geschickter seyn müssen, die Masse dieses Planeten zu bestimmen. Nicolai in Mannheim unternahm zuerst diese Untersuchungen, indem er die von Gauss entwickelten allgemeinen Störungsgleichungen auf die Juno anwendete, woraus er für die Jupitersmasse $\frac{1}{1053,9}$ fand. Ebenso leitete Encke aus den Störungen, die Jupiter in der Vestabahn hervorbringt, diese Masse gleich $\frac{1}{1050,1}$ und endlich auch aus dem von ihm benannten Kometen gleich $\frac{1}{1054,4}$ ab, sämmtlich gröfsere Werthe, als sie früher Newton gefunden hatte. Die Masse Jupiters war nämlich

nach Newton .. $\frac{1}{1067}$,

— Bouvard .. $\frac{1}{1070}$,

nach Nicolai u. Encke .. $\frac{1}{1052,8}$,

---

1 A. a. O. S. 47.

so dafs also die letzte die gröfste und die von Bouvard die kleinste Masse giebt.

Es schien nicht leicht, diese Differenzen zu vereinigen, obschon sie in der That grofs genug waren, um die Astronomen aufmerksam zu machen. Diese Differenz war weit entfernt, in so enge Grenzen eingeschlossen zu seyn, für die oben Laplace eine Million zu wetten keinen Anstand nahm, und sie ging auf volle Zweihundertstel des Ganzen. Wenn z. B. die Störung, welche einer der neuen Planeten von Jupiter leidet, im Allgemeinen zwei Grade beträgt, und sie kann beträchtlich höher steigen, so beträgt der zweihundertste Theil derselben schon 144 Secunden, also über 2,5 Minuten, und so grofse Abweichungen der Theorie von der Beobachtung mufsten den neuern Astronomen zu sehr auffallen, um nicht den Grund dieser Discordanz mit allem Eifer zu erforschen. Allein nachdem sie lange genug vergebens gesucht hatten, blieb ihnen, wie es schien, nichts übrig, als beide Resultate, bis auf bessere Einsicht, neben einander bestehn zu lassen. Viele kamen sogar auf die Ansicht, dafs bei der gegenseitigen Wirkung der Planeten auf einander nicht blofs das Gesetz der allgemeinen Schwere, sondern auch eine gewisse chemische Wahlverwandtschaft dieser Himmelskörper berücksichtigt werden müsse, und dafs, wegen einer solchen Verwandtschaft, Jupiter z. B. auf die Masse seiner Monde ganz anders einwirken müsse, als auf die Masse der neuen Planeten, die von jener der Monde wesentlich unterschieden seyn könne. Eine solche Ansicht wäre, wie im vorigen Jahrhundert die von Clairaut, durch welche er einer ähnlichen Schwierigkeit begegnen wollte, sehr geeignet gewesen, unsere Rechnungen und Theorieen so zu verwirren und die Schwierigkeiten derselben so zu vermehren, dafs man nur wenig Hoffnung hegen könnte, je damit zu einem einfachen und befriedigenden Resultate zu gelangen.

Aber wie es in der Geschichte der Menschheit und auch in der Geschichte der Wissenschaft schon so oft gegangen ist, so ging es auch hier. Man sucht lange in der Tiefe, was ganz oben, was oft unmittelbar vor Augen liegt. Jene erste Bestimmung der Masse Jupiters von Newton gründete sich auf die Messungen Pound's und diese wurden durch eine

stillschweigende Uebereinkunft unter den Astronomen als fehlerfrei, als ganz zuverlässig angenommen, obschon man sehr wohl wufste, dafs die Instrumente, deren sich POUND bediente, nicht die besten ihrer Art und dafs die Beobachtungen, um die es sich hier handelte, nicht die leichtesten waren.

Endlich kam AIRY, damals noch (im J. 1832) Professor der Astronomie in Cambridge, zuerst auf den Einfall, die gröfste Elongation dieses vierten Satelliten noch einmal mit aller Schärfe, die seine trefflichen Instrumente und die jetzt so sehr vervollkommnete Beobachtungskunst erlaubten, zu untersuchen, und er fand im Mittel aus sehr vielen und sehr gut unter einander übereinstimmenden Beobachtungen daraus die Masse Jupiters gleich $\frac{1}{1048,9}$ der Sonne, also nahe mit denjenigen Resultaten übereinstimmend, die NICOLAI und ENCKE auf ganz andern Wegen gefunden haben. Später nahm auch Prof. SANTINI[1] in Padua dieselben Beobachtungen des vierten Satelliten noch einmal vor und fand diese Masse gleich $\frac{1}{1049}$, übereinstimmend mit AIRY. Nennt man POUND's Bestimmung $a = \frac{1}{1067}$ und die neue $a' = \frac{1}{1049}$, so hat man

$$\frac{a'}{a} = \frac{1067}{1049} = 1{,}017,$$

so dafs also die alte Bestimmung um nahe $\frac{2}{100}$ ihrer Gröfse fehlerhaft ist, allerdings unvereinbar mit dem Resultate, welches LAPLACE mit Hülfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung gefunden haben wollte.

XI Bestimmung der Entfernung Jupiters von der Sonne durch Beobachtung seiner Satelliten.

Wenn die Alten diese Satelliten mit unbewaffnetem Auge hätten sehn können, so würde ihnen das einfache Mittel, daraus die Entfernung Jupiters von der Sonne zu finden, ohne Zweifel nicht entgangen seyn und sie würden dann ganz an-

1 Memorie della Società Italiana in Modena. T. XXI. Schumacher's astron. Nachr. Th. XII. S. 285.

dere Ansichten von der Gröfse und der innern Organisation unseres Planetensystems erhalten haben. Nehmen wir an, man hätte die ganze Dauer des Umlaufs des 3ten oder des 4ten Satelliten beobachtet. Zur Zeit der Mitte der Finsternifs ist dieser Satellit, aus dem Mittelpuncte Jupiters betrachtet, sehr nahe in seiner Opposition mit der Sonne, also ist dann auch seine jovicentrische Lage am Himmel dieselbe mit der heliocentrischen Lage seines Hauptplaneten. Die unmittelbare Beobachtung oder, was dasselbe ist, die Sonnentafel giebt für dieselbe Zeit auch die heliocentrische Lage der Erde. Man hat daher in dem Dreiecke, das die Mittelpuncte der Sonne, der Erde und des Jupiter verbindet, den Winkel an der Sonne und durch eine directe Beobachtung auch den Winkel an der Erde oder die Elongation Jupiters von der Sonne. Demnach hat man also auch, da in jedem Dreiecke die Seiten sich verhalten, wie die Sinus der ihnen entgegenstehenden Winkel, für die Zeit dieser Mitte der Finsternifs das Verhältnifs der drei Seiten dieses Dreiecks, oder man erhält die Entfernung Jupiters von der Sonne und von der Erde in Theilen der Entfernung der Erde von der Sonne. Man findet dadurch, dafs Jupiter in seiner mittleren Entfernung von der Sonne nahe 5,2 Mal weiter von der Sonne absteht, als die Erde, oder dafs diese Entfernung Jupiters von der Sonne über 107 Millionen deutsche Meilen beträgt.

XII. Entdeckung der Geschwindigkeit des Lichts durch diese Satelliten.

Dafs die Verfinsterungen dieser Satelliten zur *Bestimmung der geographischen Längen* sehr geeignet sind, wurde bereits oben[1] bemerkt. Am einfachsten ist das Verfahren, wenn man diese Finsternisse an zwei verschiedenen Orten in der That beobachtet. Hat man z. B. den Eintritt eines solchen Mondes in den Schatten seines Hauptplaneten zu Paris um 8^h $30' 24''$ und zu Wien um $9^h 26' 34''$ beobachtet, so ist die Differenz dieser Zeiten oder so ist $0^h 56' 10''$ auch sofort die Differenz der geographischen Längen dieser beiden Beobachtungsorte. Allein es ist schwer, viele solche correspondirende

1 S. Art. *Nebenplaneten*. Bd. VII. S. 67.

Beobachtungspaare zu erhalten, und was noch wichtiger ist, zur See, wo diese Beobachtungen von vorzüglicher Anwendung sind, kann man die Nachricht von der zweiten, vielleicht mehrere Hunderte von Meilen entfernten Beobachtung nicht abwarten, da man die Länge des Orts, an welchem sich das Schiff eben aufhält, sogleich kennen muſs, um sich vor den Klippen und Untiefen der See zu schützen. Diesem Umstande zu begegnen, suchte man ein Mittel, aus einer einzigen isolirten Beobachtung einer solchen Finsterniſs die geographische Länge dieses Ortes abzuleiten. Eine lange fortgesetzte Reihe von Beobachtungen dieser Art lehrte uns die Umlaufszeiten und die übrigen Elemente dieser Monde kennen und setzte uns dadurch in den Stand, diese Finsternisse, wie sie sich künftig ereignen werden, durch Rechnung zu bestimmen. Die ersten Tafeln dieser Art wurden von dem berühmten Astronomen Dominicus Cassini im J. 1668 gegeben und man fand aus ihnen durch ziemlich einfache Rechnungen die Zeiten der Finsternisse in Pariser Zeit ausgedrückt. Viel genauer sind die neuesten, von Delambre nach der Theorie Laplace's gegebenen Tafeln dieser Art. Nehmen wir an, man hätte den Anfang einer solchen Finsterniſs zu Tobolsk an irgend einem Tage um 2h 40′ 52″ nach Mitternacht beobachtet und man hätte aus jenen Tafeln gefunden, daſs diese Finsterniſs zu Paris um 10h 17′ 48″ statt haben sollte, so würde daraus wieder die Länge der Stadt Tobolsk von Paris gleich 4h 23′ 4″ oder im Bogen 65° 46′ 0″ von Paris oder endlich 85° 46′ 0″ von dem eingebildeten Meridiane von Ferro folgen, den man 20 Grade westlich von Paris annimmt. Diese Längenbestimmung würde ebenso genau seyn, als eine aus zwei Beobachtungen erhaltene, wenn nur die erwähnten Tafeln ebenso verläſslich sind, als es gewöhnlich eine einzige dieser Beobachtungen selbst zu seyn pflegt. Auf diesem Wege nun bemerkte der groſse dänische Astronom Olaus Römer, der sich mit der Construction solcher Tafeln eifrig beschäftigte, schon im Jahre 1675, daſs es, zur wahren Brauchbarkeit dieser Tafeln, keineswegs hinreiche, die Umlaufszeiten und die übrigen Elemente der Satelliten Jupiters zu kennen, sondern daſs man auch auf den jedesmaligen Stand Jupiters gegen die Sonne Rücksicht nehmen müsse. Römer fand nämlich, daſs die Finsternisse alle um nahe 8 Min. 13 Sec. früher eintraten, als

die Rechnung forderte, wenn Jupiter in A und die Erde in T, die Sonne aber in S ist, und ebenso viel später, wenn Jupiter in B, Erde und Sonne aber in T und S sind, oder allgemein, dafs zur Zeit der Opposition Jupiters mit der Sonne alle Finsternisse um 8 Min. 13 Sec. zu früh und zur Zeit der Conjunction um ebenso viel zu spät eintrafen. Nennt man aber R = ST den Halbmesser der Erdbahn und r = SA den Halbmesser der Jupitersbahn, so ist die Entfernung Jupiters von der Erde

Fig. 146.

$$\text{in der Opposition } TA = r - R$$
$$\text{und in der Conjunction } TB = r + R.$$

Die Differenz dieser beiden Entfernungen ist gleich 2r oder gleich dem Durchmesser der Erdbahn. In der Opposition sind wir demnach dem Jupiter um den ganzen Durchmesser der Erdbahn näher, als in der Conjunction, und dort sehn wir zugleich alle Finsternisse um 16 Min. 26 Sec. früher, als hier. Diese einfache Zusammenstellung beider Erscheinungen reichte für den Scharfsinn Römer's hin, die wahre Ursache derselben zu finden. In der gröfsern Entfernung Jupiters nämlich bedarf das Licht auch eine gröfsere Zeit, als in der kürzeren Distanz, und zwar 16 Min. 26 Sec., um den Durchmesser der Erde, d.h., um den Weg von 41331600 deutschen Meilen zurückzulegen. Sonach wurde denn die Geschwindigkeit des Lichtes gemessen, das in jeder Secunde 41918 deutsche Meilen zurücklegt, vorausgesetzt, dafs es von seinem Ausgange bis zur Ankunft auf der Erde stets dieselbe Geschwindigkeit beibehält. Ein halbes Jahrhundert später benutzte der englische Astronom Bradley diese Entdeckung Römer's, um darauf seine nicht minder glänzende Entdeckung der Aberration [1] zu gründen.

XIII. Lichtgleichung der Satelliten.

Nachdem man auf diese Weise die Geschwindigkeit des Lichtes kennen gelernt hatte, war es nothwendig, zu finden, wie viel dadurch die Zeit der Finsternifs in jeder Lage Jupiters verändert werde. Zu diesem Zwecke mufs man also die Distanz D Jupiters von der Erde für jede gegebene Zeit kennen. Ist diese Distanz bekannt, so wird das Product

1 S. Art. *Abirrung des Lichtes.* Bd. I. S.15.

$$0^h\ 8'\ 13'' \times D$$

oder, in Stunden und deren Theilen ausgedrückt,

$$0{,}137\ D$$

die gesuchte Zeit T seyn, um welche die Finsternifs in dieser Distanz durch die Geschwindigkeit des Lichtes verändert worden ist. Um D zu finden, sey Θ die Länge der Sonne weniger der heliocentrischen Länge Jupiters für die gegebene Zeit und R die Entfernung der Sonne von der Erde, so wie r von Jupiter, wodurch man sofort erhält

$$D = \sqrt{r^2 + R^2 - 2\,r\,R\ \mathrm{Cos.}\,\Theta}.$$

Da nun R gegen r nur klein ist, so hat man, wenn man die dritten und höhern Potenzen von $\frac{1}{r}$ vernachlässigt und die Wurzelgröfse der letzten Gleichung auflöst,

$$D = r - R\ \mathrm{Cos.}\,\Theta + \frac{R^2}{4r}(1 - \mathrm{Cos.}\,2\,\Theta) + \frac{R^3}{8r^2}(\mathrm{Cos.}\,\Theta - \mathrm{Cos.}\,3\,\Theta).$$

Ist nun, um auf die Ellipticität der beiden Planetenbahnen Rücksicht zu nehmen, a die halbe grofse Axe, a e die Excentricität der Jupitersbahn und m die mittlere Anomalie dieses Planeten, und nennt man dieselben Dinge für die Erdbahn A, A E und M, so hat man

$$r = a\,(1 - e\ \mathrm{Cos.}\,m)$$

und

$$R = A\,(1 - E\ \mathrm{Cos.}\,M).$$

Substituirt man diese Werthe von r und R in dem vorhergehenden Ausdrucke und setzt man der Kürze wegen die Gröfse A gleich der Einheit, so hat man

$$D = a + \frac{1}{4a} - e\left(a - \frac{1}{4a}\right)\mathrm{Cos.}\,m - \left(1 - \frac{1}{8a^2}\right)\mathrm{Cos.}\,\Theta$$

$$- \frac{1}{4a}\,\mathrm{Cos.}\,2\,\Theta - \frac{1}{8a^2}\,\mathrm{Cos.}\,3\,\Theta + E\ \mathrm{Cos.}\,M\ \mathrm{Cos.}\,\Theta.$$

Es ist aber $a = 5{,}202776$; $e = 0{,}048162$ und $E = 0{,}016793$. Substituirt man diese numerischen Werthe in der vorhergehenden Gleichung, nachdem man die letzte durch 0,137 multiplicirt hat, so erhält man

$$T = 0^h{,}719 - 0^h{,}034\ \mathrm{Cos.}\,m - 0^h{,}136\ \mathrm{Cos.}\,\Theta$$

$$- 0^h{,}007\ \mathrm{Cos.}\,2\,\Theta - 0^h{,}001\ \mathrm{Cos.}\,3\,\Theta + 0^h{,}002\ \mathrm{Cos.}\,M\ \mathrm{Cos.}\,\Theta$$

und dieses ist die gesuchte Zeit T, in Stunden ausgedrückt,

um welche die Finsternisse der Satelliten in der Distanz D später gesehn werden, als wenn die Geschwindigkeit des Lichts unendlich grofs wäre. Der letzte Ausdruck für T wird die *Lichtgleichung* genannt.

XIV. Vorausbestimmung der Finsternisse dieser Satelliten.

Wenn die Bahn, die Jupiter um die Sonne beschreibt, ein Kreis wäre, so würde die Vorausbestimmung der Finsternisse, wenn man einmal nur eine derselben beobachtet hat, sehr leicht seyn. Man würde nämlich blofs zu der gegebenen Zeit der beobachteten Finsternifs die synodische Revolution des Satelliten 1-, 2-, 3mal ... addiren, um sofort die Zeiten aller nächstfolgenden Finsternisse zu erhalten. Da aber wegen der Ellipticität der Bahn die Geschwindigkeit Jupiters in derselben veränderlich ist, so erleidet dadurch diese einfache Vorschrift eine Aenderung, die sehr beträchtlich ist und bei dem vierten Satelliten selbst über sechs volle Stunden gehn kann. Nehmen wir an, dafs man die Finsternifs eines Satelliten beobachtet habe zu der Zeit, wo Jupiter eben in seinem Perihelium war. Da die Bewegung dieses Planeten in seiner Sonnennähe gröfser ist, als die mittlere[1], so wird die nächstfolgende Finsternifs später eintreten, und zwar um die Zeit Θ, welche der Satellit gebraucht, um mit seiner mittleren synodischen Bewegung einen Bogen zu durchlaufen, welcher der Mittelpunctsgleichung Jupiters für diesen Ort seiner Bahn gleich ist. Nennt man nämlich t die periodische und T die synodische Umlaufszeit des Satelliten und ω den Bogen, welchen Jupiter in seiner Bahn während der Zeit T zurücklegt, so beschreibt der Satellit während der Zeit t den Bogen 360° und während der Zeit T den Bogen $360° + \omega$, also ist

$$T = \frac{360 + \omega}{360} . t$$

oder T ist um so gröfser, je gröfser ω ist. Nennt man daher h die Mittelpunctsgleichung Jupiters oder die Differenz seiner wahren und seiner mittleren Anomalie, so ist

1 Vergl. Art. *Mittlerer Planet*. Bd. VI. S. 2310.

$$\Theta = \frac{T}{360} . h.$$

Ist aber e = 0,048162 die Excentricität der Jupitersbahn und m seine mittlere Anomalie, vom Perihel gezählt, so hat man bekanntlich

$$h = \frac{2e}{\text{Sin.} 1''} \text{Sin.m} + \frac{5e^2}{4 \text{Sin.} 1''} \text{Sin.} 2m + \ldots\ldots$$

Substituirt man daher für T die oben gegebenen synodischen Revolutionen der vier Satelliten, so erhält man für die gesuchten Correctionen Θ jeder nächstfolgenden Finsternifs

bei dem I	Satelliten Θ =	0^h,650 Sin. m
II	. . . . . .	1,305 Sin. m
III	. . . . . .	2,640 Sin. m
IV	. . . . . .	6,156 Sin. m.

B. Satelliten des Saturn.

Ueber die sieben Satelliten, welche den Planeten Saturn umgeben, ist bereits im Artikel *Nebenplaneten* das Vorzüglichste von dem, was uns von ihnen bekannt ist, gesagt worden, daher wir hier nur einige dort übersehene Bemerkungen nachträglich mittheilen wollen.

Die zwei dem Saturn nächsten dieser Satelliten scheinen ungemein klein zu seyn, besonders der dem Ringe zunächst stehende oder der sogenannte erste Satellit, der wohl der kleinste der uns bekannten Himmelskörper seyn mag. Beide streifen, selbst in ihren gröfsten Elongationen, beinahe an den äufsersten Rand des Rings und sind daher auch wohl wegen dieser Nähe des viel lichtstärkeren Rings so schwer zu sehn. Auch Herschel und Schröter haben mit ihren grofsen Spiegelteleskopen die Durchmesser dieser zwei kleinen und äufserst lichtschwachen Monde, die man aufserdem auf dem Festlande noch nicht gesehn hat, nicht zu messen gewagt. Von den fünf weiter entfernten aber geben sie die Durchmesser wie folgt, an:

		nach Schröter				nach Herschel
Satellit	III . . .	100	deutsche Meilen		. . .	140
	IV . . .	100	—	—	. . .	140
	V . . .	260	—	—	. . .	360
	VI . . .	680	—	—	. . .	1050
	VII . . .	390	—	—	. . .	620

welche Zahlen aber mehr als Schätzungen, denn als eigentliche scharfe Messungen zu betrachten sind.

Wegen der grofsen Neigung ihrer Bahnen gegen die Bahn des Saturn, die bei den sechs ersten gegen 30 und bei dem siebenten 23 Grade beträgt, werden diese Monde nur selten verfinstert, da sie gewöhnlich über oder unter der Schattenaxe ihres Hauptplaneten vorübergehn. Vergleicht man die oben[1] angeführten Umlaufszeiten dieser Monde mit ihren Entfernungen vom Saturn, so sieht man, dafs auch hier das bekannte dritte Gesetz Kepler's in Anwendung kommt. Die ersten drei dieser Satelliten haben sehr kleine Bahnen und stehn ihrem Hauptplaneten durchaus näher, als unser Mond der Erde. Ihre mittleren Entfernungen betragen in der That nur $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{5}$ der Entfernung unsers Mondes von der Erde; der vierte aber hat nahe dieselbe Entfernung vom Mittelpuncte Saturns, wie der Mond vom Mittelpuncte der Erde. Zwischen dem fünften und sechsten aber, so wie zwischen dem sechsten und siebenten bemerkt man einen sehr grofsen, den übrigen nicht angemessenen Zwischenraum, in welchem vielleicht unsere Nachfolger dermaleinst noch mehrere neue Satelliten entdecken werden.

So wie ferner der erste oder nächste dieser Satelliten durch seine sehr geringe Gröfse ausgezeichnet ist, so ist auch seine Bahn die kleinste, die wir in unserm Planetensysteme kennen, da ihr Halbmesser nur ein Drittel gröfser ist, als der Durchmesser Jupiters.

Man hat öfter an der Existenz der zwei innersten Trabanten gezweifelt, da sie bisher nur von Herschel gesehn worden sind. Allein Mädler und Beer[2] haben die sämmtlichen Beobachtungen des älteren Herschel vom Jahre 1789

1 S. Art. *Nebenplaneten*. Bd. VII. S. 74.

2 Astronomische Nachrichten. Th. XIII. S. 73.

discutirt und die erwartete Uebereinstimmung unter ihnen gefunden, ja selbst die ersten genäherten Elemente ihrer Bahnen daraus abgeleitet. Sie fanden nämlich für den zweiten dieser Satelliten

Umlaufszeit $32^h\ 53'\ 2'',728$
Distanz vom
Mittelp. ♄ ... $34'',38$

Epoche 1789 Sept. 14 .. $11^h\ 53'$ mittl. Zeit von Slough, für welche die saturnicentrische Länge dieses Satelliten gleich $67^0\ 56'\ 25'',5$ ist. Für den ersten oder dem Hauptplaneten nächsten Satelliten aber fanden sie

Umlaufszeit .. $22^h\ 36'\ 17'',705$
Distanz vom
Mittelp. ♄ .. $26'',7779$

Epoche 1789 Sept. 14 ... $13^h\ 26'$ mittl. Zeit von Slough, für welche Zeit die saturnicentrische Länge dieses Satelliten $268°\ 34'\ 36''$ ist. Bei diesem letzten Satelliten glaubten sie sogar die elliptischen Elemente seiner Bahn, wenn gleich nur beinahe, bestimmen zu können, und fanden durch die darüber angestellten Rechnungen

Umlaufszeit ... $22^h\ 36'\ 17'',705$
Halbe grofse Axe ... 2,46820 Halbmesser Saturns
Excentricität 0,0689
Perisaturnium ... $104°\ 42'$

Epoche 1789 Sept. 14 .. $13^h\ 26'$ mit der mittleren saturnicentrischen Länge $264^0\ 16'\ 36''$.

Bemerken wir noch, dafs auch Herschel der Jüngere diese zwei innersten Satelliten Saturns durch die grofsen Spiegelteleskope seines Vaters gesehn zu haben versichert, und dafs diese Instrumente auch wohl die einzigen sind, durch welche sie gesehn werden können. Näher theoretisch untersucht sind von diesen Satelliten nur der vierte und der sechste, und zwar beide von Bessel[1], der die sämmtlichen älteren Beob-

---

1 Man findet diese Untersuchungen und die daraus erhaltenen Resultate zusammengestellt in v. Zach's Mon. Correspont. Th. XXIV. S. 197. für den vierten und in den astron. Nachrichten von Schumacher Th. IX. S. 1. und 381. und Th. XI. S. 17. für den sechsten Satelliten. Der letzte scheint in seiner Theorie am meisten ausgebildet, auch findet man in Astron. Nachr. Th. IX. S. 49. schon

achtungen derselben sammelte und mit seinen eigenen vermehrte.

C. Satelliten des Uranus.

Das Wenige, was uns von diesen Himmelskörpern bloſs durch Herschel sen. bekannt geworden ist, findet man bereits oben[1] gesammelt. Wir fügen nur noch bei, was Herschel[2] jun. darüber sagt, nicht sowohl, um die in dem erwähnten Artikel vielleicht etwas zu positiv aufgestellten Behauptungen zu bestätigen, als vielmehr, um dieselben hier wieder auf ihren wahren Werth zurückzuführen.

„Mit Ausnahme der zwei innersten Satelliten des Saturn gehören die des Uranus zu denjenigen Gegenständen unseres Sonnensystems, die man am schwersten nicht bloſs beobachten, sondern auch nur zu Gesicht bekommen kann. Zwei derselben existiren unbezweifelt, die vier anderen aber sind mehr geahnet, als wirklich gesehn worden. Jene zwei zeigen uns indeſs eine merkwürdige und unerwartete Eigenschaft, von der wir bisher in unserem Systeme noch kein Beispiel haben. Alle Körper dieses Systems, so weit wir sie kennen, die Haupt- und Nebenplaneten ohne Ausnahme, bewegen sich von West gen Ost und in solchen Bahnen, die von der Ebene der Ekliptik nicht weit abstehn. Die Bahnen jener zwei Uranus-Trabanten aber stehn nahe senkrecht auf der Ekliptik, da ihre Neigungen gegen diese Ebene gegen 79 Grade betragen, und die Bewegung der Satelliten in diesen Bahnen ist retrograd, d. h. ihre auf einander folgenden Orte, auf die Ekliptik reducirt, gehn von Ost gen West. Diese Bahnen sind überdieſs nahe kreisförmig und die Bewegung ihrer Knoten scheint sehr langsam zu seyn, so wie auch ihre Neigungen seit der Entdeckung derselben im J. 1787 keine merkbare Aenderung erlitten haben. Diese sonderbaren Abweichungen an der äuſsersten Grenze unserer Planetenwelt scheinen uns gleichsam

---

die astronomischen Tafeln desselben, aus welchen bereits Mädler ebend. S. 294. die Finsternisse dieses sechsten Satelliten für mehrere Jahre voraus berechnet hat.

1 S. Art. *Nebenplaneten*. Bd. VII. S. 79.

2 Treatise of Astronomy. Lond. 1833. p. 299.

vorzubereiten auf ganz andere und neue Anordnungen, die sich uns in den benachbarten Systemen, wenn sie einmal zu unserer Kenntniſs kommen, aufschlieſsen werden. Uebrigens wurde die Nachricht von diesen, jenen entfernten Körpern ganz eigenthümlichen Anomalieen bisher bloſs auf das Zeugniſs ihres ersten Entdeckers, meines Vaters, angenommen, da sie meines Wissens noch keinem andern Astronomen sichtbar geworden sind. Ich bin daher erfreut, hinzusetzen zu können, daſs ich jenes Zeugniſs durch meine eigenen Beobachtungen seit dem Jahre 1828 bis 1833 auf das Vollständigste zu bestätigen im Stande bin."

D. Satellit der Venus.

Auch um die Venus wollten frühere Astronomen einen Mond gesehn haben. Fontana bemerkte ihn im J. 1645, Dominicus Cassini 1672 und wieder 1686, Short in England im J. 1740. Auch Montaigne, Horrebow und Andere sprechen von ihren Beobachtungen dieses Himmelskörpers. Da man ihn aber seitdem nicht mehr gesehn hat, nicht einmal bei den zwei Durchgängen der Venus vor der Sonne in den Jahren 1761 und 1769, wo er doch vor Allem hätte sichtbar seyn sollen, und da überhaupt alle weitere Bemühungen, ihn zu Gesichte zu bekommen, fruchtlos gewesen sind, so suchte man jene ersten sogenannten Beobachtungen durch bloſse optische Täuschungen zu erklären. Das Licht der Venus ist zuweilen so stark, daſs die polirten Glaslinsen unserer Fernröhre eine Art von Spiegelung erzeugen, wo man dann ein zweites, schwächeres Bild des Planeten im Felde des Fernrohrs erblickt, das man, wie man glaubt, für einen Begleiter, für einen Mond des Planeten gehalten hat. Auch Wargentin in Stockholm sah einmal, als er eben die Venus beobachtete, einen solchen scheinbaren Nebenplaneten, aber als er, um sich vor Täuschung zu verwahren, das Fernrohr um dessen eigene Axe drehte, drehte sich jener Mond mit um den Planeten, ganz ebenso, wie sich ein Flecken auf dem Oculare des Fernrohrs, wenn dieses Ocular gedreht würde, hätte bewegen müssen. Indeſs war doch der treffliche Lambert in Berlin von der Wahrheit jener frühern Beobachtungen

so überzeugt, daſs er aus den Angaben jener Astronomen die Elemente, ja sogar die Tafeln dieses Satelliten der Venus zu bestimmen suchte[1]. Aus diesen Elementen fand LAMBERT, daſs der Satellit bei den erwähnten Durchgängen der Venus im Jahr 1761 und 1769 eine zu groſse Breite hatte, um auf der Sonnenscheibe gesehn zu werden, daſs er aber wohl bei der damals nahe bevorstehenden Conjunction der Venus mit der Sonne am 1. Junius 1777 sich auf der Sonnenscheibe projiciren werde. Allein die Astronomen haben ihn auch zu dieser Zeit vergebens gesucht, und man ist jetzt, vielleicht nicht ganz aus hinreichenden Gründen, beinahe allgemein dahin übereingekommen, daſs dieser Satellit gar nicht existire. Es scheint mit ihm zu gehn, wie es mit den 30 Satelliten der Sonne gegangen ist, die das Dictionnaire de Trévoux so pomphaft angekündigt und die man bald darauf als bloſse Sonnenflecken erkannt hat, oder wie mit dem neuen Planeten, weit jenseit des Uranus, der seiner entsetzlichen Gröſse wegen HERCULES genannt und dessen Elemente im Hamburger unpart. Correspondenten, als aus unmittelbaren astronomischen Beobachtungen entnommen, angezeigt und, wie es scheint, auch so lange auf Treu und Glauben angenommen wurden, bis in denselben Blättern ein Widerruf erschien, wodurch die ganze Ankündigung als eine Mystification und als ein Spiel eines müssigen Kopfes dargestellt wurde. Uebrigens schien König Friedrich II. nicht weniger fest, als sein Akademiker LAMBERT, an die Existenz jenes Venusmondes zu glauben und er wollte ihn zu Ehren seines gelehrten Freundes D'ALEMBERT genannt wissen. Dieser aber verbat sich die zweifelhafte Ehre und zog sich von dem königlichen Ansinnen mit den Worten zurück: *Je ne suis ni assez grand pour devenir au ciel le satellite de Venus, ni assez jeune pour l'être sur la terre, et je me trouve trop bien du peu de place, que je tiens de ce bas monde, pour en ambitionner une autre au firmament.*"

---

1 Berliner astronomisches Jahrbuch f. d. J. 1777.

E. Bemerkungen über die Satelliten überhaupt.

Die Entdeckung der Satelliten Jupiters durch Simon Marius am 29. Dec. 1609 und unabhängig von diesem durch Galilei am 7. Januar 1610, welcher Entdeckung erst später die der Satelliten des Saturn und Uranus folgten, bildet eine der wichtigsten Perioden in der Geschichte der Astronomie. Die erste wahre Auflösung des Problems, die geographische Länge zu bestimmen, eines Problems, das für die Schifffahrt und für die gesammte mathematische Geographie von der grössten Wichtigkeit ist, ist die unmittelbare Frucht dieser Entdeckung gewesen, da schon Galilei selbst die Beobachtung der Finsternisse der Jupiterssatelliten zu diesem Zwecke als sehr geeignet anerkannt hat. Auch die endliche, definitive Bestätigung der Wahrheit des *Copernicanischen* und *Kepler'schen Systems* verdanken wir diesen Himmelskörpern, da sie uns die bekannten drei Gesetze Kepler's, besonders das von ihm aufgestellte der Verhältnisse zwischen den Umlaufszeiten und der grossen Axe der Bahnen, auf das Deutlichste und gleichsam wie in einem Miniaturbilde des grossen Planetensystems am Himmel erkennen liessen. Jene Entdeckung ist nur erst vor 228 Jahren gemacht worden; die ersten Tafeln der Jupitersmonde von Cassini sind vor 147 Jahren herausgekommen, und erst zu Ende des vorhergehenden Jahrhunderts hat Lagrange die erste umfassende Theorie ihrer Störungen durch die Kraft seiner Analyse aufgestellt[1]. Und in diesem kurzen Zeitraume haben uns diese Monde, durch die Schnelligkeit ihrer Revolutionen, beinahe alle die grossen Veränderungen aufgeführt und vor unsern Augen entwickelt, die in dem viel grösseren Systeme der Hauptplaneten viele Jahrhunderte, ja Jahrtausende zu ihrer vollständigen Entfaltung bedürfen. Die Störungen, welche sie von der Sonne erleiden, sind ungleich geringer, als die unseres Erdmondes, wegen

---

1 Die hierher gehörende Arbeit Lagrange's, die Antwort auf eine im Jahre 1766 gegebene Preisfrage der Akademie zu Paris, ist eine der schönsten, die je über die innere, nur durch die feinste Theorie zu erforschende Organisation unsers Weltsystems erschienen ist.

der grofsen Distanz, welche sie von diesem Centralkörper unseres Systemes trennt, aber desto bedeutender sind die Perturbationen, welche diese vier Monde unter sich selbst ausüben, und diese werden noch gröfser durch die oben erwähnten Verhältnisse, die zwischen den mittleren Bewegungen der drei ersten derselben bestehn. Wenn man die Totalwirkung dieser gegenseitigen Störungen betrachtet, so findet man, dafs dieselbe für die Finsternisse eine allen Satelliten gemeinschaftliche Periode von 437,659 Tagen habe, eine Periode, die schon Wargentin sehr früh durch seine Beobachtungen erkannte und die man auch später durch die Theorie bestätigt gefunden hat.

Denselben Satelliten sind wir auch die Kenntnifs der *Geschwindigkeit des Lichtes* schuldig, die gröfste genau mefsbare Geschwindigkeit, die wir bisher in der Natur gefunden haben, und durch ebendiese Kenntnifs sind wir auf eine andere, noch wichtigere und interessantere Entdeckung, auf die der *Aberration*, geführt worden, die uns den besten Beweis und gleichsam den Schlufsstein des Copernicanischen Systems gegeben hat und ohne die es ganz unmöglich gewesen wäre, in unsere neueren Beobachtungen diejenige Genauigkeit zu bringen, deren sie sich jetzt erfreuen. So scheint die Natur an die Entdeckung dieser vier kleinen Sternchen des Himmels, die sich so viele Jahrtausende hindurch dem menschlichen Auge entzogen haben, eine ganze Reihe anderer, wichtiger und interessanter Wahrheiten geknüpft zu haben, die uns durch jene mit einem Male geoffenbart werden sollten.

Wenn aber diese Monde schon für uns, die wir so weit von ihnen entfernt sind, so interessant geworden sind, in wie viel höherem Grade müssen sie erst die Aufmerksamkeit der ihnen so nahen Bewohner ihres Hauptplaneten erregen! Schon durch die geringe Schiefe der Ekliptik dieses Planeten, die kaum drei volle Grade beträgt, und durch die äufserst schnelle Rotation dieses gröfsten aller Planeten, die noch nicht zehn unserer Stunden beträgt, mufs der Aufenthalt auf seiner Oberfläche von dem auf unserer Erde sehr verschieden seyn. Wegen jener geringen Schiefe wird nämlich der Unterschied der Jahreszeiten oder der Wechsel der Temperatur im Sommer und Winter ebenfalls sehr gering seyn, da für jeden bestimmten Ort dieser Oberfläche die mittägige Höhe der Sonne in einem

Jupiterjahre, d. h. in nahe zwölf unserer Erdjahre, sich nur um sechs Grade ändert, während diese Aenderung bei uns in einer 12mal kürzern Zeit schon 47 Grade beträgt. Desto merklicher aber wird im Gegentheile die Verschiedenheit des Klima's für die nahe und fern von dem Aequator wohnenden Bewohner Jupiters seyn. Unter dem Aequator steht daselbst die Sonne beinahe immer im Zenith, während die Bewohner der Polargegenden durch volle sechs unserer Jahre die Sonne gar nicht sehn oder in einer ebenso langen Nacht begraben liegen und die folgenden sechs Jahre die Sonne zwar immer über ihrem Horizont, aber nur in einer Höhe von höchstens drei Graden erblicken. Mit Ausnahme dieser von ewigem Schnee und Eis bedeckten Polarländer haben die übrigen Gegenden beinahe immerwährende Tag- und Nachtgleiche, da für sie jeder Tag, so wie jede Nacht, nahe fünf unserer Stunden dauert. Welche Aenderungen in der Lebensart und in der Betreibung aller Geschäfte müssen nur diese kurzen Tage allein erzeugen und wie wenige unserer Erdbewohner würden sich mit einer so kurzen Nacht von nur fünf Stunden zufrieden stellen!

Desto zufriedner aber werden dafür mit dieser Einrichtung die Astronomen Jupiters seyn, wenn anders dieser grofse Weltkörper auch solche Wesen auf seiner Oberfläche enthält, die an der Beobachtung des Himmels und seiner Wunder Interesse fühlen. In der That würden sie dort manche grofse Vortheile geniefsen, nach denen wir uns hier vergebens sehnen. Die wichtigsten und auffallendsten Beobachtungen, die der Finsternisse der Sonne und des Monds, die bei uns so selten sind, gehören dort beinahe zu den täglichen Erscheinungen, und da alle vier Satelliten die Sonne an scheinbarer Gröfse weit übertreffen und ihre Bahnen mit der Bahn Jupiters nahe zusammenfallen, so sind beinahe alle diese Finsternisse total und überdiefs wegen der schnellen Rotation Jupiters auf dem ganzen Planeten sichtbar. Um die Entfernungen dieser Satelliten von der Oberfläche Jupiters zu messen, haben die Astronomen dieses Planeten an dem Durchmesser desselben eine Basis, die schon den dritten Theil der Entfernung des ersten Satelliten beträgt, so dafs daher diese Entfernung daselbst mit der gröfsten Schärfe gefunden werden kann. Ist dann auch dort das Verhältnifs der Umlaufszeiten zu der grofsen Axe der Bahnen bekannt, so

werden dadurch auch die Entfernungen der drei andern Satelliten gegeben seyn. Die schnelle Rotation dieses Planeten und die schnelleren Schwingungen der Pendel auf der Oberfläche desselben geben den Bewohnern ein Mittel, das wichtigste Element aller Beobachtungen, die Zeit, mit viel gröſseer Schärfe zu bestimmen, als dieses bei uns möglich ist. In der That würde unser Secundenpendel von ungefähr drei Fuſs Länge auf der Oberfläche Jupiters in einer unserer Secunden schon fast zwei Schwingungen vollenden und ein Pendel, welches dort seine Schwingungen während einer unserer Secunden macht, müſste die Länge von nahe acht Par. Fuſs haben.

Wir haben bereits den Nutzen und die wohlthätigen Einflüsse erwähnt, welche diese Monde Jupiters, ihrer groſsen Entfernung von der Erde ungeachtet, auf uns haben. Noch viel gröſser werden diese Einflüsse ohne Zweifel auf dem Jupiter selbst seyn, für den sie doch eigentlich bestimmt sind. Nicht minder wichtig endlich werden die Einwirkungen seyn, die Jupiter selbst, gleichsam zum Ersatze von jenen, auf diese Monde ausübt. Wenn der einzige Mond der Erde unsern Nächten schon so viel Reize giebt, wie viel schöner mögen jene Nächte seyn, die von vier oder bei Saturn sogar von sieben Monden erleuchtet werden, des Ringes dieses letzten Planeten nicht zu gedenken, der sich wie ein breites Lichtband um den ganzen Himmel schlingt. Aber auch umgekehrt, welches Schauspiel mag den Bewohnern des ersten Satelliten Jupiters dieser groſse und ihnen so nahe stehende Planet gewähren! Sie werden diesen Planeten zur Zeit des Volllichts als eine der Sonne ähnliche feurige Scheibe, aber 1400-mal gröſser, als uns die Sonne erscheint, erblicken und diese Scheibe wird, wie wir oben[1] für unsern Erdmond gesehn haben, immer unverrückt an derselben Stelle des Himmels befestigt bleiben, während die Sonne, die Planeten und alle Fixsterne binnen zehn Stunden hinter ihr vorüber ziehn. Die Bewohner der Mitte der dem Jupiter zugewendeten Hälfte dieser Monde werden diesen ihren Hauptplaneten immerwährend in ihrem Zenithe erblicken, aber schon eine Reise von 400 Meilen, die ein Bewohner des ersten Mondes macht, würde

---

1 S. Art. *Mond.* Bd. VI. S. 2402.

jene grofse Scheibe aus dem Zenith in den Horizont verrükken. Mit welcher Verwunderung werden die Bewohner der vom Jupiter abgekehrten Hälfte dieses Satelliten, nach einer Reise von nur wenigen Meilen, den ihnen bisher unbekannten Lichtkörper erblicken, dessen Oberfläche die Sonne, wie sie ihnen erscheint, 37000mal übertrifft. Dafür müssen es sich aber diese Monde auch gefallen lassen, immer einen Theil ihrer Mittage in dem Schatten des Planeten zu stehn und dadurch der Sonne gerade dann, wenn sie ihnen ihre wärmsten Strahlen zusendet, beraubt zu werden, während in derselben Zeit auch Jupiter nur seine beschattete Seite jenen Monden zuwendet und also auch die dunklen Nächte des Hauptplaneten nicht von den Vollmonden der Satelliten erleuchtet werden können, so dafs die Bewohner Jupiters ihre Monde meistens nur im zunehmenden oder abnehmenden Lichte sehn können.

Aehnliche Betrachtungen, nur nach den verschiedenen Verhältnissen modificirt, werden sich auch für die Satelliten des Saturn und Uranus ergeben, daher wir uns hier nicht länger dabei aufhalten und diesen Gegenstand nach Mädler's Selenographie mit einigen Bemerkungen beschliefsen wollen, die sich auf die Verschiedenheit der Verhältnisse unseres Mondes von denen der drei äufsersten Planeten beziehn.

Zuerst finden wir, dafs die Störungen, welche der Mond von der Sonne erleidet, viel gröfser sind, als die aller andern Satelliten, von denen die Sonne viel weiter entfernt ist und deren Hauptplaneten sämmtlich viel gröfser sind, als die Erde. Es scheint, dafs unser Mond schon nahe an der Grenze stehe, an welcher es einem Planeten noch möglich ist, einen Satelliten in einer geregelten Bahn um sich zu erhalten. Ein Mond, dessen Umlaufszeit gleich oder kleiner als die Rotationszeit seines Planeten ist, würde sich nicht einmal bilden können. Der Erdmond kommt aber diesem Verhältnisse näher, als irgend einer der siebzehn anderen Monde unseres Sonnensystems. Wäre aber seine Umlaufszeit gleich oder gröfser, als die Umlaufszeit seines Planeten ist, so würde er nicht mehr ein Mond geblieben, sondern ein selbstständiger, für sich selbst die Sonne umkreisender Hauptplanet geworden seyn. Die übrigen Monde vollenden mehrere hundert, ja der innerste Saturnsmond sogar 11000 Umläufe um ihren Planeten in der Zeit, in welcher der Planet selbst nur einen einzigen

Umlauf um die Sonne zurücklegt, während im Gegentheile unser Mond nur 13 Umläufe um die Erde in einem Jahre hat. Für die Bewohner jener andern Monde zeigt sich ihr Hauptplanet unter einem 400- bis 800mal gröſseren Durchmesser, als die Sonne, während den Bewohnern unsers Mondes die Erde nur $3\frac{1}{2}$mal gröſser als die Sonne erscheint.

Die Bahnen der andern Satelliten sind durchaus sehr wenig gegen die Ebene des Aequators ihres Hauptplaneten und sehr stark gegen seine Bahn geneigt, während bei unserm Monde gerade das Gegentheil statt hat, da für den Mond jene Neigung 24, diese aber nur 5 Grade beträgt. Die groſse Axe des 6ten oder Huyghens'schen Saturnsmonds vollendet ihren Umlauf um den Himmel erst in 710 Jahren und die Knoten seiner Bahn sogar in der langen Periode von 36500 Jahren, während bei unserm Monde diese zwei Perioden nur $8\frac{4}{5}$ und $18\frac{3}{5}$ Jahre betragen. Jupiter sieht im Laufe eines seiner Jahre fast 4500 Mondfinsternisse und nahe ebenso viele Sonnenfinsternisse, während die Erde im Jahre nur zwei oder drei solcher Erscheinungen hat.

Diese Bemerkungen lieſsen sich ohne Mühe noch mit vielen andern nicht minder auffallenden vermehren. Aber auch sie werden genügen, auf die groſsen Verschiedenheiten der kosmischen Verhältnisse aufmerksam zu machen, die selbst bei den Satelliten, bei diesen untergeordneten Körpern unseres Sonnensystems, statt haben.

L.

Trägheit.

Inertia; Inertie; *Inertia.*

So wird diejenige Eigenschaft der Körper genannt, nach welcher sie in ihrem Zustande, der Ruhe oder der Bewegung, bleiben, so lange keine äuſsere Ursache da ist, welche diesen Zustand ändert. Wenn daher ein Körper z. B. in Ruhe ist, so wird er, so lange nichts Aeuſseres auf ihn einwirkt, auch in Ruhe bleiben, weil nichts da ist, was ihn aus dieser Ruhe bringen, was ihn in Bewegung setzen könnte. Aber auch, wenn ein Körper in Bewegung ist und wenn die Ursache, die ihm diese Bewegung gegeben hat, plötzlich aufhört, so wird er

sich in derselben Richtung und mit derselben Geschwindigkeit, die er zuletzt unmittelbar vor dem Aufhören jener Ursache hatte, weiter und zwar ohne Ende fortbewegen, weil nämlich, der Voraussetzung gemäfs, wieder nichts da ist, was diese letzte Bewegung, was die Richtung oder Geschwindigkeit derselben ändern könnte. So ausgedrückt ist also der Satz von der Trägheit der Körper nichts Anderes, als der Satz des zureichenden Grundes, auf die Veränderung des Zustandes der Körper angewendet, wo unter diesem Worte *Zustand* des Körpers die *Ruhe* verstanden wird, wenn er ruht, und die *Richtung* und *Geschwindigkeit*, wenn er sich bewegt. Die erwähnte Ursache aber, welche diesen Zustand des Körpers, wenn er ein anderer wird, ändert, wird *Kraft* genannt. Das Gesetz der Trägheit kann demnach auch so ausgedrückt werden: *der Zustand eines Körpers kann nur durch eine Kraft verändert werden.* Wo daher keine Veränderung dieser Art bemerkt wird, ist auch keine Kraft da, die auf den Körper einwirkt, wenn nicht etwa mehrere Kräfte vorhanden sind, die sich aber gegenseitig aufheben. Wenn ein Körper ruht, so wird er so lange ruhn, als er von keiner Kraft getrieben wird. Wenn aber ein Körper in gerader Linie und mit gleichförmiger Geschwindigkeit sich bewegt, so kann er dieses nur in Folge einer früheren Kraft, deren Wirkung aber aufgehört hat, wie z. B. dieses ein augenblicklicher Stofs thun wird. Wenn endlich ein Körper sich in einer krummen Linie oder mit einer ungleichförmigen Geschwindigkeit bewegt, so ist dieses nur dann möglich, wenn eine stets thätige Kraft immerwährend auf ihn wirkt und dadurch jeden Augenblick seine Richtung oder seine Geschwindigkeit oder beide zugleich ändert.

So verstanden bildet diese Eigenschaft der Körper das bekannte *Princip der Trägheit*, das als das erste Axiom der Mechanik angenommen wird. In früheren Zeiten hat man darüber, wie über so manches andere, viel gestritten, ohne eben die Sache dadurch zu fördern. Man wurde dazu gröfstentheils durch die sonderbare Benennung veranlafst, die man dieser Eigenschaft der Körper beilegte und die man, da man ihre Ursache in einem inneren Bestreben der Körper suchte, die *Kraft der Trägheit* (*vis inertiae*, *force d'inertie*) geheifsen

hat, worin vorzüglich Descartes[1] vorausgegangen ist. Huyghens stellte zuerst den Begriff gehörig fest und Newton[2] drückte ihn schön und bestimmt mit den Worten aus: *Corpus omne perseverat in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogatur illum statum mutare.* Was Stewart, Hermann, Nollet, Brisson, Gordon, Kratzenstein und selbst Franklin[3] darüber geschrieben haben, ist jetzt gröſstentheils und nicht mit Unrecht vergessen. Eine Sache, die entweder als ein Axiom für sich klar ist oder doch nicht weiter bewiesen werden kann, soll bloſs deutlich und bestimmt ausgesprochen, aber nicht zum Gegenstande von inhaltleeren Discussionen gemacht werden.

Auſser diesem Axiome der Mechanik haben die neueren französischen Schriftsteller in dieser Wissenschaft nur noch eines angenommen, daſs nämlich die accelerirenden Kräfte den Geschwindigkeiten, die sie erzeugen, proportional sind. Auch dieses Princip ist in den früheren Zeiten viel bestritten worden, wie bereits oben[4] zum Theil angeführt worden ist. Da aber alle Beweise, die man bisher von diesem Satze zu geben suchte, miſslungen sind, so wird man besser thun, ihn ebenfalls als ein Axiom oder als ein Princip zu betrachten, um von ihm auszugehn und dann bloſs zuzusehn, ob die aus ihm folgenden Resultate mit den Erscheinungen der Natur übereinstimmen. Von diesen Beweisen sind die neuesten die von Laplace[5] und Poisson[6]. Die englischen Schriftsteller über Mechanik setzen diesen beiden Axiomen noch ein drittes, das von der Zerlegung der Kräfte und der Geschwindigkeiten in zwei oder drei andere unter sich senkrechte, hinzu. Die französischen und deutschen Mechaniker nehmen im Gegentheile diesen Satz als ein Theorem an, dessen strengen Beweis sie aufzustellen sich bemühen. Wir werden darüber weiter unten[7] näher sprechen. *L.*

---

1 Princip. Philos. T. II. §. 37.
2 Principia Philos. Nat. Lib. I.
3 Dessen Miscellaneous Pieces.
4 S. Art. *Kraft.* Bd. V. S. 968.
5 Mécanique céleste. L. I.
6 Traité de Mécanique. 2me éd. §. 116.
7 S. Art. *Zerlegung.*

Tropfen.

Gutta; Goutte; *Drop.*

Eine durchaus vollständige Untersuchung aller die Bildung und das Verhalten der Tropfen betreffenden Einzelheiten würde sehr weitläuftig und schwierig, zugleich aber für die Physik von einem dieser Mühe nicht entsprechenden Nutzen seyn, weswegen ich mich beschränke, nur das Wesentlichste hier zu betrachten.

Man nennt Tropfen jede für sich bestehende oder als solche betrachtete, kleinere oder unbestimmt gröfsere Masse irgend einer Flüssigkeit, deren Verhalten nach den vorhandenen ungleichen Bedingungen sehr verschieden ist, und man mufs daher die einzelnen Erscheinungen ordnen, um das Ganze besser zu übersehn. Hiernach lassen sich die Tropfen betrachten zuerst, wenn sie im freien Zustande sich selbst überlassen sind, zweitens, wenn sie auf einer gegebenen Fläche ruhn, und drittens, wenn sie von einem Körper herabhängen.

1) Die sich selbst überlassenen, für sich bestehenden Tropfen aller Flüssigkeiten, als ruhend gedacht, nehmen eine vollkommene Kugelgestalt an und ihre Gröfse kann ins Unbestimmte wachsen, denn selbst die Gesammtmasse unserer Erde, von der wir annehmen, dafs sie ursprünglich flüssig war und in Folge hiervon die Kugelgestalt erhalten habe, läfst sich als ein Tropfen von unermefslicher Gröfse betrachten. Ehemals suchte man die Ursache dieser Form, die sich auch bei den *Luftblasen*[1] findet, im Drucke der Luft; als sich aber die Tropfen im luftleeren Raume gleichfalls rund zeigten, sollte sie nach der Ansicht der Cartesianer im Drucke der subtilen Materie oder des Aethers liegen, bis NEWTON[2] die eigentliche Ursache auffand und sehr bestimmt ausdrückte[3].

---

1 S. Art. *Luftblasen*. Bd. VI. S. 458.

2 Optice. Qu. 23. p. m. 338.

3 A. a. O. heifst es: Guttae corporis cujusque fluidi, ut figuram globosam induere conentur, facit mutua partium suarum attractio; eodem modo, quo terra mariaque in rotunditatem undique conglobantur, partium suarum attractione mutua, quae est gravitas.

Es darf als ein Axiom gelten, dafs jede gegebene Masse einer Flüssigkeit die Kugelgestalt annehmen müsse, weil alle einzelnen Molecüle derselben, wenn sie insgesammt gleichen Gesetzen der Anziehung folgen, ihre alles mefsbaren Widerstandes der Reibung entbehrende Beweglichkeit vorausgesetzt, nur dann in den Zustand des Gleichgewichts kommen können, wenn sie mit allen andern, vom Centrum gleich weit entfernten, einen gleichen hydrostatischen Druck erleiden, was nur unter Voraussetzung einer vollständigen Sphäricität der Fall seyn kann. Nachdem Newton diesen Satz aufgestellt und begründet hatte, schlossen sich hieran alle die unmittelbar damit zusammenhängenden Untersuchungen über die Gestalt, welche die Erde unter Voraussetzung einer statt findenden Rotation annehmen mufste, worüber an einem anderen Orte[1] bereits geredet worden ist. In der Erfahrung gewahrt man eine Menge Anwendungen dieses Gesetzes, wovon es genügt, nur die Methode des Schrotgiefsens[2] anzuführen, wobei man das geschmolzene Metall durch ein Sieb von einer beträchtlichen Höhe in ein Gefäfs mit Wasser herabfallen läfst, damit die so getheilten einzelnen Massen im freien Falle die vollkommene Kugelgestalt annehmen.

Wenn die Tropfen sich bewegen, so geschieht dieses entweder im leeren Raume oder in einem widerstehenden Mittel. Im ersten Falle ist kein Grund vorhanden, warum die bestehenden Gesetze eine Abänderung erleiden sollten, und sie werden daher die vollkommene Kugelgestalt beibehalten, im zweiten Falle müssen sie aber den vorhandenen Widerstand überwinden, und da dieser nicht gegen alle Theile der Oberfläche gleichmäfsig wirkt, an einigen Stellen sogar negativ wird, so mufs sich hierdurch die vollkommene Kugelgestalt ändern. Dieses kommt namentlich in Betrachtung bei den Regentropfen, die wegen ihres Falles durch den lufterfüllten Raum die vollkommene Kugelgestalt nicht beibehalten können, sondern eine solche Gestalt annehmen, dafs die verticale Durchschnittsebene durch ihr Centrum von der *Curve des kleinsten Widerstandes* begrenzt ist. Es würde indefs keinen,

---

1 S. Art. *Erde*. Bd. III. S. 920.

2 S. d. Lehrbücher der Technologie.

der Schwierigkeit angemessenen Nutzen für den Physiker haben, die Gleichung für diese Krümmungen aufzusuchen[1].

2) Liegen die Tropfen auf irgend einer Unterlage, so wirkt auf ihre Gestalt nicht bloſs die gegenseitige Anziehung ihrer Molecüle unter sich, sondern zugleich die Adhäsion derselben an die Oberfläche der Unterlage, wie nicht minder der lothrechte Druck gegen diese, und wenn daher die erstere die Kugelform erzeugt, so werden die beiden letzteren, dieser entgegenwirkend, eine Abplattung herbeiführen; die Form der Tropfen wird daher durch das Verhältniſs dieser drei Kräfte unter einander bedingt. Unter diesen drei einander entgegenwirkenden Kräften ist das Gewicht oder die Schwere, vermöge welcher die Molecüle des Tropfens dem Mittelpuncte der Erde sich zu nähern streben, bei weitem die kleinste, man pflegt sie daher gewöhnlich zu vernachlässigen und bloſs den Conflict der beiden andern zu betrachten. Hierbei muſs aber berücksichtigt werden, daſs die erstere, die gegenseitige Anziehung der Molecüle einer Flüssigkeit, bei jeder gegebenen Masse derselben sofort in ganzer Stärke auftritt, die Adhäsionskraft an der Unterlage aber, als eine in unmeſsbare Ferne wirkende[2], bloſs die mit der Oberfläche der unterstützenden festen Körper in unmittelbarer Berührung befindlichen Theile afficirt. Faſst man das Problem bloſs im Allgemeinen auf, so folgt einfach, daſs die Tropfen der Flüssigkeiten auf den Unterlagen um so mehr zerflieſsen und ihre genaue Kugelform durch Abplattung um so vollständiger verlieren werden, je gröſser die Kraft der Adhäsion ihrer Molecüle gegen die sie tragende Oberfläche im Verhältniſs zu der Anziehungskraft dieser Molecüle unter sich ist, worüber sich jedoch keine bestimmten Gesetze aufstellen lassen, weil die Stärke der Adhäsion der Flüssigkeiten an feste Körper sich durch kaum oder gar nicht wahrnehmbare Veränderungen der Oberflächen dieser Körper bedeutend ändert. So wird unter andern Wasser auf Glas an einigen Stellen völlig zerflieſsen, aber an andern oder unter veränderten Umständen sich von der Oberfläche scheinbar zurückziehn,

---

1 Eine vor einigen Jahren, wenn ich nicht irre, in Breslau, erschienene Dissertation: De forma guttae in medio resistente cadentis, habe ich nicht zur Hand.

2 Vergl. *Capillarität*. Bd. II. S. 39. und *Adhäsion*. I. 186.

ohne dafs sich die Ursache dieses verschiedenen Verhaltens bestimmt angeben läfst. Hierzu kommt dann noch der wichtige Umstand, dafs sich die Stärke der Adhäsion der Molecüle sowohl unter sich als auch gegen die Oberflächen der festen Körper durch die Temperatur bedeutend ändert. Aus dem Unterschiede der Stärke jener beiden genannten Kräfte, verbunden mit der Wirkung der Schwere, wird erklärlich, dafs Quecksilber auf Glas Kugeln bildet, deren Abplattung mit ihrer Gröfse zunimmt, Wasser dagegen auf demselben mehr oder weniger vollständig zerfliefst, statt dafs es auf den mit einem wachsartigen Ueberzuge bedeckten Oberflächen der Pflanzenblätter eine mehr oder minder kugelförmige Gestalt annimmt, wie das bekannte Phänomen der Thautropfen oder der Regentropfen, namentlich auf Kohlblättern, zeigt. Sind die Quecksilberkügelchen oder die Wassermassen klein, so lassen sich die Körper, denen sie adhäriren, umkehren, ohne dafs jene herabfallen, ungeachtet dann ihr ganzes Gewicht auf sie wirkt, woraus hervorgeht, dafs die Schwere und der dadurch erzeugte Druck eine sehr geringe Kraft im Verhältnisse zu den andern beiden Attractionskräften seyn mufs und dafs daher die Abplattung der kugelförmigen Tropfen zum gröfsten Theile eine Wirkung der Adhäsion ist.

Versuche zur Bestätigung und Erläuterung dieser Gesetze giebt es verhältnifsmäfsig nur wenige, weil sie für die Naturlehre im ganzen Umfange nur geringen Nutzen gewähren. Am bekanntesten sind diejenigen, welche Musschenbroek[1] angestellt hat. Hierbei fand er, dafs Wassertropfen von einer Lin. Durchmesser auf polirtem Eisen die Gestalt einer Halbkugel annahmen, welche Bestimmung jedoch auf keiner absolut scharfen Messung beruht; mehr zerflossen sie auf Elfenbein, Guajakholz und Buchsbaum, noch mehr auf Quecksilber und Glas, ungleich weniger, und fast volle Kugelgestalt beibehaltend, auf Blättern. Auch auf glühendem oder sehr heifsem Eisen blieben sie anscheinend vollkommen rund, eine Erscheinung, welche später unter der Benennung des *Leidenfrost'schen Versuches*[2] die Physiker so vielfach beschäftigt hat. Bei kleinen Quecksilbertropfen auf Glas kann die geringe

1 Introd. ad phil. nat. T. I. §. 1018 ff.

2 Hierüber s. Art. *Wärme*.

Abplattung derselben wahrgenommen, auch leicht gezeigt werden, daſs sie beim Umkehren des Glases dennoch daran hängen bleiben und also ihre Adhäsion ungleich gröſser seyn muſs, als ihr Gewicht. Musschenbroek fand Quecksilbertropfen von 0,01 Z. Durchmesser nur unmerklich abgeplattet und dennoch fielen sie von Buchsbaum-, Granadillen- und Guajakholz u. s. w. beim völligen Umkehren nicht herab, stieg ihre Gröſse aber bis 2,5 Z. Durchmesser, so betrug ihre Abplattung dennoch nur 0,15 Zoll. Wenn zwei Tropfen von derselben Flüssigkeit auf einer Fläche, von welcher sie nur wenig angezogen werden, mit einander zur Berührung kommen, so flieſsen sie augenblicklich in einen einzigen zusammen, wie sich am deutlichsten bei Quecksilberkügelchen auf reinem glatten Papiere oder Glase zeigt; werden sie aber stärker von den sie tragenden Flächen angezogen, so vereinigen sie sich nicht vollkommen, sondern nehmen eine längliche Figur an, welche in der Mitte am schmalsten ist[1]. Tropfen von geschmolzenem Zinn, Blei oder Wismuth auf strengflüssigern Metallen verhalten sich wie Quecksilbertropfen, es sey denn, daſs man durch Salmiak, Colophonium, Salzsäure u. s. w. das Zerflieſsen wie beim Löthen bewirkt.

Auch diese Erscheinungen wollte man vom Luftdrucke und den Wirkungen des Aethers ableiten, allein schon Musschenbroek widerlegt diese Ansicht und bemerkt dabei, man würde ohne Schwierigkeit die richtige Erklärung, wonach die Ursache in der Wechselwirkung der verschiedenen Adhäsionen zu suchen sey, aufgefunden haben, wenn man nur genaue Versuche angestellt und dabei die Phänomene deutlich beobachtet hätte. Diese Gesetze der Anziehung in unmeſsbar geringe Fernen, wonach die Molecüle der Flüssigkeiten unter sich und von den Oberflächen fester Körper angezogen werden, legte Laplace[2] bei seiner Theorie der Capillarität zum Grunde und bestimmte hiernach die Gestalt eines groſsen Quecksilbertropfens auf einer Glasplatte so, daſs die Resultate mit den Ergebnissen der Erfahrung genau übereinstimmten.

---

1 Bei der Anstellung dieser Versuche vereinigt man die Tropfen dadurch, daſs der eine oder beide so lange vergröſsert werden, bis die Berührung erfolgt.

2 G. XXXIII. 328.

Wie stark aber die Kraft der Adhäsion der Molecüle einer Flüssigkeit unter sich sey, zeigt der von verschiedenen, namentlich englischen Physikern angegebene Versuch, dafs man auf eine Spiegelplatte eine Menge möglichst gleicher Quecksilbertropfen ausbreiten, dann eine andere Spiegelplatte darauf legen kann, ohne die Tropfen bedeutend flach zu drükken, selbst wenn man die obere Spiegelplatte mit Gewichten beschwert. Ist die letztere durch gröfsere Gewichte merklich beschwert und sind die Kugeln dadurch stark platt gedrückt, so werden sie zur ursprünglichen Form zurückkehren, wenn man die Lasten von der oberen Platte entfernt.

3) Am häufigsten kommen die Tropfen unter der Bedingung vor, dafs sie von festen Körpern herabhängen, und in dieser Beziehung sind sie auch am meisten untersucht worden, hauptsächlich weil bei der Bereitung und dem Gebrauche der Arzneien häufig die Tropfen als eine gewisse gemessene Gröfse dienen. Eigentlich wissenschaftliche Untersuchungen über die Gröfse und Gestalt der Tropfen auch in dieser Beziehung, so wie überhaupt über ihre Bildung, hat wohl zuerst Musschenbroek [1] angestellt, indem er die verschiedenen Flüssigkeiten durch einen Trichter, welcher sich unten in ein Haarröhrchen endigte, ablaufen liefs und dabei die Höhe und den Durchmesser der so gebildeten, auf eine Glasplatte herabfallenden Tropfen mafs. Nicht minder schätzbar sind die Versuche von Weitbrecht [2], welcher das Phänomen der Tropfenbildung mit denen der Capillarität in Verbindung brachte und somit in den bedeutenden, über letzteres Problem später bekannt gewordenen Untersuchungen voranging, unter denen die von Thom. Young [3] hier noch besonders genannt werden mögen, weil sie über Tropfen von Wasser und Weingeist, die er von Kugeln herabfallen liefs, Versuche enthalten.

Young glaubt, es sey nicht unmöglich, die Gröfse der Tropfen, wie sie von gegebenen Substanzen abfliefsen, aus der Höhe zu berechnen, bis zu welcher die Flüssigkeiten, woraus sie bestehn, in einem Haarröhrchen von der nämlichen

---

1 A. a. O.

2 Comment. Petrop. T. VIII. p. 261. T. IX. p. 275.

3 Philos. Trans. 1805. p. 65. Auch in dessen Lectures. T. II. p. 649.

Substanz aufsteigen. Die linearen Dimensionen der Tropfen verschiedener Flüssigkeiten, welche von einer horizontalen Fläche herabhängen, müssen sich nämlich verhalten, wie die Höhen, bis zu welchen diese Flüssigkeiten an der horizontalen Fläche aufsteigen, oder wie die Quadratwurzeln der Höhen in einem Haarröhrchen, wonach also ihre Gröfsen sich verhalten müssen wie die Cubi der Quadratwurzeln dieser Höhen. In einem diesemnach angestellten Versuche waren die Höhen von Wasser und verdünntem Weingeiste = 100:64, das Gewicht eines von einer grofsen Glaskugel fallenden Tropfens Wasser betrug 1,8 Grains, das eines Tropfens Weingeist 0,85 Grains, statt dessen die Rechnung sehr annähernd 0,82 gab. Am bekanntesten ist die Abhandlung von SEGNER[1], welche aufser Versuchen auch theoretische Betrachtungen enthält. Von den späteren Arbeiten über diesen Gegenstand verdienen vorzüglich die von LINK[2], GAY-LUSSAC[3] und FRANKENHEIM[4] genannt zu werden.

Nach den Resultaten der gesammten Untersuchungen wird die Gröfse und Gestalt der Tropfen bedingt zuerst durch die Fluidität und das specifische Gewicht der Flüssigkeiten, zweitens durch die Gröfse, Gestalt und Adhäsionskraft[5] der Fläche oder des Körpers, an welchem sie hängen und von welchem sie sich losreifsend herabfallen, und drittens durch die Temperatur sowohl der Flüssigkeit als auch des Körpers, woran sie hängen. Als Apparate zur Bildung der Tropfen bediente sich MUSSCHENBROEK kleiner Trichter mit haarröhrenförmigen Oeffnungen, LINK gebrauchte massive, unten abgerundete Glasstäbchen, FRANKENHEIM verwandte dazu Röhren, Pipetten, Retorten von verschiedener Gröfse, an denen die Flüssigkeit herabflofs und sich unten zum Tropfen vereinigte, poröse Zeuge, die um einen durchlöcherten Metallboden gewunden waren, und vorzüglich ein Glasgefäfs mit

---

1 Comm. Soc. Reg. Gott. T. I. p. 301.

2 G. XLVII. 17.

3 POISSON nouvelle Théorie de l'action capillaire. Par. 1831. p. 125.

4 Die Lehre von der Cohäsion. Bresl. 1835. S. 95.

5 FRANKENHEIM nennt diese *Synaphie* vom griechischen Worte *συνάφεια*, Zusammenhang.

einem engen Loche in seinem ziemlich dicken Boden. Letzteres fand er am brauchbarsten, insbesondere wenn der Boden etwas sphärisch gekrümmt war, indem dann die Tropfen an jeder Stelle der Fläche vor dem Herabfallen eine gleiche Gröfse erhielten. Ich selbst bediene mich eines kleinen Hebers aus einer engen Glasröhre[1], an dessen nicht eingetauchtem Ende man leicht einen Tropfen entstehn lassen, vergröfsern und verkleinern und zugleich alle Veränderungen seiner Gröfse und Gestalt eine beliebige Zeit hindurch beobachten kann.

Sind die übrigen Bedingungen gleich, so zeigt sich zuerst der Einflufs der Fluidität, welche im Ganzen wohl mit der Molecularattraction oder der Adhäsion der Elemente jeder gegebenen Flüssigkeit unter sich zusammenfällt, durch die ungleiche Gröfse der Tropfen, wie sie durch das Gewicht derselben gefunden zu werden pflegt. Man nimmt das Gewicht eines Tropfens reinen Wassers meistens zu einem Gran an, und dieses stimmt mit den Resultaten nahe genug überein, welche Link aus seinen Wägungen erhielt, wonach 8 Tropfen, die von einem Glasstabe herabfielen, bei 8° R. Temperatur 7 Gran wogen. Nimmt man die Gröfse dieses Tropfens als Einheit und berücksichtigt man, dafs die Volumina gefunden werden, wenn man die absoluten Gewichte durch die specifischen dividirt, so geben seine sämmtlich bei 8° R. angestellten Versuche mit Tropfen, die durch gleich tiefes Eintauchen derselben Glasröhre genommen worden waren, folgende vergleichbare Resultate:

Flüssigkeiten	spec. Gew.	Gewicht von 8 Tropfen	Gröfse der Tropfen
Wasser	1,000	7 Gran	1,000
Schwefelsäure . . .	1,803	8 —	0,633
Schwefels. Kupfer .	1,015	8 —	1,125
Mandelöl		6,5 —	1,055

War die Temperatur des Wassers = 34° R., so war dessen spec. Gewicht = 0,948, und da 8 Tropfen nur 4,5 Gran wogen, so betrug ihr Volumen 0,678. Frankenheim fand, dafs Tropfen von Weingeist und Aether kleiner sind, als von Was-

1 Vergl. *Capillarität.* Bd. II. S. 45. Fig. 25.

ser, und das Verhältnifs bei Weingeist und Wasser soll dem der Höhe dieser Flüssigkeiten in Haarröhrchen gleich seyn.

Die Wirkung der *Adhäsion* der Flüssigkeiten an die festen Körper ist bei der Tropfenbildung nicht zu verkennen, denn wenn keine Benetzung statt findet, fällt auch die hier zu erörternde Tropfenbildung weg[1], Frankenheim aber hat bestimmt gefunden, dafs die Körper, an denen sich Tropfen bilden und die normale Gröfse erhalten sollen, nothwendig benetzt seyn müssen, und dafs sie namentlich bei Wasser kleiner werden, wenn die Flächen etwas fettig sind. Aufserdem kommt die Gröfse und Gestalt der Flächen, denen die Flüssigkeiten adhäriren, bis sich eine gehörige Menge derselben vereinigt, um als Tropfen herabzufallen, sehr in Betrachtung, und eine sehr feine Spitze mufs sonach die kleinsten, eine ausgedehnte ebene Fläche die gröfsten Tropfen geben, ohne dafs es sich jedoch der Mühe lohnt, hierüber bestimmte Zahlengröfsen aufzusuchen. Nach Frankenheim bewirkte die sphärische Krümmung der Fläche von 20 bis 30 Millim. Radius eine merkliche Verminderung der Gröfse der Tropfen, und selbst bei 50 Millim. Radius war der vermindernde Einflufs der Krümmung noch nicht ganz verschwunden.

Ueber den Einflufs der Temperatur auf die Gröfse der Tropfen sind die wenigsten Bestimmungen vorhanden. Im Allgemeinen ist nicht zu verkennen, dafs die Adhäsion durch Vermehrung der Wärme vermindert wird und dafs daher das Volumen des Tropfens, der sich nur dann von dem festen Körper losreifst, wenn sein Gewicht die Kraft der Adhäsion überwindet, durch Temperaturerhöhung vermindert werden mufs; in welchem Verhältnisse aber diese Verminderung mit der Wärmezunahme stehe, kann vorläufig nur durch Versuche ausgemittelt werden, die bis jetzt noch fehlen, obgleich Link[2] bereits auf ihren Nutzen aufmerksam machte. Von ihm selbst haben wir blofs das bereits erwähnte Resultat, wonach die Gröfse der Wassertropfen durch eine Wärmezunahme von 34 — 8 = 26° Reaum. von 1 auf 0,678 herabging, Frankenheim aber fand diese Gröfse für 40 — 20 = 20° C.

---

1 So läfst sich bekanntlich Quecksilber nicht aus gläsernen oder irdenen Gefäfsen abtröpfeln.

2 G. XLVII. 18.

nur 0,8 bis 0,9, ohne die Aufgabe weiter zu verfolgen. Letzterer hat dagegen auf eine andere Bedingung aufmerksam gemacht, die nicht sowohl für wissenschaftliche Untersuchungen, als vielmehr für die praktische Anwendung wichtig ist, nämlich dafs die Gröfse der Tropfen mit der Geschwindigkeit des Abfliefsens derselben wächst. Dieses Resultat kann nicht wohl paradox scheinen, vielmehr folgt es nothwendig aus den Bedingungen; denn wenn der Tropfen sich bildet und zunehmend tiefer herabsinkt, bis die oberen Theile desselben durch das Gewicht der unteren getrennt werden, so mufs die Masse der unteren nothwendig zunehmen, wenn während der Zeit des Losreifsens noch andere hinzufliefsende Theile hinzukommen. In seinen Versuchen fand FRANKENHEIM, dafs durch eine Verminderung der Zeit von 3,76 bis 0,79 die Gröfse der Tropfen bei Wasser von 1 bis 1,55 und bei Weingeist durch eine Verminderung der Zeit von 1,67 bis 0,37 die Gröfse von 1 bis 1,76 zunahm.

Ueber das Verhalten der Tropfen vom Anfange ihres Entstehens an und über die Veränderung ihrer Form bis zum Augenblicke, wo sie sich losreifsen und herabfallen, will ich nichts hinzusetzen, da mir keine erschöpfenden Untersuchungen hierüber bekannt sind, das Phänomen aber leicht mit dem oben vorgeschlagenen Heber beobachtet werden kann, insofern man die allmälige Bildung derselben, ihre Vergröfserung und Verminderung, kurz alle verschiedene Modificationen der Gröfse und Gestalt in willkürlich langer Zeit und im beliebigen Wechsel leicht zu erzeugen und wahrzunehmen vermag. Die bisherigen Untersuchungen über die Tropfen unter der zuletzt betrachteten Bedingung ihres Anhängens an feste Körper bis zum Herabfallen derselben sind aber wichtig, insofern sie zur Erläuterung der Adhäsionsgesetze dienen. Die Tropfenbildung ist nur dann möglich, wenn die Flüssigkeit den gegebenen festen Körper benetzt und also die Adhäsion ihrer Molecüle unter einander schwächer ist, als die an den festen Körper, wie sich daraus deutlich ergiebt, dafs der Tropfen bei erreichter hinlänglicher Gröfse durch sein Gewicht nicht von der Fläche des Körpers, woran er hängt, abgerissen wird, sondern allmälig sich der Gestalt eines Cylinders mit unterer Halbkugelfläche nähert, worauf sofort der obere Theil dünner wird, bis er abreifst und der zur Kugel umge-

staltete Tropfen herabfällt, der zurückbleibende Rest aber sich wieder in die Höhe zieht, um einen Theil des neu entstehenden Tropfens zu bilden. Hieraus geht hervor, daſs man vermittelst der unter gleichen Bedingungen erzeugten Tropfen verschiedener Flüssigkeiten die Stärke ihrer Adhäsion messen könne, es würde aber unrichtig seyn, wenn man aus dem Abreiſsen des Tropfens schlieſsen wollte, diese Messung erstrecke sich bloſs auf den Zusammenhang der Theile der Flüssigkeiten unter sich, da vielmehr auch die Adhäsion derselben an die festen Körper dabei in Betracht kommt, indem hierdurch die Gröſse der Fläche bedingt wird, welche die Basis des Tropfens einnimmt, denn die Bildung desselben beruht darauf, daſs die Molecüle der Flüssigkeit von der Oberfläche der festen Körper angezogen werden, wodurch jedoch nur eine dünne Lage derselben gebildet werden könnte, und die Entstehung des Tropfens ist daher zugleich auch eine Folge der gegenseitigen Anziehung der Molecüle des flüssigen Körpers. In praktischer Beziehung ist es aber wichtig zu bemerken, daſs die Tropfen nicht als bestimmte Gröſsen gelten können, wie in der Pharmacie angenommen wird, da ihr Volumen unter verschiedenen Bedingungen sehr ungleich ist. Frankenheim[1] versichert, daſs er Wassertropfen, deren normales Gewicht zu einem Gran angenommen wird, 240 Milligramme oder 4 Gran schwer erhalten habe, welches sonach den ungeheuren Unterschied vom Einfachen bis zum Vierfachen begründen würde. Wenn auch angenommen wird, daſs bei der Bereitung und dem Geben der Arzneien die Bedingung zu groſser Geschwindigkeit des Abtröpfelns und der Einfluſs der Wärme, Ersteres durch nöthige Vorsicht und Letzteres durch die Wahl einer mittleren Temperatur, leicht zu beseitigen wären, so hängt doch auſserdem die Gröſse der Tropfen von der Beschaffenheit des Gefäſses, ob von Glas oder Porzellan u. s. w., von der Dicke und Krümmung des Randes und anderen Bedingungen sehr ab, weswegen mindestens den Pharmaceuten eigene, bestimmt gestaltete *Tropfengläser* unentbehrlich sind. Solche hat man daher, namentlich für stark wirkende Arzneien, verschiedentlich in Vorschlag gebracht[2],

---

1 A. a. O. S. 100.

2 Scherer's allgem. nordische Ann. Th. I. S. 215.

es möge hier aber genügen, ein von Meissner[1] angegebenes wegen seiner Zweckmäſsigkeit als Probe näher zu beschreiben. Ein seiner Form nach hierzu geeignetes Medicinglas wird mit zwei durch einen Kork gesteckten Glasröhren α und β versehn, deren eine β dazu dient, die im Glase enthaltene Flüssigkeit tropfenweise abflieſsen zu lassen, weswegen ihr oberes Ende gehörig gebogen ist, und es müssen dann die Tropfen wegen der eine halbe Linie kaum erreichenden geringen Weite der Röhre nur langsam abflieſsen, können aber wegen der Unveränderlichkeit der rein zu erhaltenden Fläche, woran sie sich bilden, von ihrer normalen Gröſse nicht wesentlich abweichen. Die zweite α hat den Zweck, wieder Luft in das Glas eindringen zu lassen, und sie ist daher so gebogen, daſs dieses bei einer geneigten Lage des Glases leicht geschieht, auch geht sie nicht so tief herab, daſs die Flüssigkeit in ihr aufsteigt, woraus ein Hinderniſs gegen das Eindringen der Luft erwachsen würde. Zweckmäſsiger, obgleich etwas kostbarer, ist ein anderes von Schuster[2] angegebenes Tropfenglas, dessen Vorzüge darin bestehn, daſs die Flüssigkeiten nicht mit einem allmälig zerstörbaren Korke in Berührung kommen und die Luft nicht durch zwei offene Röhren leichter communiciren kann. Die Gestalt des Ganzen ist aus der Zeichnung kenntlich, auch sieht man bald, daſs der Glasstöpsel a geöffnet wird, wenn man das Gefäſs füllen oder Tropfen aus der Spitze b erhalten will, die bis zur Weite vom Durchmesser etwa einer mäſsig dicken Nähnadel verengt ist. Auf diese Weise erhält man allezeit unter sich gleich groſse Tropfen derselben Flüssigkeit, auch findet wegen der Engigkeit der Spitze eine nur geringe Verdunstung und ein unbedeutender Einfluſs der eindringenden Luft statt, welchen Mängeln ohnehin begegnet werden kann, wenn die Spitze b mit einer aufgeschliffenen gläsernen Kapsel bedeckt wird.

Fig. 147. Fig. 148.

M.

---

1 Vorschläge zu einigen neuen Verbesserungen pharmazeutischer Operationen. Wien 1814. S. 278.

2 Buchner's Repertorium. Th. VI. S. 369.

Turmalin.

Turnamal, Trip, Aschenzieher, Aschentrecker, elektrischer Stangenschörl, ceilonscher Magnet; *Turmalinum, Lapis electricus*; Tourmaline; *Tourmaline.*

Der Turmalin erregte im Anfange des vorigen Jahrhunderts durch seine vorzügliche krystall-elektrische oder thermoelektrische Eigenschaft, durch Erhitzung stark elektrisch zu werden, sehr großes Aufsehn und auch später ist er in dieser Beziehung Gegenstand vielfacher Untersuchungen geworden. Die Mineralogen[1] unterscheiden den *wasserhellen* Turmalin, den *rothen* (*Siberit*, *Daourit*, *rothen Schörl*), den *blauen* (*Indicolit*), den *grünen*, den *gelben*, den *braunen* (*elektrischen Schörl*) und den *schwarzen* (*gemeinen Schörl*), unter denen vorzugsweise der braune wegen seiner vorzüglichen elektrischen Eigenschaft hier in Betrachtung kommt. Von geringem Werthe sind die Bemühungen, die Spuren der Kenntniſs dieses Steines bei den Alten aufzusuchen, da die älteren Schriftsteller allerdings von solchen Fossilien reden, welche leichte Körper anziehn, ohne daſs jedoch die ungenaue Beschreibung darüber zu entscheiden gestattet, ob wirklich vom Turmaline die Rede sey, weil auch andere Fossilien diese Eigenschaft zeigen. Dahin gehört das *Lyncurium* des Theophrast[2], welches die Römer nicht mehr kannten[3], der *Theamedes* des Plinius[4], welcher alles Eisen abstoſsen soll, und eine Art *Carbunculus* dieses nämlichen Schriftstellers[5], welcher von der Sonne erwärmt oder mit der

1 S. v. Leonhard Handbuch der Oryktognosie. Heidelb. 1826. S. 446. Daselbst findet man die ausführliche Literatur über dieses Fossil.

2 De Lapidibus, ed. Heinsii. L. B. 1613. fol. p. 395.

3 Plinius Hist. Nat. Lib. XXXVII. c. 3.

4 Ebend. Lib. XXVI. c. 16.

5 Ebend. Lib. XXXVII. c. 7.

Hand gerieben Spreu und Papierschnitzeln anziehn soll. Noch weniger einer bestimmten Deutung fähig ist die Angabe des Arabers SERAPION[1] von einem Steine, *Hager Albuzedi* genannt, welcher aus dem Oriente kommend an Haaren gerieben Spreu anziehe.

Die erste bestimmte Nachricht von der elektrischen Eigenschaft des Turmalins findet sich nach BECKMANN[2] in einem alten Buche[3], worin die von einem gewissen DAUNIUS mündlich erhaltene Angabe mitgetheilt wird, dafs die Holländer im J. 1703 einen pomeranzrothen Edelstein, Turmalin, Turmale und Trip genannt, aus Ceilon mitgebracht und wegen seiner merkwürdigen Eigenschaft Aschentrecker genannt hätten. LEMERY[4] zeigte der französ. Akademie einen solchen Stein unter dem Namen eines ceilonschen Magnets, welcher die sonderbare Eigenschaft habe, die Körper erst anzuziehn und dann abzustofsen; aus dem Naturlexikon[5] geht aber hervor, dafs man sich auch in Deutschland mit diesem Steine beschäftigte. LINNÉ[6] muthmafste zuerst richtig, obgleich er den Turmalin selbst noch nicht gesehn hatte, dafs die bewunderte Eigenschaft desselben auf Elektricität beruhe, weswegen er ihn *Lapis electricus* nannte, eine Ansicht, welche durch die genauen Untersuchungen von WILKE[7] und vorzüglich von AEPINUS[8] volle Bestätigung erhielt. Letzterer prüfte die Eigenschaften dieses Fossils genau und machte die Resultate nebst den früheren Nachrichten über dasselbe bekannt[9]; in Frankreich stellte der Herzog von NOYA CARAFFA[10] mit DAU-

---

1 De simplicibus medicinis.

2 Beiträge zur Geschichte der Erfindungen. Leipz. 1782. Th. I. St. 2. N. 5. S. 241.

3 Curiöse Speculationes bei schlaflosen Nächten; von einem Liebhaber, der IMMER GERN speculirt. Chemnitz und Leipz. 1707. 8.

4 Hist. de l'Acad. 1717. p. 7. Vergl. MUSSCHENBROEK Diss. de Magnete. L. B. 1729. 4. praef.

5 Mehrmals mit HÜBNER's Vorrede aufgelegt. Ausgabe von 1727 und 1741.

6 Flora Ceilonica Holm. 1747. 8. p. 8.

7 Schwed. Abhandl. Th. XXVIII. S. 95. Th. XXX. S. 1 u. 105.

8 Mém. de l'Acad. de Berlin. 1756. p. 110.

9 Recueil de différens mémoires sur la Tourmaline. St. Petersb. 1762. 8.

10 Lettre sur la Tourmaline à Mr. de Buffon. Paris 1759. 4.

BERTON und ADANSON schätzbare Versuche an, wodurch die von AEPINUS gefundenen Erscheinungen bestätigt wurden; ebendieses geschah in England durch WILSON[1], welcher seine Turmaline durch HEBERDEN aus Holland erhielt, und noch gründlicher durch CANTON[2], mehrerer anderer Versuche nicht zu gedenken, die von WILKE[3], PRIESTLEY[4] und BERGMANN[5] erwähnt werden. In den neueren Zeiten haben die Chemiker den Turmalin analysirt und die Mineralogen denselben, aufser zu Ceilon, noch an vielen andern Orten aufgefunden, was aber hier nicht zunächst zur Sache gehört[6]. Beiläufig mag dagegen erwähnt werden, dafs ein ähnliches elektrisches Verhalten schon im J. 1760 beim brasilianischen Topase durch CANTON, im J. 1761 am sogenannten brasilianischen Smaragd durch WILSON wahrgenommen wurde, welchen letzteren Stein AEPINUS[7] jedoch für einen Chrysolith hielt. Vermuthlich waren diese Steine sämmtlich Turmaline von verschiedener Farbe und Krystallform.

Für unseren Zweck kommt zunächst nur das elektrische Verhalten des Turmalins in Betrachtung. So lange man blofs die Erregung der Elektricität durch Reibung kannte, mufste es im hohen Grade auffallen, den Turmalin durch blofse Aenderungen der Temperatur elektrisch werden zu sehn, und hieraus erklärt sich leicht das grofse Aufsehn, welches diese Erscheinung allgemein erregte. Als man später die Volta'sche Säule kennen lernte, suchte man jenes Verhalten hiermit in Verbindung zu setzen, und da weitere Erfahrungen eine gleiche Eigenschaft auch bei sonstigen vollkommen krystallisirten Körpern nachwiesen, nahm man eine eigene sogenannte *Krystallelektricität* an. Nach dem gegenwärtigen Standpuncte, auf welchem sich die Elektricitätslehre befindet, unterliegt es wohl

---

1 Philos. Trans. T. LI. P. I. p. 308.

2 Ebend. T. LII. P. II. p. 443.

3 Schwed. Abhandl. a. o. a. O.

4 Geschichte der Elektricität. Deutsche Ueb. S. 456.

5 Comm. de Indole electr. Turmalini. In Phil. Trans. T. LVI. p. 236. Schwed. Abh. T. XXVIII.

6 Wegen der ausführlichen Literatur, die zum Theil in der alten Ausgabe des Wörterbuches enthalten ist, verweise ich auf die Oxyktognosie von v. LEONHARD a. a. O.

7 Nov. Comm. Petrop. T. XII. p. 351.

keinem Zweifel, dafs diese speciellen Erscheinungen zur *Thermoelektricität* gehören; allein wie zahlreich auch die zu letzterer gehörigen Thatsachen seyn mögen und obgleich diese bereits ebenso vielseitig als gründlich untersucht worden sind[1], so ist dennoch das eigentliche Wesen und die Aetiologie dieser Phänomene noch keineswegs ergründet. Als solche krystallisirte Fossilien, welche die thermoelektrische Eigenschaft zeigen, nennt Haüy[2] den Turmalin, den Boracit, den Topas, den Mesotyp (Werner's strahligen und faserigen Zeolith), den Prehnit und das oxydirte Zink (krystallisirten Galmei); allein da dieser Gelehrte die Anwesenheit der Elektricität blofs aus ihrer mechanischen Wirkung erkannte, wobei er sich des Condensators bediente, so unterliegt es wohl keinem Zweifel, dafs noch viele andere Körper thermoelektrische Wirkungen zeigen werden, sobald man sich zur Wahrnehmung derselben feinerer Mefswerkzeuge, namentlich der Magnetnadel, bedient, wie ich denn nach eigenen Versuchen überzeugt bin, dafs alle Körper, wenn auch nur in sehr geringem Grade, thermoelektrisch werden können[3]. Inzwischen ist unverkennbar, dafs die genannten Fossilien und unter diesen namentlich der Turmalin die angegebene Eigenschaft in einem vorzüglichen Grade besitzen und überhaupt in dieser Beziehung ein auffallendes und merkwürdiges Verhalten zeigen, indem sie nicht blofs überhaupt thermoelektrisch werden, sondern zugleich polarische Gegensätze beider Elektricitäten wahrnehmen lassen. Ampère[4] führt daher den Turmalin als Beispiel eines Nichtleiters an, in welchem sich beide Elektricitäten durch den Wechsel der Temperatur trennen und bleibend an verschiedenen Stellen anhäufen.

Das elektrische Verhalten des Turmalins ist untersucht worden von Wilke und Aepinus, die bereits genannt sind, ferner von Wilson[5], Bergmann[6], den Herzog von Noya Caraffa, Haüy[7] und Andere; später sehr ausführlich und gründ-

---

1 Vergl. diesen Art.
2 Ann. du Mus. d'Hist. Nat. T. III. p. 309. G. XVII. 441.
3 S. Art. *Temperatur*. Bd. IX. S. 547.
4 G. LXVII. 115.
5 Philos. Trans. 1759. T. LI. p. 315.
6 Schwed. Abhandlungen. Deutsche Ueb. Th. XXVIII. S. 65.
7 Traité de Minéralogie. T. III. p. 50.

lich von JÄGER [1], welcher denselben mit der trocknen elektrischen Säule vergleicht und seine elektrischen Aeufserungen denen der letzteren gleich setzt. Beide Apparate gleichen sich in der äufseren Form und der Lage ihrer Pole an den Enden, mit so genauer Uebereinstimmung, dafs selbst einzelne Splitter des Steins nach der Seite hin, wo der + Pol des Ganzen sich befand, die nämliche Polarität zeigen. Der Turmalin scheint hiernach und nach der Leichtigkeit seines Zerspaltens aus ähnlichen übereinander gelagerten Lamellen zu bestehn, als die trockne Säule, wofür noch aufserdem die Verschiedenheit des äufseren Ansehns seiner Bruchflächen, wenn man ihn spaltet, als Argument angeführt wird. Rücksichtlich des elektrischen Verhaltens beider Apparate bieten sich einige Aehnlichkeiten als nahe liegend von selbst dar, andere liegen entfernter. Unter die letzteren gehört, dafs der Turmalin seine elektrische Eigenschaft verliert, wenn er bis zum Verluste seiner Farbe oder bis zum Schmelzen erhitzt wird, dagegen nach sonstigem starkem Erhitzen sich wieder elektrisch zu zeigen beginnt, wenn er vorher auf eine niedrige Temperatur zurückgebracht ist; ganz von dem Verhalten der Säule abweichend ist aber die Bedingung, dafs der Stein zur Erzeugung einer elektrischen Polarität einer Temperaturveränderung bedarf, die trockne Säule aber auch ganz ohne diese Bedingung sich elektrisch wirksam zeigt. Beide Apparate kommen darin überein, dafs ihre Pole nicht vollkommen leitend verbunden und auch nicht völlig isolirt seyn dürfen, welches Letztere JÄGER durch seine Versuche für erwiesen hält, obgleich WILKE und WILSON die Sache anders gefunden zu haben angeben, wobei jedoch wohl berücksichtigt zu werden verdient, dafs nach JÄGER vollkommene Isolirung nur mit grofser Schwierigkeit zu erlangen ist. So soll man es unter andern als eine Wirkung der elektrischen Atmosphären beider Pole ansehn, dafs zwei Elektrometer, auf welche man die entgegengesetzten Pole eines Turmalins oder einer trocknen Säule (Letzteres nach BOHNENBERGER [2]) gelegt hat, beide vorhandene Elektricität zeigen. Beim Turmaline ist ferner bemerkenswerth, dafs seine durch Erhitzung erzeugte Elektricität

---

1 G. LV. 369 ff.

2 Tübinger Blätter. Th. II. S. 71. G. LIII. 347.

beim Abkühlen in die entgegengesetzte übergeht, und zwar in der Art, dafs der ganze Stein, wenn man ihn in beiden Zuständen am einen Ende leitend berührt, in seiner ganzen Länge eine und dieselbe Elektricität zeigt, sind aber beide Enden mit einem unvollkommenen Leiter verbunden, so zeigen sie nach zwei Hälften entgegengesetzte Elektricitäten. Es folgt aus diesem ferner, dafs der Turmalin, wenn sein eines Ende erhitzt wird und das andere in Abkühlung begriffen ist, an beiden Enden gleiche Polarität erhalten mufs, indem er hierdurch zwei mit ihren gleichen Polen vereinten trocknen Säulen gleich wird, eine Erscheinung, die Wilson bereits wahrgenommen hat; auch fand Wilke, dafs dann in der Mitte des Steines die entgegengesetzte Polarität zum Vorschein kam. Hinsichtlich der Intensität der Elektricität zeigen sich die Turmaline verschieden, was als Folge ihrer ungleichen Bestandtheile oder Aggregatformen zu betrachten seyn dürfte. Als die wirksamsten nennt Jäger die nelkenbraunen von Ceilon; ihnen folgen die grünen brasilianischen, dann die braunen spanischen, demnächst die rosenrothen, angeblich gleichfalls ceilonschen, hiernach die braunen schweizerischen, dann die bläulichen, welche muthmafslich auch aus Ceilon herstammen, und endlich die undurchsichtigen schwarzen tyroler Schörle. Feuchte Luft und die Nähe einer Lichtflamme schwächen die Wirkung, ohne Zweifel wegen Ableitung der Elektricität, auch erschöpft sich die Kraft des Steines, wie die der Säule, durch anhaltende Ableitung, indem es lange dauert, bis der Turmalin durch Abkühlung elektrisch wird, wenn er auf einer Metallplatte liegend erhitzt wurde. Uebrigens wächst die Stärke der Elektricität mit der Länge der Turmaline, jedoch nicht im einfachen Verhältnisse, anscheinend nur den Quadratwurzeln der Axenlänge proportional; auch fand Jäger die gröfste Intensität an den Polen selbst, der Behauptung von Haüy zuwider, wonach in einiger Entfernung von den Polen an Stellen, die er Mittelpuncte der Wirkung nennt, die stärkste Elektricität wahrgenommen werden soll. Dafs die Stärke der Elektricität dem Unterschiede der Temperatur, welchem der Stein ausgesetzt wird, proportional seyn solle, scheint nicht statt zu finden, jedoch mufs man bei vergleichenden Versuchen auch für gleiche Erwärmung und Erkältung sorgen. Der Turmalin theilt seine Elektricität zwar zum Theil wie ein

leitender Körper mit, und zwar mehr, wenn der Pol desselben mit einem Metallblättchen überzogen ist, zugleich zeigt sich aber auch Atmosphärenwirkung; denn wenn der Pol einige Zeit mit einem Elektrometer in Berührung war, so fielen die Goldblättchen nach der Wegnahme des Steines zusammen, divergirten dann aber sofort wieder mit entgegengesetzter Elektricität. Ferner dauert es eine geraume Zeit, bis der Turmalin seine Elektricität abgiebt, und zwar eine längere, als er zu seiner Abkühlung bedarf, weswegen die Divergenzen der Strohhälmchen des Elektrometers zunahmen, wenn der Stein wiederholt aufs neue erhitzt war und bei der Abkühlung dem Elektrometer wieder genähert wurde. Die Mittheilung erfolgt zugleich aber schneller, wenn die Flächen der Pole größer sind und der Wechsel der Temperatur kürzere Zeit dauert, und geschieht zugleich um so vollständiger, je vollkommener ableitend der andere Pol berührt wird.

Die ihrem wesentlichen Inhalte nach hier mitgetheilte deutsche Abhandlung scheint den Ausländern, die sich später mit demselben Gegenstande beschäftigten, nicht bekannt geworden zu seyn, wie man dieses auch sonst häufig zu finden pflegt. Von diesen spätern Untersuchungen des Verhaltens des Turmalins oder der sogenannten *Pyroelektricität* ist die von Brewster[1] die umfassendste, sofern sie sich nicht ausschließlich auf den Turmalin beschränkt, sondern auch auf sonstige Körper erstreckt, welche dieselbe Eigenschaft im höheren oder geringeren Grade zeigen, ohne jedoch die Abweichungen der verschiedenen Körper von dem allgemeinen Gesetze dieses Verhaltens einzeln nachzuweisen. Zur Auffindung und Messung der vorhandenen Elektricität bediente sich Brewster der inneren Haut aus der *arundo phragmitis*, die in kleine Stückchen geschnitten und getrocknet von den pyroelektrischen Körpern angezogen wurde, oder eines kleinen Elektrometers, welches aus einer mittelst eines Achathütchens auf einer Stahlspitze balancirten messingnen Nadel bestand, beide Mittel keineswegs fein genug, um die geringsten Spuren vorhandener Elektricität anzugeben. Hiermit fand er folgende Fossilien thermoelektrisch:

---

1 Edinburgh Journ. of Science. N. II. p. 208.

Scolezit[1]	Diamant
Mesolit[1]	gelbes Auripigment
grönländischer Mesotyp	Analcim
Kalkspath	Amethyst
gelber Beryll	Quarz aus der Dauphiné
Schwerspath	Idocras
schwefelsaurer Srontian	Mellit?
kohlensaures Blei	natürlicher Schwefel
Diopsit	Granat
rother und blauer Flufsspath	Dichroit.

Brewster fand, übereinstimmend mit früher erhaltenen Resultaten, dafs selbst kleine Splitter des Turmalins, insbesondere senkrecht auf die Axe geschnittene Blättchen, elektrisch werden, denn wenn sie auf einer Glasscheibe liegend erhitzt sind, so hängen sie am Glase so fest, dafs sie selbst beim Umkehren nicht herabfallen und also ihr ganzes Gewicht durch die Kraft der elektrischen Anziehung überwunden wird, und aufserdem behielten sie diese Eigenschaft 6 bis 8 Stunden lang bei. Keiner der früheren Forscher, selbst nicht Hauy, hat untersucht, ob auch aus wässerigen Lösungen gebildete Krystalle sich pyroelektrisch zeigen. Brewster suchte auch diese Frage zu beantworten und fand diese Eigenschaft bei folgenden Krystallen:

Weinsteinsaures Kali-Natron	schwefelsaure Magnesia
Weinsteinsäure	blausaures Eisen-Kali
kleesaures Ammonium	Zucker
chlorsaures Kali	Bleizucker
schwefelsaure Natron-Magnesia	kohlensaures Kali
schwefelsaures Ammonium	Citronensäure
schwefelsaures Eisen	Quecksilbersublimat.

Unter diesen Salzen zeigte sich das weinsteinsaure Kali-Natron und die Weinsteinsäure stark, die übrigen zeigten sich verhältnifsmäfsig schwach pyroelektrisch.

Schon Canton hatte als auffallend bemerkt, dafs beide Stücke eines zerbrochenen Turmalins elektrische Polarität zei-

1 Eins oder das andere dieser beiden Fossilien hält Brewster für wahrscheinlich identisch mit Hauy's Mesotyp.

gen, und Haüy schloſs hieraus, daſs ein jedes Theilchen desselben auf gleiche Weise ein polarisch elektrischer Körper seyn müsse, als Coulomb jedes einzelne Theilchen eines Magnetes für magnetisch hielt. Inzwischen sind die durch Feilen oder Zerstoſsen erhaltenen kleinen Partikeln eines Magnetes, eben in Folge dieser Zerkleinerung, nicht mehr magnetisch, und diesemnach, meint Brewster, müsse man erwarten, daſs auch das Pulver eines zerstoſsenen Turmalins nicht mehr pyroelektrisch seyn könne, allein selbst feines Pulver, welches im gewöhnlichen kalten Zustande von einer Glasplatte herabfiel, hing an derselben fest an, wenn das Glas gehörig erhitzt war, und ballte sich beim Aufrühren mit einem festen Körper zu einem Haufen zusammen, verlor jedoch diese Eigenschaft einige Zeit nach dem Erkalten. Brewster findet eine Analogie dieses Verhaltens mit der doppelten Strahlenbrechung in Krystallen, indem das kleinste Stück isländischen Kalkspaths stets noch doppelte Strahlenbrechung zeigt, während schnell gekühltes Glas nach dem Zerstoſsen seine optischen Eigenschaften verliert; er will daher hierauf eine der Beachtung und weiteren Untersuchung werthe Aehnlichkeit zwischen Elektricität, Magnetismus und Licht gründen[1]. Pulver von zerstoſsenem und seines Krystallwassers beraubtem Scolezit und Mesolit behielt gleichfalls seine pyroelektrische Eigenschaft bei, hing an einer erhitzten Glasplatte fest und lieſs sich durch Aufrühren mit einem festen Körper zusammenballen; diese Eigenschaft der genannten Fossilien muſs daher den kleinsten Bestandtheilen derselben angehören und nicht von der Krystallform abhängen, wozu das Krystallwasser unentbehrlich ist[2].

---

1 Die über diesen Gegenstand versprochene Abhandlung ist, so viel mir bekannt, nicht erschienen. Die Sache erklärt sich übrigens leicht, wenn man annimmt, daſs zum feinsten Pulver zerstoſsener Turmalin und Kalkspath stets noch ihr krystallinisches Gefüge, die Bedingung ihrer Wirkungsweise, beibehalten, statt daſs der Magnetismus des Stahls und die Fähigkeit des Glases, auf den polarisirten Lichtstrahl zu wirken, aus der Aggregationsart ihrer Theilchen entstehn und den ganzen Körpern daher ebensowohl gegeben als auch genommen werden können.

2 Dieser Umstand ist zwar nicht absolut entscheidend, spricht aber für Haüy's Ansicht von den Grundformen der Krystalle.

Becquerel[1], dem die Elektricitätslehre so äufserst zahlreiche Versuche verdankt, fand sich zur Prüfung der beim Turmaline gemachten Erfahrungen deswegen bewogen, weil manche Physiker den Atomen der Körper ähnliche elektrische Eigenschaften als Ursache der chemischen Anziehung beilegen, fand aber diese Hypothese nicht bestätigt, und glaubt daher das chemische Verhalten aus dem elektrischen nicht ableiten zu können, weil die Aeufserung der Elektricität beim Turmaline verschwindet, sobald er zur gewöhnlichen Temperatur zurückkehrt. Verstehe ich die Sache recht, so ist damit der Satz gemeint, dafs der chemischen Anziehung das elektrische Verhalten der Atome zum Grunde liege, sofern die positiv elektrischen das Bestreben haben sollen, sich mit den negativen, der Stärke der elektrischen Spannung proportional, zu verbinden. In diesem Falle würde aber das Argument nicht entscheidend seyn, da sich von selbst versteht, dafs sich in der Verbindung eines + und eines — elektrischen Atoms beide Elektricitäten zu 0 ausgleichen müssen. Abgesehn hiervon kommen hier nur die Resultate der Versuche in Betrachtung, aus denen sich ergab, dafs der Turmalin bei gleichmäfsiger Erwärmung seiner ganzen Masse an beiden Enden entgegengesetzt elektrisch wird, dafs die Pole wechseln, wenn er wieder erkaltet, und dafs er diese Elektricität weder von aufsen annimmt, noch dahin wieder abgiebt, sondern aus sich selbst entwickelt.

Diese Resultate sind bekannt und übereinstimmend mit dem, was frühere Versuche ergeben haben; abweichend hiervon, namentlich von dem, was auch Brewster beobachtet hatte, war das Ergebnifs, dafs die Elektricität des Turmalins mit seinem Erkalten sofort gänzlich verschwand. Um das Verhältnifs zwischen der Abkühlung und der elektrischen Erregung kennen zu lernen, hing Becquerel den zu prüfenden Turmalin in einem zusammengebogenen Papierbehälter an einem Seidenfaden in einem Glasgefäfse auf, welches in Quecksilber stand, dessen Temperatur durch eine Weingeistlampe erhöht werden konnte. Jedem Ende des Krystalls in geringer Entfernung gegenüber war ein Eisenstab angebracht, welcher

1 Ann. de Chim. et Phys. T. XXXVII. p. 5. 355. Poggendorff's Ann. XIII. 628.

mit dem einen Pole einer trocknen Säule in Verbindung stand, deren Wirkung als constant gelten konnte, weil sie der Veränderung der Temperatur nicht zugleich mit ausgesetzt war. Wurde der Turmalin elektrisch, so stellte er sich zwischen die Enden der Eisendrähte mit den diesen entgegengesetzten Polen ein, und wurde er dann abgelenkt, so gab die Zahl seiner Oscillationen ein Mittel zur Messung der relativen Intensitäten. Der Turmalin wurde bis 115° C. erwärmt und zeigte bei 105° die ersten, bei 15° die letzten Spuren von Elektricität, die den zwischenliegenden Graden zugehörigen Schwingungszahlen waren aber folgende:

Temp.	100°;	90°;	80°;	70°;	60°;	50°;	40°;	30°;	20°;
Schwing.	6;	10;	13;	15;	15;	15;	14;	13;	7;

woraus sich ergiebt, dafs weder eine gleichmäfsige Zunahme noch Abnahme der elektrischen Intensität mit der Abnahme der Temperatur statt findet. Beim Erwärmen des Turmalins zeigten sich die ersten Spuren der Elektricität bei 30°, und bei 150° waren sie noch nicht verschwunden; das Verhältnifs ihrer Intensitäten zu den Temperaturen zu messen konnte Becquerel nicht in Ausführung bringen. Was Wilke, Wilson und Jäger bereits wahrgenommen hatten, nämlich dafs ein Turmalin auch zu einer Säule mit zwei gleichen Polen und dem entgegengesetzten in der Mitte werden kann, fand auch Becquerel, jedoch durch ein von dem früheren verschiedenes Verfahren. Er hing nämlich einen Krystall in der Mitte an einem Platindrahte auf, welcher oben an einer Glasröhre festgebunden war, steckte jedes Ende des Steins in eine dicht anschliefsende Glasröhre, und erhitzte das eine der Enden, während die Temperatur des andern unverändert blieb. Hierdurch wurde dann blofs das eine erhitzte Ende elektrisch, ja er konnte auf diese Weise sogar die einzelnen Abtheilungen des Steines elektrisch machen, wovon er sich durch Anwendung der Coulomb'schen Waage überzeugte. Die Elektricität war übrigens positiv oder negativ, je nachdem das eine oder das andere Ende einseitig erwärmt war, jedoch giebt Becquerel nicht an, welches von den beiden Enden des Turmalins, die einander nicht gleich sind, beim Abkühlen nach dem Erwärmen positiv oder negativ wird, und Poggendorff[1] be-

1 Dessen Annalen a. a. O. S. 629. Anm.

merkt mit Recht, dafs dieser Umstand noch von niemand erschöpfend untersucht worden ist. Endlich fand BECQUEREL, dafs Turmaline, welche stark elektrisch werden, diese Eigenschaft sowohl durch langsames als auch durch rasches Erhitzen annehmen, statt dafs die weniger erregbaren einer schnellen Erwärmung bedürfen. Ebendaher werden kurze Turmaline leicht thermoelektrisch, bis 5 oder 6 Centimeter lange aber nur bei langsamer Erhitzung, und hieraus, in Verbindung mit einer Angabe von AJASSON, dafs die Stücke eines zufällig zerbrochenen Turmalins leicht elektrisch wurden, obgleich der ganze nicht in diesen Zustand zu versetzen gewesen war, wird die Folgerung abgeleitet, die Molecüle dieses Steines müfsten auch durch schwache Erwärmung eine starke elektrische Polarität zu erhalten fähig seyn.

Die bisher zusammengestellten, durch vielfache Versuche mehrerer Gelehrten gefundenen Resultate über das elektrische Verhalten des Turmalins stimmen in allen wesentlichen Puncten mit einander überein, mit Ausnahme der einzigen Thatsache, dafs nach BECQUEREL die Polarität dieses Fossils mit der Rückkehr zur äufsern Temperatur verschwinden soll, statt dafs andere ein mehrere Stunden anhaltendes Anhängen desselben an der Glasscheibe gefunden hatten. Hauptsächlich aus dieser Ursache benutzte FORBES[1], welcher so eifrig bemüht ist, die über die physikalischen Gesetze noch obschwebenden Dunkelheiten aufzuhellen, den Besitz mehrerer geeigneter Turmaline, um die noch zweifelhaften Thatsachen durch neue Versuche besser zu constatiren. Hierzu bediente er sich eines Apparates, welcher dem von BECQUEREL gebrauchten an Zweckmäfsigkeit mindestens gleichkommt. Dieser besteht aus einer unten sehr weiten Flasche AB mit einem hinlänglich weiten Tubulus C und einer in ihren Hals gesteckten Röhre D. In das obere Ende der letzteren ist ein Kork F mit einem Drahte f gesteckt, von dessen unterem Häkchen ein Coconfaden mit einem Coulomb'schen Waagebalken g e herabhängt, welcher am einen Ende das Scheibchen g von Goldpapier trägt. Die unten angebrachte Kreistheilung i k ist für sich klar, die obere H aber

Fig. 149.

1 An Account of some Experiments on the Electricity of Tourmaline and other Minerals, when exposed to Heat. Edinb. 1834. 4. Aus Edinb. Phil. Trans. T. XIII.

dient dazu, durch Umdrehung des Korkes F um seine verticale Axe das Goldpapierblättchen in jede beliebige Lage zu bringen und den Torsionswinkel des Coconfadens zu messen. Für den Versuch wird das Scheibchen mit einer bestimmten Elektricität geladen, die Anziehung oder Abstofsung zeigt dann die Art der Elektricität, und aus der Gröfse des Abstofsungswinkels läfst sich die Stärke der Elektricität mindestens annähernd bestimmen.

Ohne Temperaturänderung zeigte der Turmalin gar keine Elektricität, obgleich er bedeutend erhitzt war; sobald er aber einen Theil seiner Wärme verloren hatte, wurde das Goldblättchen abgestofsen, seine Entfernung nahm zu, erreichte ein Maximum, wobei es einige Zeit stationär blieb, dann aber zurückkehrte, indem der Turmalin sofort nach wiedererlangter Temperatur der Umgebung keine weitere Spur von Elektricität zeigte, obgleich er in eine Glasröhre gesteckt fortwährend isolirt erhalten wurde. Dieses stimmt vollkommen mit den von Becquerel erhaltenen Resultaten überein, streitet aber gegen Brewster (und Anderer) Beobachtungen, wonach dünne Blättchen von Turmalin 6 bis 8 Stunden lang an der Glasscheibe durch elektrische Anziehung hängen bleiben. Da sich die Richtigkeit dieser letzteren Thatsache nicht wohl bezweifeln läfst, so suchte Forbes den Grund dieser Anomalie theoretisch zu bestimmen, was jedoch sehr nahe liegt; das Glas wird nämlich elektrisch geladen und das Turmalinblättchen dient als Belegung. Obgleich dieses sich als höchst wahrscheinlich von selbst darbietet, so mufs man doch sehr billigen, dafs Forbes die Richtigkeit dieser Ansicht durch den Versuch darthat und diesen obendrein etwas anders modificirte, als von seinen Vorgängern geschehn war, indem er das Turmalinstückchen nicht auf der Glasscheibe liegend erhitzte, sondern für sich allein, dann auf die Glasscheibe legte und, als es durch elektrische Anziehung daran festhing, mit einem Probeblättchen die auf der entgegengesetzten Seite des Glases angehäufte Elektricität prüfte.

Die Turmaline, deren sich Forbes bediente, gröfstentheils schwarze von Van-Diemens-Land, waren meistens sehr lang und gestatten daher eine Prüfung des von Becquerel aufgestellten Satzes, dafs die elektrische Kraft mit der Länge abnimmt und bei sehr langen verschwindet. Der Stein, dessen

Prüfung zu diesem Schlusse führte, war 3,2 engl. Zoll lang und hatte ungefähr 0,08 Z. Durchmesser; der längste, womit Forbes seine Versuche anstellte, maſs 3,25 engl. Zoll bei gleicher Dicke mit jenem, zeigte sich aber stets und vollständig polarisch-elektrisch. Dieses veranlaſste ihn, den Einfluſs der Länge und der Durchmesser der Turmaline näher zu prüfen. Sechs Turmaline, alle 1,3 Z. lang, deren Querschnittsflächen sich verhielten wie 14, 11, 7, 6, 4, gaben als stärkste Abstoſsungen 1, 2, 5, 3, 4. Gleiche Unregelmäſsigkeiten zeigten sich, als Krystalle von 1,2 und 1,8 Zoll Länge, aber von verschiedener Dicke geprüft wurden, und man kann daher nur als Hauptresultat betrachten, daſs unter übrigens gleichen Verhältnissen die dickeren Krystalle mit einer gröſseren elektrischen Intensität verbunden zu seyn pflegen. Interessant war folgender Versuch. Ein 1,25 Z. langer Krystall gab im Mittel aus drei Versuchen 45° als stärkste Repulsion. Nachdem er sofort in zwei Theile zerbrochen war, deren Länge sich wie 1 zu 3 verhielt, zeigten diese Theile gleichfalls im Mittel 43° und 47°, zwischen welchen Gröſsen jene frühere ungefähr in der Mitte liegt. Sechs Krystalle, sämmtlich von nahe 0,1 Z. Durchmesser, aber verschiedener Länge, gaben in wiederholten genauen Versuchen folgende aus den Abstoſsungen gemessene Intensitäten.

Nr.	Länge	Zoll,	Intensität
Nr. 1	Länge	3,25 Zoll,	Intensität 79,5
— 2	—	2,10	— 82,0
— 3	—	1,60	— 60,0
— 4	—	1,55	— 60,0
— 5	—	1,35	— 89,0
— 6	—	1,19	— 68,0.

Wenn diesemnach Becquerel's Resultat, daſs lange Krystalle gar nicht elektrisch werden, genügend widerlegt worden ist, so muſs eine andere von Forbes wahrgenommene Thatsache, welche fast auf gleiche Weise isolirt steht, um so gröſsere Aufmerksamkeit erregen. Einer von seinen Krystallen nämlich hatte beim Erkalten an beiden Enden positive Elektricität, zeigte dagegen mit dem Probeblättchen in seiner Mitte negative, und es ist daher möglich, daſs der in Becquerel's Versuche sich neutral zeigende Krystall ein solcher gewesen sey.

Die übrigen Krystalle, auf welche Forbes seine Versuche ausdehnte, waren zuerst der Topas, welcher von der gröſsten Stärke seiner elektrischen Spannung nur langsam herabkam und sie nach mehreren Stunden noch merklich zeigte. Es scheint hiernach, als ob Krystalle von gröſserer Masse länger in diesem Zustande bleiben, und daraus lieſse sich vielleicht die Behauptung von Aepinus erklären, daſs auch der Turmalin lange elektrisch bleibe, vermuthlich weil dessen Versuche mit groſsen Exemplaren angestellt wurden. Krystallisirter Borazit zeigte eine beträchtlich starke elektrische Spannung und die Dauer derselben war auch bei diesem länger, wenn die Krystalle eine bedeutendere Gröſse hatten. Der Mesotyp dagegen war leicht elektrisch erregbar, das Maximum der Spannung trat fast sofort bei beginnender Abkühlung ein, ging aber auch sehr schnell wieder zurück.

Das Thatsächliche über das Verhalten des Turmalins ist nach dem Vorhergehenden so vollständig festgestellt, als dieses bei einer einzelnen Thatsache nur zu erwarten steht, allein die Theorie dieser Phänomene ist noch gar nicht ins Licht gesetzt. Zur Zeit, als Jäger seine Untersuchungen anstellte, waren die thermoelektrischen Erscheinungen noch nicht bekannt, und hieraus erklärt sich leicht, daſs er den Turmalin mit einer trocknen Säule verglich. Dabei erklärte er leicht den auffallenden Umstand, daſs geschliffene Krystalle von kaum zwei Linien Axenlänge am Volta'schen Elektrometer eine Ablenkung von 60° bewirkten, während eine Papiersäule, von 1 Fuſs Länge und aus 4000 der feinsten Elektromotoren von Papier bestehend, nur eine von 40° erzeugte, aus der unermeſslichen Feinheit der Lagen im Turmaline; wenn er aber die Wirksamkeit beider Apparate auf Reibung zurückzuführen sucht, die dann im Turmaline durch die ungleiche Ausdehnung der Lagen entstehn soll, woraus er zusammengesetzt ist, so fühlt er zugleich selbst, daſs diese Hypothese auf die trockne Säule keine Anwendung leide. Die Wirkung der letzteren läſst sich zwar einfach auf die Contact-Elektricität zurückführen, allein bei der Vergleichung beider Apparate konnte sich dann Jäger nicht verbergen, daſs die Eigenthümlichkeit des Turmalins, durch Wärme elektrisch zu werden und obendrein beim Uebergange vom Erhitztseyn zum Erkalten seine vorher durch Erwärmung angenommene Polarität zu ändern,

in der trocknen Säule durchaus keine Spur von einer Analogie finde. Die allerdings statt findende und in einzelnen Puncten wahrhaft überraschende Aehnlichkeit zwischen der trocknen Säule und dem Turmaline vermag daher bei so grofsen obwaltenden Verschiedenheiten die Theorie der sogenannten Krystallelektricität durchaus nicht weiter zu fördern. Forbes[1] bemerkt, es sey bekannt, dafs der Turmalin am besten künstlich nachgebildet werden könne durch eine Reihe isolirter, einander paralleler, gehörig belegter und an den zusammengehörigen Belegungen durch Zinnfolie verbundener Glasscheiben. Dieses ist offenbar wieder eine trockne Säule, und er findet dann, dafs bei einer Zusammensetzung derselben aus sehr zahlreichen Platten eine Verkürzung keinen Unterschied der Intensität hervorbringen könne, welcher dagegen durch Vergröfserung der Platten oder des Querschnittes der Säule nothwendig entstehn müsse, und da die elektrische Spannung mit dem Durchmesser der Turmaline zunehme, so sey in beiden Puncten allerdings eine Aehnlichkeit dieser zwei Apparate vorhanden, obgleich von der andern Seite der Umstand, dafs kurze Turmaline von grofsem Querschnitte die gröfste Spannung zeigen, mit der Ladung der trocknen Säule nicht im Einklang stehe. Man sieht aus diesen Bemerkungen, dafs der englische Physiker, so sehr er auch seinen Scharfsinn anderweitig beurkundet hat, dennoch nicht wagte, eine Enträthselung dieser Phänomene zu versuchen. Nach dem gegenwärtigen Standpuncte der Elektricitätslehre müssen wir wohl das Verhalten des Turmalins und somit die gesammte sogenannte *Krystallelektricität* auf die *Thermoelektricität* zurückführen, um so mehr, als die Erzeugung einer elektrischen Polarität in dicken Stangen von Wismuth, Zink und Antimon, also in Metallen von vorzüglich krystallinischem Gefüge, nach v. Yelin's[2] Entdeckung zwischen beiden gleichsam ein Mittelglied bildet. Es liegt also vor Augen, dafs die Aufhellung der Theorie über die verschiedenen Arten der Hervorrufung freier Elektricität künftigen Zeiten vorbehalten bleiben mufs[3].

M.

---

1 A. a. O. p. 10.

2 G. LXXIII. 434.

3 Da hier zum letzten Male in unserem Werke von elektrischen Theorieen die Rede war, die gerade in diesem Augenblicke einen Ge-

genstand angestrengter, mitunter in Leidenschaft ausartender, Forschungen bilden, so dürften folgende kurze Bemerkungen nicht ganz überflüssig erscheinen. Soll das Wesen der elektrischen Erscheinungen näher nachgewiesen werden, so mufs eine genügende Theorie sie alle unter ein übereinstimmendes Gesetz bringen und die Aeufserungen des elektrischen Fluidums oder der elektrischen Thätigkeit insgesammt aus einer allen gemeinsamen Quelle ableiten. Der scharfsinnige Volta hat in dieser Beziehung den richtigen, seitdem stets verfolgten Weg eingeschlagen, indem er vor allen Dingen untersuchte, ob die Elektricität, ungeachtet der ungleichen Arten ihrer Hervorrufung und ihrer Wirkungen, dennoch dem Wesen nach stets eine und dieselbe sey. Wird dann in Folge allgemein bekannter Thatsachen angenommen, dafs beide Elektricitäten in ihrer Vereinigung das indifferente 0 E. geben, alle elektrische Thätigkeiten aber aus der Trennung und Wiedervereinigung, so wie aus den Strömungen des + E. und des — E. zu erklären sind, so dürfte es nahe liegen, zu folgern, dafs beide Elektricitäten an die Molecüle der Körper gebunden seyen und durch jede Veränderung des Zusammenhanges dieser Molecüle im Zustande ihres stabilen Gleichgewichts, sey es beginnende Trennung oder Vereinigung, gleichfalls bald frei gemacht, bald wieder vereint würden, wobei dann die gröfsere oder geringere Leitungsfähigkeit der verschiedenen Körper als hauptsächlich bedingend auf die hieraus hervorgehenden Erscheinungen wirken müfste. Sind beide Elektricitäten in einem gegebenen Körper einmal getrennt, so mufs durch diesen eine entgegengesetzte Trennung beider Elektricitäten in anderen genäherten Körpern nach Affinitätsgesetzen hervorgerufen werden. Früher kannte man in dieser Beziehung blofs die sogenannte Vertheilung. Oersted's und Faraday's glänzende Entdeckungen haben aber aufserdem die Wechselwirkung zwischen Elektricität und Magnetismus nachgewiesen, wonach die Trennung des 0 E. in seine beiden Constituenten durch Magnetismus auf ähnliche Weise, als nach der höchst wichtigen Entdeckung von Seebeck und v. Yelin, durch Wärme bewirkt wird. Die Inductionserscheinungen beruhn auf einem secundären Erregungsprocesse, insofern schon freie Elektricitat oder thätiger Magnetismus vorhanden seyn mufs, wenn diese Elektricität zum Vorschein kommen soll. Vereinigung und Trennung zweier ganzer Körper ist der einfachste, die Molecüle beider einander nahe bringende oder von einander entfernende Procefs, und wir könnten also sagen: es giebt nur *Contact-Elektricität*, mag dieser Contact durch blofse Berührung der Körper, durch Reibung, durch chemische Action derselben auf einander oder durch Temperaturwechsel bewirkt oder modificirt werden. Hierdurch wären dann die sämmtlichen elektrischen Phänomene auf ein allgemeines Gesetz gebracht, ohne jedoch das eigentliche Wesen des elektrischen Fluidums und die Aetiologie seines Freiwerdens durch diesen Contact erklären zu wollen, die vielleicht für immer ebenso dunkel bleiben werden, als die Attractions- und Repulsionskraft der Molecüle, die zur Erzeugung des stabilen Gleichgewichts vereint wirken.

U.

Ualopanopsique

nennt Wallet[1] ein von ihm erfundenes Instrument, vermittelst dessen alten Personen das Lesen erleichtert werden soll. Die Physiker haben bisher keine weitere Rücksicht darauf genommen, und so dürfen wir uns mit der bloſsen Angabe desselben begnügen.

M.

Uhr.

Horologium; Pendule, Montre; *Clock*, *Watch*, *Timekeeper*.

Mit diesen Benennungen werden verschiedene Instrumente, deren Bestimmung die *Eintheilung der Zeit* ist, bezeichnet. Von denjenigen, die nicht als eigentliche Rädermaschinen zu betrachten sind, erwähnen wir hier bloſs der *Sonnenuhren*, deren schon oben[2] gedacht worden ist, und der *Wasseruhren* (*Clepsydra*, von κλέπτειν stehlen, entziehn, und ὕδωρ Wasser), die wir als sehr unvollkommene und jetzt beinahe ganz auſser Gebrauch gekommene Zeitmesser hier nur kurz betrachten wollen.

Schon die alten Chaldäer sollen sich der Wasseruhren zu ihren astronomischen oder, wie Sextus Empiricus[3] sagt, zu ihren astrologischen Bestimmungen bedient haben, wobei sie die in dem Gefäſse enthaltene Wassermasse in zwölf Theile theilten, so daſs jeder Theil während derjenigen Zeit ablaufen sollte, während welcher jedes der zwölf Zeichen des Thierkreises durch den Meridian ging. Derselbe Schriftsteller tadelt auch schon den gänzlichen Mangel an Genauigkeit solcher Uhren, der, nach ihm, vorzüglich von dem ungleichförmigen Ablaufen des Wassers zu verschiedenen Zeiten und bei

---

1 L'Institut. 1834. N. 69.
2 S. Art. *Sonnenuhr*. Bd. VIII. S. 887.
3 Advers. Math. Cap. XXI.

verschiedenen Temperaturen desselben statt haben müsse. Der ältere Plinius erzählt, dafs Scipio Nasica zuerst solche Wasseruhren in Rom eingeführt habe. In Indien waren die Wasseruhren wahrscheinlich schon sehr früh in Gebrauch, wie man aus dem arithmetischen Werke von Bhascaru[1] sieht, das im 12ten Jahrhunderte nach unserer Zeitrechnung geschrieben wurde. In der Nachricht, die Vitruv[2] von diesen Instrumenten giebt, wird die Erfindung derselben dem Ctesibius zugeschrieben, aber diese von Vitruv beschriebene Uhr ist so complicirt, dafs sie wohl nicht die erste ihrer Art, nicht einmal die erste der in der alexandrinischen Schule etwa zu Beobachtungen gebrauchten Uhren gewesen seyn kann. Aus meheren Stellen in den Reden des Demosthenes sieht man, dafs ein, obschon noch unvollkommener und roher, Gebrauch der Wasseruhren in Athen schon vor den Zeiten des Ctesibius bekannt war. Das von Vitruv beschriebene Instrument dieser Art zeigte nicht blofs die einzelnen Stunden des Tags, sondern auch den Monatstag selbst, den Monat des Jahrs und noch das Himmelszeichen, in welchem sich zu den verschiedenen Jahreszeiten die Sonne aufhält. Ptolemäus verwirft in seinem Almagest die Wasseruhren mit Recht als zu unvollkommen für astronomische Beobachtungen. Indefs wurden sie zum gemeinen Hausgebrauche bis zu Ende des 17ten Jahrhunderts angewendet; vorzüglich sollen die Prediger sich derselben bedient haben, indem sie sie auf der Kanzel neben sich aufstellten, wahrscheinlich um ihrer oft zu grofsen Redseligkeit ein heilsames Ziel zu setzen und ihre gläubigen Zuhörer nicht über das gesetzliche Mafs zu ermüden.

Nimmt man die Wasseruhr als einen Cylinder an, in dessen Boden eine kleine Oeffnung ist, so wird das in diesem Cylinder befindliche Wasser nicht gleichmäfsig (gleichviel Wasser in denselben Zwischenzeiten) durch die Oeffnung abfliefsen. Wenn das Wasser ganz rein und die Oeffnung sehr

---

1 Die artige Geschichte seiner Tochter Liliwati, die als Braut eine Perle aus ihrem Kopfschmuck in die Wasseruhr fallen liefs, wodurch der Ablauf des Wassers gehindert und eben dadurch das ihr durch Zauberer vorhergesagte Schicksal erfüllt wurde, liest man in Taylor's Liliwati. Bombay 1816.

2 De Architectura. Lib. IX.

klein ist, so wird das Gesetz des Abfliefsens folgendes seyn: Ist t die Zeit, in welcher der ganze Cylinder sich leert, so wird in der Zeit $\frac{1}{m}$t der $\frac{1}{m}(2-\frac{1}{m})$ te Theil der ganzen Wassermasse ausfliefsen oder der Wasserspiegel wird um den $\frac{1}{m}(2-\frac{1}{m})$ten Theil seiner Höhe sinken. So wird in der Hälfte der ganzen Zeit t der $\frac{1}{2}$ $(2-\frac{1}{2})$ Theil oder $\frac{3}{4}$ des in dem Cylinder ursprünglich enthaltenen Wassers ausfliefsen; in dem vierten Theil der Zeit t wird $\frac{1}{4}$ $(2-\frac{1}{4})$ oder $\frac{7}{16}$ der ganzen Wassermasse ausfliefsen u. s. w. Wenn man aber durch eine eigene Vorrichtung den Cylinder immer mit Wasser *ganz gefüllt* voraussetzt, so wird, wenigstens sehr nahe, in gleichen Zwischenzeiten auch gleichviel Wasser abfliefsen, es ist aber ungewifs, ob die Alten eine solche Vorrichtung angewendet haben, und nur darüber ist man wohl jetzt allgemein einverstanden, dafs diese Art die Zeit zu messen immer nur eine höchst unvollkommene war, und dafs sie jetzt, wo man viel bessere Mittel zu diesem Zwecke kennt, keiner weiteren Beachtung mehr würdig ist. In noch höherem Grade gilt dasselbe von den *Sanduhren*, die noch unvollkommener sind, als jene.

Noch wollen wir, ehe wir zu den eigentlichen Uhren der neueren Zeit übergehn, das unter diesem Namen bekannte *Sternbild* erwähnen. Die *Uhr* oder die *Pendeluhr* ist ein von Lacaille an den südlichen Himmel gesetztes Sternbild. Eine gerade Linie oder ein gröfster Kreis durch den Stern Canopus (der ersten Gröfse) und durch den südlichen Theil des Eridanus geht durch dieses Sternbild. Es besteht nur aus kleineren Fixsternen, von welchen die vorzüglichsten sind α und β, und 34 in Piazzi's, so wie 229 in Lacaille's Kataloge.

Unter *Uhr*, im neueren Sinne des Worts, verstehn wir eine zur Abmessung der Zeit bestimmte, mit Rädern versehene Maschine. Die Zeit geht, nach dem uns inwohnenden Begriffe derselben, gleichförmig fort. Kann man daher eine Maschine verfertigen, deren Bewegungen ebenfalls gleichförmig fortgehn, so wird man eine solche Maschine als ein *Mafs der Zeit* gebrauchen können. Ehe man aber bei dem noch unvollkommenen Culturzustande der ersten Völker an solche Maschinen denken konnte, mufste man zusehn, ob nicht vielleicht die

Natur selbst uns schon eine solche gleichförmig fortgehende Maschine ohne unser Dazuthun aufgestellt habe. An den himmlischen Körpern, besonders aber an der Sonne, die sich zu diesem Zwecke gleichsam von selbst darbietet, glaubte man diese gleichförmige Bewegung zu erkennen, und so hat man denn schon in den ältesten Zeiten, in die unsere Menschengeschichte zurückreicht, das Intervall zwischen dem Auf- und Untergange der Sonne den *Tag* und das darauf folgende Intervall zwischen dem Unter- und Aufgange dieses Gestirns die *Nacht* genannt. Auch die Eintheilung jedes dieser Intervalle in zwölf gleiche Theile oder *Stunden* scheint ebenso den ältesten Zeiten anzugehören. Da aber diese Tage, also auch diese Stunden in den verschiedenen Jahreszeiten von verschiedener Länge und sonach für ein *Mafs der Zeit* wenig geeignet waren, und da man bemerkte, dafs die Tage mit den Jahreszeiten genau ebenso viel zunahmen, als die Nächte kürzer wurden, und umgekehrt, so wurden endlich die beiden erwähnten Intervalle zusammengenommen unter der Benennung des *Tags* begriffen und derselbe in 24 gleiche Theile oder *Stunden* getheilt. Sonach hiefs nun *Tag* die Zeit zwischen zwei nächsten Aufgängen oder die zwischen zwei nächsten Untergängen der Sonne. Es schien am natürlichsten, den Tag (in dieser zweiten Bedeutung des Worts) mit dem Augenblicke der Sichtbarkeit der Sonne über dem Horizonte, mit dem *Aufgange* der Sonne, anzufangen. Von den Babyloniern wissen wir dieses mit Gewifsheit[1]. Die Athenienser und die Juden aber begannen ihren Tag mit dem *Untergange* der Sonne, wie dieses die Italiener noch jetzt thun. Allein beide Arten den Tag anzufangen führten auf grofse Unbequemlichkeiten im bürgerlichen Leben, wenn man auch die Eintheilung in 24 Stunden beibehielt. In Italien z. B. fällt in der Mitte des Julius der Aufgang der Sonne in die 8te und der Mittag in die 16te italienische Stunde, während in der Mitte des März oder des September der Aufgang in die 12te und der Mittag in die 18te ital. Stunde fällt, weswegen denn die Epochen des Schlafengehns, des Aufstehens, des Mittagsessens, die der Amts- und anderer Arbeitszeiten während des Laufes eines Jahres immer in andere Stunden fallen. Dieses mag die

1 S. Plinius Hist. Nat. L. II. cap. 77.

Ursache gewesen seyn, warum die alten römischen Priester[1] ihre Tage von 24 Stunden mit der Mitternacht anfingen, eine Einrichtung, die nun in der bürgerlichen Zeitrechnung durch ganz Europa (Italien ausgenommen) eingeführt ist. Blofs die Astronomen sind davon abgegangen, indem sie ihre Tage mit dem Mittag beginnen und daher immer hinter der bürgerlichen Rechnung um 12 Stunden oder um einen halben Tag zurück sind. Sie haben diese Aenderung vorgenommen, weil die Sonne, welche sie früher allein zur Zeitbestimmung gebrauchten, zur Zeit der Mitternacht nicht sichtbar ist und daher auch der Augenblick der Mitternacht nicht durch eine wirkliche Beobachtung der Sonne in dieser Epoche gegeben werden konnte, während sie im Gegentheil um Mittag, zur Zeit der Culmination derselben, von jedem Astronomen gesehn und beobachtet werden kann. Jedoch ist dieser Vortheil, wenn es einer ist, bei unserer neuen Beobachtungsart des gestirnten Himmels in der That nicht hinreichend, um dadurch jene oft störende Abweichung von einer bereits allgemein angenommenen Rechnungsart zu begründen.

Allein auch wenn der Tag von Mittag oder Mitternacht angefangen und bis zum nächstfolgenden Mittag oder Mitternacht fortgezählt wird, so hatte man damit doch noch kein ganz schickliches Zeitmafs, da auch der Tag in diesem Sinne des Worts noch immer eine in den verschiedenen Jahreszeiten ungleiche Länge hatte. Diese Ungleichheit war allerdings nicht mehr so grofs, wie die oben erwähnte, aber sie konnte doch bei wissenschaftlichen, astronomischen Geschäften nicht mehr übersehn werden und sie macht sich bei vorgerückter Cultur selbst im bürgerlichen Leben bemerkbar. Durch die Berücksichtigung dieser noch übrigen Ungleichheit der Tage wurde man endlich auf den Unterschied zwischen der *wahren* und der *mittleren Sonnenzeit* geführt, von welchen die letzte die gesuchte, eigentlich nothwendige, gleichförmig fortschreitende Zeit ist, die daher auch allein als das Mafs aller Zeiten gebraucht wird, wie bereits oben[2] gesagt worden ist.

Die oben erwähnten Räderuhren können in zwei wesentlich von einander verschiedene Arten getheilt werden, je nach-

---

1 S. Plinius Hist. Nat. a. a. O.

2 S. Art. *Mittlerer Planet* und *Sonnenzeit*.

dem sie nämlich durch die Wirkung der Schwere, mittelst eines Gewichts, oder durch die Kraft der Elasticität, mittelst einer metallenen Feder, in Bewegung gesetzt werden. Die erste Geschichte dieser Uhren ist in grofse Dunkelheit gehüllt, so dafs es unmöglich ist, den eigentlichen Erfinder derselben mit Sicherheit anzugeben. Die Benennung *Uhr* oder *horologium* (von *ὥρα* Zeit und *λόγος* Wort, Sprache u. s. w.) kommt wohl schon sehr früh vor, aber nicht mit der Bestimmtheit, dafs darunter nicht, auch Sonnen- oder Wasseruhren verstanden seyn könnten. Der erste Schriftsteller, der von einer Maschine spricht, welche die Stunden durch Schläge an einer Glocke angab, scheint Dante (geb. 1265, gest. 1321) zu seyn, so dafs demnach *Schlaguhren* in Italien schon zu Ende des 13ten Jahrhunderts bekannt gewesen seyn müfsten. Im 16. Regierungsjahre Eduard's I. von England, d. h. im Jahre 1288, wurde einem englischen Mechaniker ein Privilegium auf die Verfertigung einer Uhr für den berühmten Uhrthurm bei Westminster-Hall ertheilt. Unter der Regierung von Heinrich VI., die mit 1422 begann, soll der König seine Uhr dem William Warby, Dechant von St. Stephans, zum Aufheben oder Aufziehn gegen eine bestimmte Besoldung übergeben haben. Die Marienkirche in Oxford wurde im J. 1523 mit einer Thurmglocke versehn, die aus einer den Studenten dieser Universität aufgelegten Taxe angeschafft worden war. Dafs in Deutschland, besonders in Nürnberg, die Uhrmacherei schon im Anfange des 16ten Jahrhunderts fröhlich blühte, ist bekannt und kann z. B. in Beckmann's Geschichte der Erfindungen umständlich nachgesehn werden.

Die frühesten verläfslichen Nachrichten von Räderuhren scheinen die folgenden zu seyn. Die erste Thurmuhr von Bologna soll vom Jahre 1356 seyn. Heinrich von Wyck oder von Vic, ein Deutscher, stellte in dem später sogenannten Thurme des Palastes Carl's V. um das Jahr 1364 eine Uhr auf. In Rymer's „*Foedera*" wird des Schutzes erwähnt, den Eduard III. drei holländischen Uhrmachern, die er im J. 1368 aus Delft nach England berief, angedeihen liefs. Conrad Dasypodius giebt umständliche Nachricht von einer um das Jahr 1370 zu Strafsburg errichteten Uhr. Nach Froissart's Bericht hatte Courtray gegen dieselbe Zeit (1370) eine Uhr, die bald darauf (im J. 1382) der Herzog von Burgund ihr abgenommen

hat. Lehmann erzählt ebenfalls von einer im J. 1395 zu Speier aufgestellten Thurmuhr; eine ähnliche hatte Nürnberg im J. 1462, Auxerre im J. 1483 und Venedig im J. 1497. Nach einem Briefe des Ambrosius Camaldulensis[1] an Nicolaus von Florenz waren gegen das Ende des 15ten Jahrhunderts die Uhren auf dem Continente schon etwas sehr Gewöhnliches, und dasselbe scheint auch von England zu gelten, da wir in dem berühmten engl. Dichter Chaucer (geb. 1328, gest. 1400) folgende Verse finden:

> Full sickerer was his crowing in his loge,
> As is a clock, or any abbey orloge.

Wie es auch mit der Epoche der eigentlichen Erfindung dieser Instrumente sich verhalten mag, so kann man wohl immer der Meinung von Ferd. Berthoud beitreten, eines innigen Kenners und des besten Schriftstellers über diesen Gegenstand, dafs eine solche Uhr, wie die oben erwähnte von Heinrich von Wyck, nicht die Erfindung eines einzigen Menschen seyn kann, sondern dafs sie ein Product mehrerer vorhergehenden, geringeren Erfindungen ist, die zum Theil wenigstens sehr alten Zeiten angehören mögen. So waren z. B. Räderwerke verschiedener Art schon zu des Archimedes Zeiten bekannt; die, wenn gleich nur rohe, Regulirung der durch die Schwere erzeugten Geschwindigkeit durch Hülfe eines Schwungrades, wie sie an Vorrichtungen zu gemeineren Zwecken, z. B. an unseren Bratenwendern, erscheint, ist so einfach, dafs sie einem mäfsig mechanischen Talente nicht lange verborgen bleiben konnte; dasselbe gilt auch wohl von dem sogenannten Ausheber und Gesperre unserer Uhren, das in seinem Principe ebenfalls sehr einfach ist. Die so leicht zu bemerkende accelerirende Bewegung der frei fallenden Körper konnte ein aufmerksames Talent ohne Mühe auf die Idee der Unruhe führen, womit die Entdeckung einer Art Balancier beinahe nothwendig verknüpft scheint. Sind nicht selbst noch in unsern Zeiten, etwa seit den letzten Decennien des 18ten Jahrhunderts, die vielen Verbesserungen unserer Uhren und besonders unserer Chronometer nur nach und nach durch das günstige Zusammenwirken mehrerer, ja sehr vieler der ausgezeichnetsten Künstler entstanden?

---

1 Lib. XV. Epist. IV.

Es wird den Lesern nicht uninteressant seyn, die Einrichtung kennen zu lernen, die der oben erwähnte H. von Wyck so früh schon seiner Unruhe gegeben hat, durch die er den Gang seiner Uhr zu reguliren suchte. Die Zähne des Kronrads FG wirkten auf zwei schmale Hebelplatten D und E ein, die an einem Stabe oder an einer geradlinigen Spindel EDC befestigt waren, an welcher Spindel in C die darauf senkrecht stehende Unruhe oder der *Abgleicher* AB aufstand, welche letztere an ihren Endpuncten A und B mit Gewichten beschwert war. Um die Uhr schneller oder langsamer gehn zu machen, durfte er nur diese Gewichte näher zu oder weiter von dem Mittelpuncte C der Unruhe AB schieben.

Fig. 150.

So unvollkommen diese Uhren auch ohne Zweifel gewesen sind, so findet man doch, dafs sie schon um das Jahr 1484 von Walther in Nürnberg und bald nach ihm von dem berühmten Wilhelm, Landgrafen von Hessen, zu astronomischen Beobachtungen angewendet worden sind, und so grofs mufs der Nutzen erschienen seyn, den man von diesen Instrumenten ziehn wollte, dafs Gemma Frisius um das Jahr 1530 schon den Gebrauch einer ähnlichen, aber tragbaren Uhr zur Bestimmung der geographischen Länge auf dem Meere vorzuschlagen wagen konnte. Der berühmteste praktische Astronom seiner Zeit, Tycho de Brahe, besafs vier Räderuhren, die er auf seinem Observatorium aufgestellt hatte und die, wie er selbst erzählt, Stunden, Minuten und Secunden angaben. Die gröfste von ihnen hatte nur drei Räder, aber der Durchmesser eines dieser Räder betrug volle drei Fufs und trug 1200 Zähne auf seiner Peripherie. Diese Angabe allein ist schon ein Beweis der grofsen Unvollkommenheit der Uhren aus jener Zeit, auch klagt Tycho öfter über die Unverläfslichkeit derselben, besonders über solche, die ihm vom Wetter abzuhängen schienen, ohne, wie es scheint, den näheren Grund dieser Anomalie angeben zu können, der offenbar in der Temperatur lag. Im Jahre 1577 hatte Möstlin, der Lehrer Kepler's, eine Uhr, die 2528 Schläge in einer Stunde machte, und indem er die Anzahl dieser Schläge während der Zeit beobachtete, in welcher die Sonne durch einen Meridianfaden ging, fand er den Duchmesser dieses Gestirns gleich 0° 34′ 13″. Dieselbe Beobachtungsart dieses Durchmessers haben

die Astronomen bis auf den heutigen Tag als die beste beibehalten.

Einer der ersten Zusätze, welche später diese Instrumente aufser ihrer unmittelbaren Zeitbestimmung so häufig erhielten, bestand in dem sogenannten *Wecker*, der auch jetzt noch im Gebrauch ist, obschon nicht zu dem Zwecke, wozu er zuerst gebraucht wurde, nämlich um die Mönche in den Klöstern zu ihren Morgengebeten aufzuwecken.

Der eigentliche Ursprung der tragbaren Uhren ist auch nicht mehr mit Genauigkeit zu bestimmen. Gewifs ist, dafs sie schon vor dem Jahre 1544 bekannt gewesen sind, da in diesem Jahre die Uhrmachergilde in Paris von Franz I. ein Privilegium erhielt, durch welches allen Andern aufser ihrer Zunft verboten wurde, solche Uhren zu verfertigen. Der Erfindung dieser tragbaren Uhren mufste die Entdeckung der *Metallfeder* (statt des Gewichtes) vorhergehn, und diese Feder konnte wieder nicht gut angewendet werden, wenn nicht auch diejenige Einrichtung bekannt war, die wir jetzt mit der Benennung der *Schnecke* bezeichnen. Diese beiden Entdeckungen, der Feder und der Schnecke, änderten aber die Einrichtung und Form und selbst den Gebrauch der Uhren in solchem Mafse, dafs sie als in der Geschichte der Uhrmacherkunst Epoche machend angesehn werden müssen. Zwar hat man selbst in den neuesten Zeiten Taschenuhren ohne Schnekken verfertigt, indem man die Schnecke durch eine ungleich dicke oder ungleich breite Feder zu ersetzen suchte. Besonders in Frankreich, wo doch die Uhrmacherkunst unter Breguet so grofse Fortschritte gemacht hat, suchte man häufig diese Schnecke entbehrlich zu machen. Allein man darf nur wenig mit der Organisation dieser Instrumente bekannt seyn, um einzusehn, dafs es unverständig und thöricht ist, ein so einfaches und sicheres Mittel ohne allen Grund verschmähn zu wollen. *This practice*, sagt der alte Arnold, dessen Meinung hierüber wohl von grofsem Gewichte ist, *is a departure from the first principles, which can never be tolerated, where accuracy of performance is required.* Etwas Aehnliches begegnete auch den französischen Künstlern darin, dafs sie die Aufhängung ihrer Pendel auf scharfen Stahlschneiden allen übrigen Suspensionsarten lange Zeit hartnäckig vorgezogen haben, während die Engländer ihre Pendel bekannt-

lich an eine elastische Stahlfeder hängen, deren oberes Ende in einer Klemme an die Wände der Uhr befestigt ist. Der berühmte Berthoud in Paris beharrte bei seinen Stahlschneiden bis an seinen Tod, so viel Widersprüche er auch deshalb zu bekämpfen hatte. Nun ist aber für sich klar, dafs ein Pendel, wenn es durch die Einwirkung äufserer, nicht zu vermeidender Kräfte nicht merklich gestört werden soll, ein beträchtliches Gewicht haben müsse, wie denn Uhren mit sehr leichten Pendeln auf hochgebauten Observatorien bekanntlich ganz unbrauchbar sind, wenn sie auch sonst die besten ihrer Art wären. Für ein so gewichtiges Pendel aber, das 20, 30 und mehr Pfund wiegen mufs, kann eine feine Stahlschneide unmöglich ein angemessener Aufhängeapparat seyn.

Dieses war der Zustand der Uhrmacherkunst zu der Zeit, als Galilei in einer Kirche zu Florenz die Entdeckung machte, dafs eine an einer Schnur von dem Dome der Kirche herabhängende Lampe, wenn diese Schnur aus ihrer senkrechten Lage gebracht wurde, Schwingungen machte, die für grofse oder kleine Schwingungsbogen nahe in gleichen Zeiten vor sich gingen, d. h. also, dafs die Schwingungen eines Pendels, auch bei verschiedenen, übrigens geringen Amplitüden, isochron sind. Er machte diese Entdeckung im J. 1639 zu Paris bekannt, und obschon er selbst sie nicht unmittelbar auf die Construction der Uhren anwendete, so machte sie doch Epoche in der Geschichte der Kunst, indem sie die eigentlichen *Pendeluhren* erzeugte, die in den neueren Zeiten so sehr vervollkommnet wurden und die jetzt noch den Vorzug vor allen andern Uhren haben. Diese Entdeckung führte bald einen gelehrten Kampf zwischen Galilei und Huyghens herbei, und die Frucht dieses Streites war des Letztern berühmtes Werk: De Horologio oscillatorio, so wie auch die erste eigentliche Pendeluhr von diesem Gelehrten noch vor dem Jahre 1658 verfertigt worden ist. Es wird wohl nicht leicht auszumachen seyn, ob der Letzte jene Idee von dem Isochronismus des Pendels selbst gefunden oder von Galilei geborgt hat, aber dafür ist es desto gewisser, dafs Huyghens diese Idee zuerst auf eine meisterhafte und wahrhaft wissenschaftliche Weise angewendet und ins Leben gerufen hat. Bemerken wir übrigens, dafs, während auf dem Festlande Huyghens allgemein als der Erfinder der Pendeluhren betrachtet wird, die Eng-

länder diese Ehre ihrem Landsmann RICHARD HARRIS vindiciren, der schon im Jahre 1641 eine Uhr mit einem langen Pendel verfertigt haben soll.

Bald nach dieser Epoche wurde auch die oben erwähnte Idee des GEMMA FRISIUS von demselben HUYGHENS wieder aufgenommen und zur Verfertigung von Feder- oder Seeuhren benutzt. Er war es ferner, der RICHER's bekannte Beobachtung, dafs die Pendeluhren am Aequator langsamer gehn, als in gröfseren Breiten, durch die Abplattung der Erde an ihren Polen erklärte, wodurch er uns die eigentliche Gestalt der Erde kennen lehrte. Derselbe zeigte durch sehr scharfsinnige geometrische Untersuchungen, dafs GALILEI's Entdekkung des Isochronismus der Schwingungen nur sehr kleinen Kreisbogen, nicht aber, wie jener glaubte, jeder Amplitüde des Bogens zukomme, dafs sie aber dafür in ganzer Strenge für jeden Bogen der Cykloide gelte. Indem er zugleich die Evolute dieser Curve, die bekanntlich wieder eine Cykloide ist, bestimmte, wendete er dieselbe auf eine sehr sinnreiche Art auf die Pendeluhren an. In der Folge hat man diese Anwendung wieder verlassen, weil dadurch andere Fehlerquellen erzeugt werden, die in praktischer Hinsicht vor Allem vermieden werden mufsten, und weil es dem Künstler so leicht ist, das Pendel nur in kleinen Amplitüden schwingen zu lassen, für welche jener Isochronismus so nahe statt hat, als es für die Praxis nur immer gefordert werden kann, da es bei den Uhren ohnehin nur auf stets gleiche Amplitüden ankommt.

Nachdem auf diese Weise die eigentliche Basis der neuen Kunst für alle Zeiten gelegt war, glaubte man, schon auf die blofsen Verzierungen des Gebäudes selbst, das doch noch nicht vorhanden war, denken zu müssen. Die Uhrmacher, die nach HUYGHENS folgten, legten sich auf Künsteleien, wodurch die eigentliche Kunst, wenn nicht zurückgesetzt, doch auf längere Zeit zum Stillstande gebracht wurde. So erfand BARLOW in London im J. 1676 die im Allgemeinen noch jetzt gewöhnliche, ziemlich complicirte Maschinerie der *Repetition,* durch welche man die letztverflossene Stunde mittelst des Anziehens einer Schnur wieder schlagen lassen kann. Ihm folgte in solchen und ähnlichen Dingen der zu seiner Zeit berühmte Uhrmacher QUARE in London und JULIAN LE ROY, COLLIER,

Larcay, Thiout in Frankreich u. A. Damals entstanden auch viele Uhren, welche die wahre, nicht die mittlere Sonnenzeit anzeigten. In solchen mehr sonderbaren als nützlichen Beschäftigungen zeichneten sich Sully in England, der Benedictiner Alexander im J. 1698, dann le Bon und le Roy im J. 1717 in Frankreich, ferner L'Admiraud, Passemant, Rivar, Graham, Enderlin, Kriegseisen u. A. aus. Eine andere, viel wichtigere Erfindung für die eigentliche Kunst war die der *Ankerhemmung* oder des sogenannten Stofswerkes der Uhr, deren Urheber der Uhrmacher Clement zu London um das Jahr 1680 war, wie selbst Berthoud in Paris bezeugen mufste. Diese wesentliche Verbesserung führte unmittelbar auf die so vortheilhafte Aufhängung des Pendels mittelst einer dünnen Stahlfeder, die ebenfalls von Clement zuerst angewendet wurde. Beide Entdeckungen sind übrigens auch von dem sinnreichen Dr. Hooke in England für sich selbst reclamirt worden. Die Secundenpendel, mit diesen beiden Apparaten versehn, wurden damals in England *the royal pendulums* genannt.

Mit dem Anfange des achtzehnten Jahrhunderts trat eine andere Epoche der Kunst ein, die zu einer sehr wesentlichen Verbesserung derselben beitrug. Schon seit funfzig Jahren kannte man die starke Aenderung, die alle Metalle durch die Einwirkung der Hitze und Kälte erleiden. Das Bedürfnifs, die Länge des Pendels und dadurch den Gang der Uhren von dieser Einwirkung der Temperatur unabhängig zu machen, wurde ebenfalls sehr deutlich gefühlt und zum astronomischen Gebrauche besonders waren die bisherigen Uhren noch immer so gut als unnütz. Aber erst im J. 1715 verfiel Geörg Graham auf ein Mittel, diesem Umstande, der auf die ganze Kunst hemmend einwirkte, zu begegnen. Es ist sonderbar, dafs dieses sein Mittel zugleich dasjenige ist, was noch jetzt bei Pendeluhren für das beste anerkannt wird, obschon man seitdem noch gar viele andere vorgeschlagen hat. Graham substituirte nämlich statt des schweren linsenförmigen Körpers, den man bisher an die Pendelstange zu befestigen pflegte, ein Gefäfs mit Quecksilber gefüllt, wodurch er den Suspensions- und Oscillationspunct des Pendels immer in demselben Abstande von einander zu erhalten suchte, indem z. B. durch die Wärme die Pendelstange abwärts, das

Quecksilber im Gefäſse aber aufwärts verlängert wird. Jedoch gelang es erst dem John Harrison, die erste Uhr mit einer vollkommenen Compensation zu verfertigen, wofür er auch vom Parlamente ein Ehrengeschenk von 20000 L. St. erhielt, die seiner gedrückten häuslichen Lage aufhalfen, obschon er sie gröſstentheils wieder der weitern Vervollkommnung seiner Kunst zuwendete. Bald darauf trat auch Graham mit seinen Compensationspendeln auf, wobei die Pendelstangen aus mehrern Stäben von verschiedenen Metallen bestanden, deren Ausdehnungen durch die Wärme sich gegenseitig aufheben sollten, wie wir weiter unten sehn werden.

Auſser den erwähnten, wesentlichen und Epoche machenden, Verbesserungen sind im Laufe des vergangenen und selbst des gegenwärtigen Jahrhunderts noch so viele andere, minder wichtige hinzugefügt worden, daſs ihre umständliche Aufzählung allein einen bedeutenden Band füllen könnte. Indem wir sie in dieser kurzen Geschichte der Kunst übergehn, begnügen wir uns mit der Anführung der vorzüglichsten Künstler, welchen wir diese Verbesserungen verdanken. Diese sind Grignon, Mudge, Cummins, Nicholson, Hardly, Harrison in England, Julian und Peter le Roy, Sully, Du Tertre, Bethune, Lepaute, Regnauld, Deparcieux, Cassini, Amant, Robin, Berthoud u. A. in Frankreich, nebst Since, Graham, Ellicot, Troughton, Smeaton, Reid, Ritchie, Ward, Molineux, Kater u. A.

Die Geschichte der Taschen- oder Federuhren ist innig mit jener der Pendel- oder Gewichtuhren verbunden, und die meisten der Künstler, welche sich um die eine Gattung dieser Uhren Verdienste erworben haben, sind auch als Beförderer der andern anzusehn. In der That sind beide Gattungen von Zeitmessern bloſs darin wesentlich verschieden, daſs die Regulirung des Ganges bei der einen durch das Pendel, bei der andern aber durch den Balancier geschieht und daſs die bewegende Kraft dort das Gewicht und hier die Feder ist. Es ist schwer, den Künstler anzugeben, der zuerst eine Federuhr in einem so kleinen Raume gemacht hat, daſs man sie bequem in der Tasche tragen konnte. Gewiſs waren diejenigen kleineren Uhren, die man vor Huyghens und Hooke machte, noch sehr unvollkommene Maschinen, da die Unruhe und die Feder für die tragbaren Uhren ebenso wichtig und

unentbehrlich sind, als das Pendel für die Gewichtuhren, wenn sie nur einigermaſsen regelmäſsig gehn sollen. Ein groſses Hinderniſs für Uhren, die längere Zeit mit Genauigkeit gehn sollen, war die Störung, welche diese Maschinen durch das Aufziehn derselben erleiden. Schon Huyghens war darauf bedacht, bei seinen Pendeluhren dieses Hinderniſs zu überwinden. Er gebrauchte dazu eine sogenannte endlose Schnur, mit zwei sehr ungleichen Gewichten beschwert, die sich um zwei Walzen wand. Später wendete man zu diesem Zwecke einen hebelartigen Apparat an, der aber ebenso wenig, als jene Vorrichtung, genügend gefunden wurde. Endlich kam Harrison auf die Einrichtung, die noch jetzt allgemein gebraucht wird, deren nähere Beschreibung aber hier zu umständlich seyn würde und ohne mehrere Zeichnungen nicht gut deutlich gemacht werden kann, während sie jeder Uhrmacher, mit dem Apparate in der Hand, sogleich Jedem deutlich machen wird. Dasselbe gilt in noch viel höherem Grade von dem sogenannten Repetirwerke bei Schlaguhren, durch welches man mittelst einer angezogenen Schnur das Schlagwerk die letztvergangene Stunde mit ihren Vierteln wiederholen läſst, welche Vorrichtung besonders bei Taschenuhren sehr zusammengesetzt und künstlich ist, wo nämlich statt der angezogenen Schnur ein Druck des Gehängezapfens der Uhr auf die Feder derselben substituirt wird.

Nach diesen vorläufigen historischen Notizen wollen wir nun zu der Beschreibung der Einrichtung der Räderuhren selbst übergehn, so weit diese nicht den eigentlichen Uhrmacher, sondern denjenigen angeht, der nicht gewohnt ist, ein Instrument zu gebrauchen, mit dessen Construction er nicht wenigstens im Allgemeinen näher bekannt ist.

Der Zweck jeder guten, zum wirklichen Gebrauche, nicht bloſs zu Tändeleien oder zur Befriedigung unnützer Wünsche bestimmten Uhr ist, eine vollkommen gleichförmige und (durch das Zifferblatt) leicht abzumessende Bewegung hervorzubringen, mittelst welcher Bewegung sich die Zeit, die ebenfalls gleichförmig fortgeht, genau bestimmen läſst. Jedes an einer Schnur, welche um eine bewegliche Walze gewickelt ist, hängende Gewicht wird, indem es vermöge seiner Schwere herabsinkt, diese Walze um ihre Axe drehen und ein an der-

selben Walze befestigter Zeiger, der sich zugleich mit der Walze dreht, wird auf einem eingetheilten Kreise die Anzahl der Umläufe der Walze und die Theile dieser Umläufe anzeigen. Allein eine solche Vorrichtung wird zu dem Zeitmaſse, welches wir suchen, unbrauchbar seyn. Denn da jenes Gewicht in der ersten Secunde durch 15 Fuſs, in der zweiten durch 45, in der dritten durch 75, in der vierten durch 105 Fuſs u. s. w., kurz da es nicht gleichförmig, sondern mit einer sehr beschleunigten Bewegung fällt, so wird auch die Walze und ihr Zeiger auf dem Zifferblatte sich nicht gleichförmig, sondern mit der Zeit immer schneller bewegen und daher diese Maschine zu einem Zeitmaſse ganz unbrauchbar seyn. Es müſste daher mit der Walze, die durch das Gewicht bewegt wird, noch eine andere Einrichtung verbunden werden, welche das an sich selbst immer schneller herabfallende Gewicht zwingt, auf eine gleichförmige Weise, in jeder Minute so viel als in der andern, zu sinken. Nun ist bekannt, daſs die Körper auf der Oberfläche der Erde, obschon sie, sich selbst überlassen, mit der Zeit immer schneller fallen, doch im ersten Augenblicke nach der Ruhe alle durch denselben Raum, daſs sie z. B. alle in der ersten Secunde durch 15 Fuſs fallen. Wenn man daher ein Mittel besäſse, jenes Gewicht am Ende einer jeden Secunde in seinem Falle einen Augenblick wieder aufzuhalten, so daſs es gleichsam in jeder einzelnen Secunde aus der vorhergehenden Ruhe in eine neue Bewegung gesetzt würde, so müſste dieses Gewicht auch in jeder Secunde wieder durch denselben Raum von 15 Fuſs fallen. Derjenige Körper aber, welcher dieses Aufhalten der Walze nach jeder geendeten Secunde hervorbringen und sie gleich darauf wieder loslassen soll, muſs eine von der eigentlich treibenden Kraft der Uhr (von dem Gewichte) unabhängige und offenbar auch selbst gleichförmige Bewegung haben, weil er eben eine solche Bewegung hervorbringen soll. Dazu bietet sich nun gleichsam auf den ersten Blick das *Pendel*[1] dar, wie denn auch, nach dem bereits oben Gesagten, Huyghens gleich auf diese Verbindung des Gewichts mit dem Pendel verfiel, sobald die isochrone Bewegung desselben durch Galilei bekannt geworden war. Demnach besteht also jede Pendeluhr

1 Vergl. Art. *Pendel.* Bd. VII. S. 304.

aus zwei von einander unabhängigen Bewegungen, die beide aus der allgemeinen Kraft der Schwere entspringen. Die erste ist die unveränderliche, die ganze Maschine treibende Kraft oder das *Gewicht* und die zweite ist die jene erste moderirende Kraft oder das *Pendel.* Jene ist die Triebkraft der Uhr und diese ist der Regulator jener Triebkraft. Die Verbindung dieser beiden Kräfte aber geschieht durch die *Hemmung* (*échappement*) und durch das *Räderwerk.*

Um uns zuerst den Gegenstand ganz einfach vorzustellen, wollen wir das Räderwerk auf einen Augenblick ganz entfernen und blofs Gewicht und Pendel auf irgend eine Art in unmittelbare Berührung versetzt annehmen, so dafs man also zwei (von derselben Kraft der Schwere, aber auf verschiedene Art) in Bewegung gesetzte Körper hat, die gegenseitig auf einander wirken. Nimmt man von einer solchen einfachen Maschine das Gewicht oder die treibende Kraft weg, so wird das Pendel zwar noch einige Zeit schwingen, aber durch die Reibung und den Widerstand der Luft sehr bald zum Stillstande gelangen. Hängt man aber das Pendel oder die moderirende Kraft aus, so wird das Gewicht, wie gesagt, mit beschleunigter Bewegung herabstürzen und die ganze Uhr wird ebenfalls nur zu bald still stehn. Demnach wird die Fortdauer der Schwingungen durch den beständigen Druck des Gewichts, das gleichförmige Sinken dieses Gewichts aber durch das Pendel bewirkt, oder mit andern Worten: das Pendel wird von dem Gewichte angetrieben, damit es nicht still stehe, und das Gewicht im Gegentheile wird von dem Pendel im Zaume gehalten, damit es nicht zu laufen anfange, sondern immer gleichförmig tiefer sinke. Das Mittel aber, durch welches die Kraft des Gewichtes dem Pendel und die regelmäfsige Bewegung des Pendels dem Gewichte mitgetheilt wird, ist die *Hemmung* (*échappement*). Die Künstler haben verschiedene Arten von Hemmungen ausgedacht. Eine der einfachsten ist der sogenannte *englische Haken*, den wir nun näher beschreiben wollen [1].

Durch die beiden Wände, welche das eigentliche Uhrwerk einschliefsen, geht eine dünne Stange von Stahl, an deren einem Ende, hinter jenen beiden Wänden, das Pendel auf-

---

1 Vergl. Art. *Rad.* Bd. VII. S. 1161.

gehängt und an welcher zugleich, zwischen diesen Wänden, ein senkrecht stehender Kreisbogen von Metall befestigt ist, der sich in zwei Haken endet, die in die Zähne eines auf jener Stange senkrecht aufsitzenden Rades (des *Steigrades*) eingreifen. Der erwähnte metallene Bogen ist mit dem Pendel unmittelbar verbunden, so dafs er sich mit diesem zugleich auf und nieder bewegt und von seinen beiden Endhaken immer der eine höher als der andere steht, wenn das Pendel selbst in seinen Oscillationen hin und her geht. Um die erwähnte metallene, walzenförmige Stange kann man sich zugleich die Schnur aufgewunden denken, welche das Gewicht trägt. Wenn nun das Pendel auf der rechten Seite seine gröfste Höhe erreicht, greift der eben dadurch niedergebogene linke Haken der Hemmung in das von dem Gewichte umgetriebene Steigrad und hält dadurch einen Zahn, folglich auch das Gewicht selbst einen Augenblick auf. Wenn aber gleich darauf das Pendel seiner Natur nach auf die linke Seite geht, so hebt sich dadurch der linke Haken, der von diesem Haken früher ergriffene Zahn wird frei und das sonach befreiete Rad fängt an sich zu drehn. Allein diese Drehung währt nicht lange, nicht einmal um einen ganzen Zahn des Steigrades. Denn während das Pendel auf die linke Seite geht, nähert sich der früher erhobene, nun aber sich wieder senkende rechte Haken der Hemmung dem ihm gegenüberstehenden Zahne des Steigrades auf halbem Wege und hält dadurch diesen Zahn ebenfalls auf. Nachdem auf diese Weise das Pendel zwei volle Schwingungen vollendet und wieder, wie im Anfange, seine gröfste Höhe auf der rechten Seite erreicht hat, greift der linke Haken erst in den zweiten Zahn, so dafs also das Pendel zweimal so viel Schwingungen macht, als das Steigrad Zähne hat.

Dafs bei dieser Einrichtung die Gestalt der beiden Haken (oder die Gestalt der beiden Endpuncte des hemmenden Bogens) nicht gleichgültig sey, ist für sich klar, und die Künstler haben sich lange bemüht, die beste Gestalt dieser Haken aufzufinden. Man hat sie zuerst so geformt, dafs sie, während sie den Zahn des Rades aufhielten und sich mit dem Pendel bewegten, zugleich diesen Zahn etwas zurückschoben, was man die *rückfallende Hemmung* (*échappement à recul*) nannte. Später gab man den Haken die Gestalt, damit sie

genau über oder unter dem Zahne des Rades wegschleiften und diese Zähne aufhielten, ohne sie zu bewegen, und dieses ist die sogenannte *ruhende Hemmung* (*échappement à repos*), die der berühmte GRAHAM eingeführt hat und die allgemein für viel besser als jene erste gehalten wird. Indessen haben doch beide Hemmungen den Nachtheil, dafs sie einer starken Reibung unterworfen sind und dafs die beständige gegenseitige Einwirkung des Hakens und des Zahns die freie Bewegung des Pendels stört, woraus bei der geringsten Unvollkommenheit oder Unordnung der Uhr eine schädliche, ungleichförmige Bewegung derselben entstehn mufs. Obschon aber dem Pendel seine verlorne Bewegung nur durch die Kraft des Gewichtes (also mittelst der Hemmung und des Steigrades) wieder gegeben werden kann, und obschon auch von der andern Seite das Steigrad nur durch das Pendel gezwungen werden kann, nach jeder doppelten Schwingung um einen Zahn fortzurücken (oder das Gewicht immer um dieselbe Gröfse fallen zu lassen), so sollte doch dieses gegenseitige Helfen und Aufhalten so eingerichtet werden, dafs beide Kräfte nicht länger und nicht stärker auf einander einwirken, als jene beiden Zwecke nothwendig erfordern. Diesen Zweck aber hat man durch die jetzt allgemein angenommene *freie Hemmung* (*échappement libre*) zu erreichen gesucht, d. h. durch eine eigene Sperrung des Steigrades, die dieses Rad in seiner Bewegung nur ebenso lange aufhält, bis diese Sperrung von dem Pendel, am Ende jeder Schwingung, aufgehoben, aber auch gleich darauf wieder in seine Rechte eingesetzt wird. Auf diese Weise werden durch die freie Hemmung jene Hülfe und zugleich jenes Aufhalten mittelst zwei verschiedener Berührungen des Hemmungsbogens mit dem Steigrade erreicht, deren nähere Erklärungen man übrigens am besten in den Werkstätten der Uhrmacher finden wird.

Wir wollen nun auch das *Räderwerk* näher betrachten, durch welches das Pendel, das Gewicht und die Zeiger der Uhr unter einander verbunden sind.

Dieses Räderwerk besteht aus mehreren kreisförmigen Scheiben, deren jede an ihrer Peripherie gezahnt ist und auf einer ebenfalls gezahnten Axe (dem *Getriebe*) befestigt wird, so dafs, wenn die Maschine im Gange ist, jede Scheibe (oder jedes Rad) sich in derselben Zeit umdreht, wie ihr Getriebe.

Die Anzahl der Zähne des Rades ist immer gröfser als die seines Getriebes und die Zähne eines jeden Rades greifen in die Zähne des Getriebes des nächstfolgenden Rades ein, so dafs also dieses zweite Getriebe (und daher auch das mit ihm verbundene zweite Rad) sich schneller bewegen wird, als das erste Rad, und zwar um so vielmal schneller, so vielmal die Anzahl Zähne des zweiten Getriebes in der Anzahl Zähne des ersten Rades enthalten ist [1]. Hat also das erste Rad, welches kein Getriebe hat, a Zähne und das Getriebe des zweiten Rades β Zähne, so wird das zweite Rad $\frac{a}{\beta}$ mal sich umdrehn, während das erste nur einmal sich um die Axe seiner Welle dreht. Nehmen wir ferner an, dafs dieses zweite Rad b Zähne an seiner Peripherie hat und in das Getriebe von γ Zähnen eines dritten Rades eingreift, so wird ebendieses dritte Rad sich $\frac{b}{\gamma}$ mal drehn, während das zweite sich nur einmal dreht, und da nach dem Vorhergehenden das zweite sich $\frac{a}{\beta}$ mal schneller als das erste dreht, so wird sich das dritte Rad $\frac{ab}{\beta\gamma}$ mal drehn, während sich das erste nur einmal dreht. Hat ferner das dritte Rad c Zähne und greift es in das Getriebe von δ Zähnen eines vierten Rades ein, so wird dieses vierte Rad sich $\frac{c}{\delta}$ mal schneller, als das dritte, also $\frac{bc}{\gamma\delta}$ mal schneller als das zweite und daher auch $\frac{abc}{\beta\gamma\delta}$ mal schneller als das erste drehn u. s. w. Man sieht hieraus, dafs man durch sehr mannigfaltige Verbindungen der Anzahl der Räder sowohl, als auch der Anzahl der Zähne dieser Räder und der ihrer Getriebe, nach Willkür irgend eine gegebene Geschwindigkeit des letzten Rades erhalten kann. Soll z. B. das vierte Rad sich tausendmal schneller drehn als das erste, so hat man

$$\frac{abc}{\beta\gamma\delta} = 1000$$

---

1. S. Art. *Rad.* Bd. VII, S. 1151.

und dieser Gleichung läfst sich auf unzählige Arten Genüge thun. So hat man z. B.

$$\frac{30 . 60 . 120}{4 . 6 . 9} = 1000,$$

so dafs also die drei ersten Räder in irgend einer willkürlichen Ordnung 30, 60, 120, und die Getriebe der drei letzten Räder wieder in willkürlicher Ordnung 4, 6, 9 Zähne haben können. Ebenso hat man aber auch

$$\frac{20 . 40 . 150}{3 . 5 . 8} = 1000 \text{ und } \frac{30 . 50 . 80}{4 . 5 . 6} = 1000 \text{ u. s. w.}$$

Durch ähnliche Anordnungen kann man auch die Geschwindigkeit des letzten Rades vermindern, wenn man nicht, wie zuvor, das erste Rad, welches dort kein Getriebe hatte, in das Getriebe des zweiten eingreifen läfst, sondern wenn man diesem ersten Rade auch ein Getriebe giebt und dann dieses Getriebe in die Zähne des zweiten Rades eingreifen läfst. Hat z. B. das erste Rad a Zähne und hat sein Getriebe α Zähne, hat ferner das zweite Rad b und sein Getriebe β, hat das dritte Rad c und sein Getriebe γ Zähne u. s. w., so wird das zweite Rad $\frac{a}{\alpha}$ mal langsamer gehn als das erste, das dritte $\frac{b}{\beta}$ mal langsamer als das zweite, also auch $\frac{a b}{\alpha \beta}$ mal langsamer als das erste, und ebenso wird das vierte Rad $\frac{c}{\gamma}$ mal langsamer als das dritte, $\frac{b c}{\beta \gamma}$ mal langsamer als das zweite, $\frac{a b c}{\alpha \beta \gamma}$ mal langsamer als das erste gehn u. s. w. Jenes ist der Fall bei unsern *Mühlen* und bei allen den Maschinen, wo man eine gegebene Geschwindigkeit vermehren will, bei den Uhren aber tritt der zweite Fall ein, da es hier darauf ankommt, die Stärke der bewegenden Kraft des Gewichtes (oder der Feder bei den Taschenuhren) zu mäfsigen und daher die durch diese Kraft unmittelbar erzeugte Geschwindigkeit zu vermindern.

Da man eine gegebene Geschwindigkeit (wie z. B. eine tausendmal gröfsere des letzten Rades als die des ersten in dem vorhergehenden Beispiele) auf unzählig verschiedene

Weisen erhalten kann, so ist es wichtig, diejenige zu kennen, durch welche man den vorgelegten Zweck auf die einfachste oder vortheilhafteste Art, z. B. durch die geringste Anzahl von Rädern und Getrieben, erhalten kann. Diesen Zweck, der auch sonst bei niedern physikalischen Versuchen oft vorkommt, erreicht man bekanntlich durch die sogenannten *Kettenbrüche*, und in der That gelangte auch Huyghens bei einer ähnlichen Gelegenheit (bei seiner Verfertigung eines Planetolabiums durch ein Räderwerk) zuerst auf die merkwürdige Theorie dieser Brüche, von welchen wir hier nur das zur Anwendung unmittelbar Nothwendige kurz mittheilen wollen.

Ein *Kettenbruch* ist ein Bruch, dessen Nenner aus einer ganzen Zahl und einem gewöhnlichen Bruche besteht, welches letzten Bruches Nenner wieder eine ganze Zahl nebst einem gewöhnlichen Bruche seyn kann u. s. w. Gewöhnlich sind die Zähler dieser Partialbrüche alle gleich der Einheit. So ist z. B. der Bruch

$$\frac{1}{2+\frac{1}{3}} \text{ oder } \frac{3}{7}$$

ein Kettenbruch und zwar von zwei Gliedern. Ebenso ist

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\frac{1}{4}}}$$

ein Kettenbruch von drei Gliedern. Um seinen wahren Werth auf die gewöhnliche Weise auszudrücken, beginnt man seine Reduction von unten nach oben. So ist, wie zuvor:

$$\frac{1}{3+\frac{1}{4}}=\frac{4}{13},$$

also ist auch der gegebene Kettenbruch

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\frac{1}{4}}}=\frac{1}{2+\frac{4}{13}}=\frac{13}{30}.$$

Auf dieselbe Weise erhält man für den viergliedrigen Kettenbruch

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\frac{1}{5}}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\frac{5}{21}}}=\frac{1}{2+\frac{21}{68}}=\frac{68}{157}.$$

Es ist also, wie man sieht, sehr leicht, jeden gegebenen Kettenbruch in einen gewöhnlichen zu verwandeln. Allein oft ist das umgekehrte Verfahren nothwendig, wo man nämlich einen gegebenen gewöhnlichen Bruch in einen Kettenbruch verwandeln will. Zu diesem Zwecke bedient man sich aber des bekannten Mittels, durch welches man zwischen zwei gegebenen ganzen Zahlen den gröſsten gemeinschaftlichen Factor sucht, nämlich der fortgesetzten Division dieser Zahlen und ihrer Reste. Wollte man z. B. den letzten gewöhnlichen Bruch $\frac{68}{157}$ in einen Kettenbruch verwandeln, so hat man zwischen diesen beiden Zahlen 68 und 157 folgende vier auf einander folgende Divisionen

```
68 | 157 | 2
   | 136 |
   |  21 |  68 | 3
         |  63 |
         |   5 | 21 | 4
               | 20 |
               |  1 | 5 | 5
                    | 5 |
                    | 0 |
```

und da die Quotienten dieser vier Divisionen die Zahlen 2; 3; 4; 5 sind, so hat man auch für den gesuchten Kettenbruch den Ausdruck

$$\frac{68}{157} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \frac{1}{5}}}}$$

wie zuvor. In vielen Fällen gehn auch diese Kettenbrüche ohne Ende fort. Wollte man z. B. die bekannte Zahl 3,14159265358979 . . ., die das Verhältniſs der Peripherie des Kreises zu seinem Durchmesser ausdrückt, in einen Kettenbruch verwandeln, so erhielte man durch die fortgesetzte Division der beiden Zahlen

314159265358979 . . .

und

100000000000000 folgende Quotienten

3; 7; 15; 1; 292; 1; 1; 1; 2; 1; 3 . . .

so dafs man daher für die gegebene Zahl den folgenden Kettenbruch erhält:

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}}}} \text{ u. s. w.}$$

Je mehr Glieder dieses Ausdrucks, von den obern Theilen desselben anfangend, man nimmt, desto mehr nähert man sich auch damit der gegebenen Zahl 3,1415926 . . . ohne Ende. So ist z. B. der erste, nur noch sehr wenig genäherte Werth dieser Zahl gleich dem ersten Gliede des Kettenbruchs oder gleich 3; die zwei ersten Glieder aber geben schon genauer

$$3 + \frac{1}{7} \text{ oder } \frac{22}{7},$$

die drei ersten Glieder geben noch genauer

$$3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15}} = 3 + \frac{15}{106} = \frac{333}{106}$$

und ebenso geben die vier ersten Glieder

$$\frac{355}{113} \text{ u. s. w.}$$

Wir haben daher für unsere Zahl die auf einander folgenden immer mehr genäherten Werthe, in der Form von gewöhnlichen Brüchen ausgedrückt,

$$\frac{3}{1};\ \frac{22}{7};\ \frac{333}{106};\ \frac{355}{113};\ \frac{103993}{33102} \text{ u. s. w.}$$

und aufser diesen Brüchen, was das Merkwürdigste ist, giebt es keine andern, welche einfacher oder mit kleineren Nennern ausgedrückt wären und doch dem wahren Werthe näher kämen, als eben sie. So drückt z. B. der Bruch $\frac{22}{7}$ die gegebene Zahl 3,1415926 genauer aus, als jeder andere Bruch, dessen Nenner kleiner als 106 — 7 oder 99 ist, und der Bruch $\frac{355}{113}$ drückt jene Zahl genauer aus, als jeder andere Bruch, dessen Nenner

kleiner als 33102 — 113 oder kleiner als 32989 ist u. s. w. Ferner sind von diesen genäherten Brüchen nach der Reihe der erste zu klein, der zweite zu grofs, der dritte wieder zu klein, der vierte zu grofs u. s. w. So ist

der erste Bruch $\frac{3}{1}$ zu klein,

der zweite $\frac{22}{7} = 3{,}1428$ zu grofs,

der dritte $\frac{333}{106} = 3{,}141509$ zu klein,

der vierte $\frac{355}{113} = 3{,}14159291$ zu grofs u. s. w.,

so dafs demnach der wahre Werth immer zwischen je zwei nächste dieser genäherten Ausdrücke fällt. Man übersieht bald die Anwendung des Gesagten auf unseren Gegenstand, und wie man, um z. B. eine gegebene Geschwindigkeit des letzten Rades zu erreichen, die Anzahl der Zähne bei den mittleren Rädern und Getrieben zu der kleinstmöglichen machen kann, um die verlangte Geschwindigkeit hervorzubringen.

Um den Gebrauch der Kettenbrüche, die überhaupt durch das ganze Gebiet der mathematischen Analysis eine sehr wichtige Rolle spielen, noch durch ein anderes Beispiel zu erläutern, so beträgt bekanntlich die tropische Umlaufszeit der Erde um die Sonne oder das sogenannte *bürgerliche Jahr* der Erde 365 Tage 5 Stunden 48 Min. 50,832 Sec. oder 365,242255 mittlere Sonntage. Da wir nun in unseren Kalendern das Jahr nur in ganzen Tagen zu rechnen gewohnt sind und dasselbe doch auch mehrere kleine Theile oder Brüche des Tages hat, so ist man bekanntlich auf die sogenannte *Einschaltung* verfallen, indem man z. B. mehrere Jahre nach einander zu gemeinen Jahren von 365 ganzen Tagen angenommen und, da diese Jahre gegen das wahre zu klein sind, später von Zeit zu Zeit wieder ein Schaltjahr von 366 Tagen aufgenommen hat. Es entsteht nun die Frage, welche Art der Einschaltung die beste ist. In dem neuen gregorianischen Kalender, der seit dem Jahre 1582 in Europa (die Russen und Türken ausgenommen) allgemein eingeführt ist, soll jedes durch 4 ohne Rest theilbare Jahr ein Schaltjahr von 366 Tagen seyn, mit Ausnahme derjenigen Secularjahre (so werden die-

jenigen genannt, deren zwei letzte Ziffern Nullen sind), die nicht zugleich durch 400 ohne Rest getheilt werden können, welche letzteren, so wie alle übrige nicht genannte, blofs gemeine Jahre von 365 Tagen seyn sollen. So sind demnach die Jahre 1700, 1800, 1900, 2100 . . . in dem Gregorianischen Kalender nur gemeine, aber die Jahre 1600, 2000, 2400 . . . . sind Schaltjahre. Durch diese Einrichtung würde also das Gregorianische Kalenderjahr auf $365\frac{97}{400}$ oder auf 365,2425 Tage gebracht, so dafs daher dieses Kalenderjahr gegen das wahre Sonnenjahr um 0,000245 Tage zu grofs ist. Dieser Unterschied beträgt demnach alle 4082 Jahre einen vollen Tag, ein geringer Fehler allerdings, den man aber doch leicht hätte vermeiden können, wenn man die oben erwähnte Theorie der Kettenbrüche zu Hülfe gerufen hätte. Da nämlich das wahre Jahr von 365,242255 Tagen durch eine Periode von Jahren darzustellen ist, welche nur eine Anzahl von ganzen Tagen enthalten sollen, so wollen wir annehmen, dafs jede solche Periode x gemeine Jahre von 365 und y Schaltjahre von 366 Tagen enthalten soll. Die Anzahl der Tage dieser Periode wird seyn

$$365x + 366y$$

und die Anzahl der Jahre derselben Periode ist $x + y$, so dafs man also auch für die Länge des eigentlichen, durch diese Vertheilung entstehenden Jahres den Ausdruck haben wird

$$\frac{365(x+y)+y}{x+y} = 365 + \frac{y}{x+y},$$

und da dieser Ausdruck gleich dem wahren Jahre oder gleich 365,242255 Tagen seyn soll, so hat man die Gleichung

$$\frac{y}{x+y} = 0{,}242255$$

oder, wenn man diesen Bruch umkehrt[1],

$$\frac{x}{y} = \frac{757745}{242255} = 3{,}127881777.$$

Dieses vorausgesetzt giebt die auf einander folgende Division der beiden Zahlen

1 Nach der vorstehenden Gleichung ist $365 + \frac{y}{x+y} = 365{,}242255$, mithin ist $757745\,y = 242255\,x$.

und

$$\frac{3127881777}{1000000000}$$

nach der Ordnung die folgenden Quotienten

3; 7; 1; 4; 1; 1 u. s. w.

und daraus erhält man den Kettenbruch

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}} \text{ u. s. w.}$$

Die genäherten Werthe dieses Kettenbruches sind, nach der Ordnung,

$$\frac{3}{1};\ \frac{22}{7};\ \frac{25}{8};\ \frac{122}{39};\ \frac{147}{47};\ \frac{269}{86}$$

und diese Werthe geben in derselben Ordnung die Fehler

Tag
— 0,00774; + 0,00085; - 0,000169; + 0,000020; - 0,000018; + 0,0000015,

wo das Zeichen — andeutet, dafs das Jahr dieser Periode um die beigeschriebene Zahl zu grofs ist. Der erste dieser genäherten Brüche oder $\frac{3}{1}$ giebt also eine Periode von 4 Jahren, in welcher auf drei gemeine Jahre ein Schaltjahr kommt, und dieses ist die bekannte von Julius Cäsar aufgestellte Eintheilung unsers alten oder sogenannten *Julianischen Kalenders*, dessen Fehler zu grofs war, um lange beibehalten zu werden. Der zweite Bruch $\frac{22}{7}$ giebt eine Periode von 29 Jahren, in welcher 22 gemeine und 7 Schaltjahre enthalten sind. Der dritte Bruch $\frac{25}{8}$ giebt eine Periode von 33 Jahren mit 25 gemeinen und 8 Schaltjahren, deren Fehler nur 0,000169 Tage, also schon kleiner ist, als der oben erwähnte Fehler 0,000245 T unseres Gregorianischen Kalenders, obschon dieser eine zwölfmal gröfsere Periode von 400 Jahren umfafst. Man hätte daher diesen letzten Cyclus von 33 Jahren mit 8 Schalt-

jahren wählen sollen, und es ist merkwürdig, dafs derselbe Cyclus von den Persern schon in den ältesten Zeiten als der vortheilhafteste erkannt und bei diesem Volke eingeführt worden ist.

Indem wir nach dieser kleinen Ausschweifung wieder zu unserem Gegenstande zurückkehren, wollen wir uns zuerst erinnern, dafs nach dem Vorhergehenden das Pendel einer Uhr zweimal so viele ganze Schwingungen macht, als das Steigrad Zähne hat. Soll daher eine jede Schwingung des Pendels eine Secunde dauern, so mufs man dem Steigrade 30 Zähne geben, dessen Axe durch das Zifferblatt durchführen und darauf einen Zeiger befestigen, der sich im Mittelpuncte eines auf dem Zifferblatte beschriebenen und in 60 Theile getheilten Kreises bewegt. Da nämlich während 60 Schwingungen des Pendels, d. h. während 60 Secunden dieses Rad und auch sein Zeiger sich in seinem Kreise einmal umdreht, so giebt jede Abtheilung dieses Kreises oder jeder Sprung dieses Zeigers eine Secunde, und so erhält man also, blofs durch ein Rad, eine *Secundenuhr*. Allein eine solche Uhr würde für den täglichen Gebrauch derselben den Nachtheil haben, sehr schnell abzulaufen. Man müfste sie sehr oft aufziehn, ja man müfste beinahe fortwährend neben ihr stehn, um die Anzahl der bereits verflossenen Minuten aufzuzeichnen. Dieses zu vermeiden und an einer längere Zeit ohne Aufziehn fortgehenden Uhr auch die Minuten und Stunden zu erhalten, dient das übrige *Räderwerk* derselben, welches wir nun näher angeben wollen, wie es bei einer gewöhnlichen, in der Zeichnung dargestellten Pendeluhr zu seyn pflegt. Die nachfolgende Tabelle enthält die darin befindlichen Räder und Getriebe: Fig. 151.

Räder	Zähne des Rades	Getriebe	Zähne des Getriebes
A Steigrad	30	a	10
B Mittelrad	80	b	12
C Minutenrad	90	c	12
: Minutenwelle	:	h	12
D Wechselrad	36	d	12
E Stundenrad	48	:	:
F Walzenrad	144	f	10
G Monatsrad	100	:	:

Die zwei vordersten Räder D und E ausgenommen sind alle andere auf Axen, wie K, L..., zwischen 2 starken Metallplatten befestigt. Jene zwei aber, die das Zeigerwerk enthalten, sind durch ihre Axen zwischen der vordern dieser 2 Platten und der ihr parallelen Platte MS befestigt und auf dieser letzten Platte liegt das Zifferblatt. Die oben horizontal aufliegende Platte MN trägt an einem ihrer Enden das Pendel NP und in der Mitte T einen halben Kreisbogen (die oben erwähnte *Hemmung*), nämlich den *Haken* oder *Anker*, dessen zwei Endpuncte bei den Schwingungen des Pendels wechselsweise steigen und sinken und dadurch in die Zähne des Steigrades A eingreifen. Bei Q geht durch die hintere Platte die um Q bewegliche *Gabel* QRr, deren unterer Arm Rr durch eine Oeffnung in die Pendelstange XP geht, während ihr oberes Ende bei T an die Ankerwelle geschraubt ist. Durch diese Gabel wird die Kraft, welche die Lippen (Endpuncte) des Ankers von dem abwärts ziehenden Gewichte erhalten, dem Pendel mitgetheilt, und diese mufs gerade nur hinreichen, um den Widerstand zu compensiren, welchen die Bewegung des Pendels erleidet, und letzteres gegen Stillstand zu sichern.

Da das Steigrad A 30 Zähne hat und da jeder Zahn desselben zwei Schwingungen, d. h. zwei Secunden giebt, so geht A in einer Minute einmal ganz um seinen Mittelpunct, daher trägt auch dieses Rad den Secundenzeiger. Das Mittelrad B geht in $\frac{80}{10} = 8$ Minuten um, und das Minutenrad C in $\frac{90}{12} . 8 = 60$ Minuten oder in einer Stunde, daher das Rad C den Minutenzeiger trägt. So wie dieses Rad C, so geht auch sein Getriebe c und die Minutenwelle h in einer Stunde um, da alle drei auf derselben Welle befestigt sind. Das Wechselrad D aber geht in $\frac{36}{12} = 3$ Stunden und das Stundenrad E in $\frac{48}{12} . 3 = 12$ Stunden um, daher auch dieses letzte Rad den Stundenzeiger trägt, der mittelst einer Röhre auf derselben Axe V mit dem Minutenzeiger befestigt ist, so dafs beide Zeiger concentrisch laufen.

Noch ist der Zusammenhang zwischen dem Steigrade A und der bewegenden Kraft des Gewichts näher zu erklären. Die Schnur dieses Gewichtes wird um die Welle K gewunden, an welcher das Walzenrad F mit einer willkürlichen Anzahl von Zähnen befestigt ist. Diese Zähne greifen in das Getriebe c des Minutenrades C ein. Damit das Gewicht nicht

schon in kurzer Zeit zu tief sinkt (was unbequem wäre, da man sonst der Uhr eine zu grofse Höhe über dem Boden geben müfste), so kann man z. B. dem Walzenrade F eine Anzahl von 144 Zähnen geben, während die Walze K, um welche sich die Schnur windet, eine Dicke von drei Zoll im Umfange haben mag. Da nach dem Vorhergehenden das Minutenrad C und sein Getriebe c in einer Stunde umgeht, so wird das Walzenrad F erst in $\frac{144}{12} = 12$ Stunden, also in einem Tage zweimal umgehn oder das Gewicht wird jeden Tag um 6 Zoll sinken. Hat also die Walze K volle 16 Umgänge für die Schnur, so kann die Uhr 8 Tage gehn, ohne aufgezogen zu werden, und sie kann in einer Höhe von 48 Zoll oder 4 Fufs über dem Boden aufgestellt werden. Soll sie noch länger, z. B. volle zwei Monate gehn, so mufs man noch das Monatsrad G hinzufügen, das in das Getriebe f des ersten Walzenrads eingreift, und dann wird die Schnur um die Walze L dieses Monatsrads gewunden. Giebt man z. B. dem Getriebe f eine Anzahl von 10, dem Rade G aber 100 Zähne, so wird, da f in 12 Stunden umgeht, G erst in $12 \cdot \frac{100}{10} = 120$ Stunden, d. h. in 5 Tagen umgehn. Wenn daher die zweite Walze wieder einen Umfang von 3 Zoll und 12 Windungen für die Schnur hat, so wird das Gewicht erst in 5 Tagen um 3 Zoll fallen und die 36 Zoll über dem Boden stehende Uhr 60 Tage ohne Aufziehn fortgehn.

Bei der Art der Aufhängung des Pendels in X mufs alle Reibung so viel als möglich vermieden werden. Wir haben bereits oben von den zwei vorzüglichsten Aufhängemitteln, der Messerschneide und der dünnen Stahlfeder, gesprochen und der letztern den Vorzug eingeräumt. Am untern Ende P der Pendelstange ist ein schwerer Körper angebracht, der die Form einer Linse hat, um den Widerstand der Luft, in welcher sich das Pendel bewegt, leichter zu überwinden. Unter dieser Linse ist gewöhnlich eine Nufs an die Pendelstange geschraubt, auf welcher die Linse ruht. Geht die Uhr zu langsam, so schraubt man die Nufs weiter hinauf, wodurch auch die Linse höher gerückt wird, so dafs dann das Pendel schneller schwingt. Dasselbe Verfahren wendet man auch an,

um eine nach mittlerer Zeit gehende Uhr in eine nach Sternzeit gehende zu verwandeln.

Nach dieser Erklärung der Pendel- oder Gewichtuhren wird sich nun auch die Einrichtung der *Feder*- oder *Taschenuhren* leicht übersehn lassen. Die bewegende Kraft, welche dort die Schwere des Gewichts war, ist hier die Elasticität einer dünnen, breiten *Stahlfeder*, welche um die unbewegliche Axe der Trommel H aufgewunden wird, indem ihr inneres Ende an dieser Axe, ihr äufseres aber an der inneren Seite der Trommel befestigt ist. Neben ihr steht die *Schnecke* KE, ein kegelförmiger Körper, mit schraubenartigen Spiralwindungen an seiner Oberfläche versehn. An der untern Basis der Schnecke befindet sich das *Schneckenrad* E, das durch die Kraft der Feder bewegt wird und selbst alle übrige Räder in Bewegung setzt. Trommel und Schnecke sind durch die Kette I verbunden, von der das eine Ende am oberen Theile der Trommel, das andere aber am unteren Theile des Kegels befestigt ist. An der Schnecke ist noch ein sogenanntes *Sperrrad* angebracht, so dafs die Trommel, wenn die Uhr aufgezogen wird, sich frei nach derjenigen Richtung drehn kann, durch welche die Feder dichter um ihre Axe zusammengewunden oder gespannt wird. Durch dieses Aufziehn vermittelst des vierkantigen Zapfens O dreht man die Schnecke, so dafs sich die Kette von der Trommel (um welche sie durch das Ablaufen der Uhr sich allmälig aufgewunden hat) auf die Schnecke bis an die oberste Spitze k derselben aufwindet. Wenn dann bei der nun aufgezogenen Uhr die Feder durch ihre Elasticität wieder sich ausdehnt und daher die Trommel nach der entgegengesetzten Richtung zu drehn sich bestrebt, so kann diese Drehung der Trommel, wegen des erwähnten Sperrrades, nicht vor sich gehn, ohne die Schnecke und das an sie befestigte Schneckenrad E in Bewegung zu setzen, wodurch sich denn die Kette wieder allmälig von der obersten Spitze der Schnecke bis zu ihrer Basis auf die Trommel aufwindet.

Fig. 152.

Die Kraft der Feder ist offenbar gleich nach dem Aufziehn der Uhr, wo die Feder am meisten gespannt ist, am stärksten, und diese Kraft wird immer schwächer, je mehr sich die Feder aus ihrer ersten gespannten Lage entwickelt. Allein da die Kette, während sie von der Schnecke abläuft, auch

dem unteren, dickeren Ende E des Kegels stets näher kommt, so wird die Schnecke von der Kette immer an einem längeren Hebelarme (oder in einer gröſseren Entfernung von der Axe OE des Kegels) gefaſst, und dadurch wird die durch das Auseinandergehn der Feder verlorne Kraft derselben wieder ersetzt, so daſs die Wirkung der Feder immer dieselbe bleibt. Dieses Schneckenrad E greift in das Getriebe d des Minutenrades D, das Minutenrad in das Getriebe c des Mittelrades C, das Mittelrad in das Getriebe b des Kronrades B und das Kronrad endlich in das Getriebe a des Steig- oder Hemmrades A ein. Die Axe des Minutenrades D geht durch die untere Uhrplatte durch und trägt auf der andern Seite dieser Platte noch ein zweites Getriebe d′, welches eine bloſse Röhre ist, die nur durch ihre Reibung auf der Axe des Minutenrads festsitzt und bei m den Minutenzeiger trägt. Die Zähne dieses Getriebes d′ greifen in das Wechselrad F und die Zähne des Getriebes f des Wechselrades greifen in das Stundenrad G ein. Die Welle dieses Stundenrades ist, so wie das Getriebe d′, eine Röhre, aber weiter und kürzer als d′, so daſs das Minutenrohr d′ frei und mit dem gehörigen Spielraume durch die Welle des Stundenrades geht, welche letztere Welle den Stundenzeiger trägt. Hieraus wird klar, warum beim Stellen des Minutenzeigers der Stundenzeiger zugleich der Bewegung desselben folgt, ferner daſs man diese Zeiger bei den beschriebenen Uhren ohne weiteren Nachtheil, als eine etwas gewaltsame Einwirkung auf das Räderwerk und allmälig verminderte Festigkeit des aufgesteckten Getriebes d′, sowohl vorwärts als auch rückwärts stellen könne, daſs aber der Secundenzeiger nicht gestellt werden dürfe.

Bisher haben wir nur die bewegende Kraft der Uhr oder die Feder und ihr Räderwerk betrachtet. Allein eine solche Uhr würde auf keinen gleichförmigen Gang Anspruch machen können, da ihr noch die *regulirende Kraft* fehlt, die oben bei den Gewichtuhren das Pendel war. Diese regulirende Kraft ist aber bei den Taschenuhren die *Spiralfeder* np, eine spiralartig gewundene haarförmige Feder von Stahl, deren eines Ende an dem Gestelle (oder an der Uhrplatte) befestigt ist, während das andere mit der *Unruhe* NP in unmittelbarer Verbindung steht. Diese Unruhe ist ein metallenes, ungezahntes Rad, durch dessen Mittelpunct M die *Spindel* ML geht. Diese

Spindel hat zwei schmale Flügel oder *Spindellappen* m und m', die nahe unter einem rechten Winkel von einander abgebogen sind und wechselsweise in die Zähne des Steigrades A eingreifen. Die Spiralfeder sammt der Unruhe und ihrer Spindel bilden die eigentliche *Hemmung* (*échappement*) der Federuhren[1].

Wenn eine gespannte Saite durch irgend eine Ursache aus ihrer Richtung gebracht wird, so eilt sie bekanntlich mit beschleunigter Bewegung, ihre frühere Lage wieder einzunehmen. Indem sie aber diese Lage erreicht, hat sie eine so groſse Geschwindigkeit, daſs sie nicht sogleich zur Ruhe kommen kann, sondern daſs sie sich nach der entgegengesetzten Seite ebenso weit entfernt, und dann wieder zurückkehrt und zu beiden Seiten ihrer ersten Lage ihre Schwingungen fortsetzt, bis sie endlich durch Reibung und Widerstand zur Ruhe gebracht wird. Ganz dieselben Erscheinungen bietet uns auch die oben erwähnte Spiralfeder dar. Wenn man, unabhängig von allem Räderwerke, die Unruhe NP um einige Grade um ihren Mittelpunct dreht, wodurch die Spiralfeder (deren inneres Ende an der Unruhe befestigt ist) ebenfalls nach derselben Seite näher zusammengewunden wird, und wenn man dann die Unruhe frei läſst, so wird durch die Elasticität der Feder die Unruhe wieder mit beschleunigter Bewegung rückwärts geführt, und zwar nicht bloſs bis zu ihrem früheren Standpuncte, sondern über ihn hinaus auf die entgegengesetzte Seite, und dann wieder auf die andere Seite, und auch diese Schwingungen werden so lange fortgesetzt, bis Reibung und Widerstand der Luft ihnen ein Ende machen. Diese Schwingungen werden übrigens, wie oben die der gespannten Saite, stets sehr nahe dieselben Geschwindigkeiten haben, obschon ihre Amplitüden mit der Zeit zunehmend kleiner werden. Da aber diese dünne Spiralfeder zu schwach ist, die von der viel stärkeren Hauptfeder in der Trommel erzeugte Bewegung des Steigrades A aufzuhalten und auf diese Weise das Steigrad gleichsam zu reguliren, so wird diese Spiralfeder mit der viel schwereren Unruhe in Verbindung gebracht, dadurch gleichsam die Masse des schwingenden Körpers vermehrt und die Kraft dieser Schwingungen

---

1 Vergl. *Rad.* Bd. VII. S. 1164. u. Fig. 209 u. 210.

selbst vergröſsert. Indem aber die schwache Spiralfeder diese ihr fremde Masse auf ihren Schwingungen mit sich führen muſs, so würde sie durch die Last, welche sie zu tragen hat, so wie durch Reibung und Widerstand der Luft ihre Bewegung sehr bald verlieren, wenn ihr nicht durch die Hauptfeder selbst mittelst der oben erwähnten Spindellappen m m′ immer neue Kraft zugeführt würde. So wie also das Gewicht dem Pendel die verlorne Kraft immer ersetzt, während das Pendel wieder die Bewegung des Gewichts gleichförmig macht, ebenso führt auch die Hauptfeder der Spirale stets neue Kräfte zu, während die regelmäſsigen Schwingungen dieser Spirale die Bewegung der Hauptfeder und dadurch des ganzen Räderwerks reguliren und in einem immer gleichen Gange erhalten. Dort sind beide Kräfte, die bewegende und regulirende, unmittelbare Wirkungen der Schwere; hier aber sind sie die Folgen einer vielleicht nicht weniger durch die ganze Natur verbreiteten Kraft, der Elasticität.

Man sieht aus allem Vorhergehenden, daſs zu einem guten Gange der Uhr, nebst der vollkommenen Ausarbeitung aller ihrer Theile, vorzüglich das gehörige Verhältniſs der Hauptfeder zur Spirale und Unruhe gehört. Da im Allgemeinen die Schwingungen der Spirale desto länger dauern oder da die Uhr desto langsamer gehn wird, je länger die Spirale ist, so muſs man auch ein Mittel haben, die Länge dieser Spirale nach Bedürfniſs zu ändern. Dazu dient aber die *Richtscheibe*, ein Rad, welches unter dem Umfange der Unruhe in einen gezahnten Bogen eingreift, der auf einem Arme zwei Stifte trägt, zwischen welchen die Spirale eingeklemmt ist. Wenn man mit dem Uhrschlüssel die Richtscheibe dreht, so werden jene zwei Stifte vor- oder rückwärts geschoben und dadurch die Spirale verkürzt oder verlängert; denn ihre eigentliche Länge hängt nicht von ihrem an das Gehäuse festgenieteten Ende ab, sondern sie muſs von den erwähnten zwei Stiften an gerechnet werden, indem diejenigen Theile der Spirale, die auſser diesen zwei Stiften liegen, nicht mitschwingen.

Die folgende Tafel giebt die Anzahl der Zähne der Räder und ihrer Getriebe, wie sie in den gewöhnlichen Taschenuhren vorkommen.

Räder	Zähne des Rads	Getriebe	Zähne des Getriebes
A Steigrad	15	a	6
B Kronrad	48	b	6
C Mittelrad	48	c	6
D Minutenrad	54	d	12
- - - -	-	d′	12
E Schneckenrad	48	-	-
F Wechselrad	48	f	16
G Stundenrad	48	-	-

Nimmt man an, daſs die Unruhe in 5 Secunden 24, also in einer Stunde 17280 Schwingungen macht, so wird das Steigrad A, da die Bewegung eines jeden der beiden Spindellappen einen Zahn desselben treibt, wenn das Steigrad 15 Zähne hat, in einer Stunde $\frac{17280}{30} = 576$ mal umgehn; das Kronrad B aber geht in einer Stunde $\frac{6}{48} . 576 = 72$ mal um, das Mittelrad C geht $\frac{6}{48} . 72 = 9$ mal, das Minutenrad D ferner $\frac{6}{54} . 9$ oder einmal, das Schneckenrad E endlich nur $\frac{1}{4}$ mal, also erst in 4 Stunden einmal um. Da ferner das untere Getriebe d′ des Minutenrads, so wie das Minutenrad selbst, in einer Stunde einmal umgeht, so geht das Wechselrad F erst in $\frac{48}{12} = 4$ Stunden und endlich das Stundenrad G in $\frac{48}{16} . 4 = 12$ Stunden einmal um, weshalb auch D den Minutenzeiger und G den Stundenzeiger trägt. Endlich da das Schneckenrad E in 4 Stunden einmal umgeht, so wird auch die Uhr so vielmal 4 Stunden ohne Aufzug gehn, als die Schnecke K Umgänge hat. Hat z. B. diese Schnecke 7 Umgänge, so wird die Uhr 4mal 7 oder 28 Stunden gehn, bis sie wieder aufgezogen werden muſs.

Noch ist für den gesicherten Gang einer Uhr eine wichtige Berücksichtigung übrig, von welcher wir bisher nicht geredet haben. Wenn nämlich die Uhr ihren Zweck, die Zeit zu messen, genau erreichen soll, so müssen alle Schwingungen des Pendels bei den Pendeluhren, so wie alle Schwin-

gungen der Unruhe bei den Federuhren von gleicher Dauer oder sie müssen isochron seyn. Diese Dauer hängt aber dort von der Länge des Pendels und hier von der Gröſse des Schwungrades der Unruhe ab. Allein die Wärme dehnt bekanntlich alle Körper aus, also wird auch jede Aenderung der Temperatur die Schwingungen und somit den Gang jener Uhren ändern. Diesem Umstande zu begegnen, hat man mehrere oft sehr sinnreiche Mittel erdacht, die aber bereits oben unter dem Art. *Compensation* angeführt worden sind und daher hier übergangen werden können. Ueber den Gebrauch der Uhren zur Messung der Zeit s. d. Art. *Zeitbestimmung*.

L.

Umdrehung.

Drehung; *Rotatio, Motus rotatorius s. gyratorius*; Rotation, Mouvement rotatoire; *Rotation, Rotatory Motion.*

Wenn sich ein Körper so bewegt, daſs eine gerade Linie in ihm in Ruhe bleibt, seine übrigen Puncte aber alle Kreise beschreiben, deren Mittelpuncte in jener geraden Linie liegen, so wird diese Bewegung eine *Drehung* oder eine *Rotation* genannt und jene gerade Linie heiſst die *Rotationsaxe*. Die zwei Puncte endlich, in welchen diese Axe die Oberfläche des Körpers trifft, sind die beiden *Pole* der Rotation. Die erwähnten Kreise, die alle auf der Rotationsaxe senkrecht stehn und daher unter sich parallel sind, werden *Parallelkreise* genannt. Bei einigen Körpern, die z. B. durch die Umdrehung von Kreisen um einen ihrer Durchmesser oder durch die Umdrehung von Ellipsen um eine ihrer beiden Axen entstehn, wird derjenige Parallelkreis, der von den beiden Polen gleichweit absteht, der *Aequator* genannt. Wenn aber ein körperlicher Punct gezwungen wird, auf einer bestimmten Bahn einherzugehn, wie dieses hier mit den Elementen des rotirenden Körpers der Fall ist, deren jeder in einem Kreise um die Rotationsaxe sich bewegen muſs, so übt dieser körperliche Punct gegen seine Bahn einen gewissen

Druck aus. Nennt man v die Geschwindigkeit, die der Punct in jedem Augenblicke in der Richtung der Tangente seiner Bahn hat, und ist ϱ der Krümmungshalbmesser der Bahn in diesem Puncte, so wie m die Masse des bewegten Körpers, so hat man für den gesuchten Druck f, der seiner Natur nach immer senkrecht auf die Bahn oder in der Richtung des Krümmungshalbmessers statt hat,

$$f = \frac{mv^2}{\varrho}.$$

Ist die Bahn, wie in unserm Falle, ein Kreis, dessen Halbmesser r seyn mag, so ist die Geschwindigkeit v = c constant und daher jener Druck

$$f = \frac{mc^2}{r}.$$

Da man diese Pressungen zuerst bei der Bewegung der Körper in Kreisen betrachtete und da dieselben nach dem Vorhergehenden in der Richtung des Halbmessers, der hier zugleich der Krümmungshalbmesser des Kreises ist, statt haben, so hat man diesen Druck oder vielmehr die ihm entgegengesetzte Kraft, nach welcher der Körper bei seiner Bewegung im Kreise sich von dem Halbmesser dieses Kreises zu entfernen sucht, die *Centrifugalkraft* oder die *Schwungkraft* genannt. Diese Kraft ist es, die z. B. bei einer *Schleuder* den Faden derselben spannt, wenn man den an ihr befestigten Körper in einem Kreise um das andere Ende des Fadens bewegt, und die ihn desto stärker spannt, je schneller man den Körper bewegt, je kürzer dieser Faden und je größer die Masse des an dem Faden befestigten Körpers ist.

Diese Centrifugalkraft f hat also bei allen Körpern statt, die sich auf einer vorgeschriebenen geraden oder krummen Linie bewegen, selbst wenn keine weiteren äußeren Kräfte auf den Körper einwirken. Ist mR die Resultante dieser äußeren Kräfte, so kann man sie in zwei andere mT und mQ zerlegen, von welchen die erste mT mit der Tangente und die zweite mQ mit der Normale der Curve in jedem ihrer Puncte zusammenfällt. Die erste wird nur die Geschwindigkeit des Körpers vermehren, aber auf den Druck desselben gegen die Curve keinen Einfluß äußern, die zweite aber wird ganz und gar als ein neuer Druck des Körpers gegen diese Curve

zu betrachten seyn, so dafs man daher für den Gesammtdruck des Körpers haben wird

$$mQ + \frac{mv^2}{\varrho}.$$

Abstrahiren wir vorerst von allen diesen äufseren Kräften und betrachten wir blofs die Centrifugalkraft f im Kreise, so dafs man, wie zuvor, hat

$$f = \frac{mv^2}{r},$$

wo r den Halbmesser des Kreises bezeichnet. Um diese Centrifugalkraft mit der Schwere g zu vergleichen, sey c die Geschwindigkeit, welche ein Körper im freien Raum durch den senkrechten Fall von der Höhe h erhalten würde, so dafs man hat[1] $c^2 = 2gh$, also auch

$$\frac{f}{g} = \frac{2mh}{r},$$

so dafs daher für Körper von gleichen Massen die Centrifugalkraft zur Schwere sich verhält, wie die doppelte Fallhöhe, die der Geschwindigkeit des Körpers entspricht, zum Halbmesser des Kreises.

Sind die Dimensionen des Körpers sehr klein gegen seine senkrechte Entfernung von der Rotationsaxe, ist z. B. der Stein am Ende der Schleuder nur klein gegen die Länge ihres Fadens, so kann man f als eine für alle Theile des Körpers constante Gröfse betrachten. Die letzte Gleichung wird also blofs in Folge der Rotation, auch ohne alle Einwirkung von äufseren Kräften, bestehn. Nehmen wir nun an, dafs die Kraft g der Schwere auf den rotirenden Körper wirke, und dafs die Ebene, in welcher sich derselbe bewegt, vertical sey. Dieses vorausgesetzt möge C den Halbmesser dieses Kreises, AB einen horizontalen und MD einen verticalen Durchmesser desselben bezeichnen. Wenn der Körper, der diesen Kreis beschreibt, im Puncte A oder B der horizontalen Linie ankommt, so sey seine Geschwindigkeit $c = \sqrt{2gh}$. Für irgend einen andern Punct a, der um die Distanz $CQ = z$ unter dem horizontalen Durchmesser AB liegt, wird daher die Ge- Fig. 153.

1 S. Art. *Fall.* Bd. IV. S. 6., wo das dortige g gleich $\frac{1}{2}g$ gesetzt wird.

schwindigkeit des Körpers gleich $c' = \sqrt{2g(h+z)}$ seyn, und da die Centrifugalkraft im Allgemeinen gleich $\frac{mc^2}{r}$ ist, so wird auch für den erwähnten Punct a die Centrifugalkraft

$$f = \frac{2mg}{r}(h+z)$$

seyn. Um aber den ganzen Druck des Körpers auf seine Bahn in diesem Puncte a zu erhalten, wird man dieser Gröſse f noch das Gewicht des Körpers, nach der Richtung des Halbmessers Ca zerlegt, hinzufügen. Sey ap mit dem verticalen Halbmesser CM parallel und stelle diese Linie das Gewicht des Körpers vor, so daſs man also $ap = mg$ hat. Von dem Puncte p ziehe man auf die Verlängerung ab des Halbmessers Ca die senkrechte Linie pb, so hat man

$$ab : ap = CQ : CA$$

oder

$$ab = mg \cdot \frac{z}{r},$$

so daſs daher der ganze Druck, den der Körper gegen seine kreisförmige Bahn im Puncte a ausübt, gleich

$$f + mQ = f + mg \cdot \frac{z}{r}$$

oder gleich

$$\frac{mg}{r}(2h + 3z)$$

seyn wird, und dieser Druck wird überall in der Richtung des Halbmessers des Kreises liegen. Ist der Punct a über dem horizontalen Durchmesser AB, so wird man z negativ nehmen. Am gröſsten wird dieser Druck für den untersten Punct M, wo $z = r$, und am kleinsten für den obersten Punct D, wo $z = -r$ ist.

Ist h kleiner als $\frac{3r}{2}$ oder, was dasselbe ist, ist die Geschwindigkeit c kleiner als $\sqrt{3gr}$, so wird der Druck (oder die Spannung des Fadens) negativ, und es wird daher während eines Theiles der Bewegung des Körpers eine Contraction des Fadens, statt einer Tension desselben, statt haben. Da bei einer gleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeit immer gleich ist dem durchlaufenen Raume, dividirt durch die dazu

verwendete Zeit, so hat man, wenn T die Umlaufszeit des Körpers im Kreise und $2r\pi$ die Peripherie desselben bezeichnet,

$$c = \frac{2r\pi}{T},$$

und wenn dieser Werth in der obigen Gleichung

$$f = \frac{mc^2}{r}$$

substituirt wird, so erhält man

$$f = \frac{4mr\pi^2}{T^2}.$$

Also verhält sich bei gleichen Massen die Centrifugalkraft wie der Halbmesser des Kreises und verkehrt wie das Quadrat der Umlaufszeit.

Da die Erde in einem Sterntage (von 86164 mittlern Sonnentagsecunden) sich um ihre Axe dreht, so läſst sich das Vorhergehende unmittelbar auf sie anwenden. Nennt man also g die beobachtete Schwere auf irgend einem Puncte der Oberfläche der Erde, und G diejenige Schwere, die ohne die Rotation der Erde statt haben würde, die also auch an den beiden Polen in der That statt findet, so hat man

$$g = G - \frac{4r\pi^2}{T^2},$$

wenn man die Masse der Erde gleich der Einheit annimmt und durch T = 86164 Secunden die Rotationszeit derselben bezeichnet. Da die Differenz G — g sehr klein ist, so kann man die vorhergehende Gleichung auch schreiben

$$g = G.\left(1 - \frac{4r\pi^2}{gT^2}\right).$$

Es ist aber $2r\pi = 40000000$ Meter, und $g = 9{,}80896$ Meter, also auch

$$\frac{4r\pi^2}{gT^2} = \frac{1}{289},$$

woraus daher folgt, daſs die Schwere der Erde unter dem Aequator um ihren 289sten Theil durch die Rotation der Erde vermindert wird. An allen übrigen Orten der Oberfläche der Erde ist diese Verminderung der Schwere geringer. Die Centrifugalkraft hat nämlich nach dem Vorhergehenden immer in der Richtung des Halbmessers des von dem Körper beschriebenen Kreises statt. Sey also M ein Ort der Erde, dessen Polhöhe Fig. 153.

φ ist. Bezeichnet CA den Aequator und CN die nördliche Hälfte der Erdaxe, und zieht man MB mit AC parallel, so ist der Winkel ACM = BMC = φ. Verlängert man aber den Halbmesser BM = r' des Parallelkreises von M um die Gröfse $Mb = \frac{4r'\pi^2}{T^2}$ und zieht man bc senkrecht auf die Verlängerung von CM, so hat man

$$Mc = Mb . Cos. \varphi,$$

und da überdiefs BM = r' = r Cos. φ ist, so ist auch

$$Mc = \frac{4r\pi^2}{gT^2} . Cos.^2 \varphi = \frac{1}{289} Cos.^2 \varphi,$$

und dieses ist die gesuchte Verminderung der Schwere für jeden Parallelkreis, dessen Breite gleich φ ist. Für den Aequator haben wir oben diese Verminderung gefunden

$$\frac{4r\pi^2}{gT^2} = \frac{1}{289}.$$

Wenn die Geschwindigkeit der Rotation der Erde gröfser wäre, so würde auch die Schwungkraft gröfser werden und endlich die Schwere ganz aufwiegen oder sie sogar übertreffen. Wäre z. B. die Länge des Sterntags gleich 5068 mittlern Zeitsecunden (nahe 1 Stunde 24½ Minuten), also die Bewegung der Erde nahe 17mal schneller, als sie jetzt ist, so wäre

$$G - g = \frac{4r\pi^2}{T^2} = 9{,}80896 \text{ Meter},$$

oder, da schon G = 9,80896 ist, die beobachtete Schwere g gleich Null, das heifst, wenn unser Tag nahe 17mal kürzer wäre, so würde die Schwere am Aequator Null seyn und alle Körper würden, sich selbst überlassen, dort nicht mehr gegen die Erde fallen können. Eine nur wenig vermehrte Geschwindigkeit der Rotation der Erde würde endlich diese Körper ganz von ihr entfernen. Dasselbe würde auch der Fall seyn, wenn die gegenwärtige Länge des Tages zwar dieselbe bliebe, aber dafür der Halbmesser der Erde 289mal gröfser würde, als er jetzt ist[1].

Indem wir nun nach dieser vorläufigen Betrachung über die erste und einfachste Erscheinung der Rotation zu der eigentlichen Theorie dieser Bewegung übergehn, bemerken wir

1 Vergl. *Centralbewegung*. Bd. II. S. 63. und *Centrifugalkraft*. Bd. II. S. 77.

zuerst, dafs die Theorie des *Gleichgewichts* der Rotation bereits oben[1] in ihren Hauptzügen gegeben worden ist. Behält man die dort angeführte Bezeichnung bei, und nehmen wir an, dafs auf ein System von körperlichen Puncten, die auf eine unveränderliche Art unter einander verbunden sind, eine Anzahl von Kräften P, P′, P″ . . . wirke, so dafs die Winkel, welche die Kraft P mit den drei Axen der senkrechten Coordinaten x, y, z bildet, in derselben Ordnung α, β, γ, für die Kraft P′ aber α', β', γ', für die Kraft P″ endlich α'', β'', γ'' sind u. s. w., so wird die Bedingung, dafs jenes System durch die Einwirkung aller dieser Kräfte keine Rotation um die Axe der z erleide, durch folgende Gleichung ausgedrückt werden:

$$0 = P\,(x\,\mathrm{Cos.}\,\beta = y\,\mathrm{Cos.}\,\alpha) + P'(x'\,\mathrm{Cos.}\,\beta' - y'\,\mathrm{Cos.}\,\alpha') + P''\,(x''\,\mathrm{Cos.}\,\beta'' - y''\,\mathrm{Cos.}\,\alpha'') + \ldots,$$

welche Gleichung sich auch kürzer so schreiben läfst

$$0 = \Sigma.P\,(x\,\mathrm{Cos.}\,\beta - y\,\mathrm{Cos.}\,\alpha),$$

wo Σ das bekannte Summenzeichen ist. Ebenso wird man für die freie Drehung um die Axe der y die Bedingungsgleichung haben

$$0 = \Sigma.P\,(z\,\mathrm{Cos.}\,\alpha - x\,\mathrm{Cos.}\,\gamma)$$

und endlich für die Axe der x

$$0 = \Sigma.P\,(y\,\mathrm{Cos.}\,\gamma - z\,\mathrm{Cos.}\,\beta).$$

Haben daher diese drei Bedingungsgleichungen zugleich statt, so wird das System um jede der drei Axen x, y und z sich frei drehen können[2]. Ist aber das System, auf welches die Kräfte P, P′, P″ wirken, ein Körper von gegebener Gestalt, so nehmen die drei vorhergehenden Gleichungen folgende Gestalt an

$$\left.\begin{array}{l} S.[Xy - Yx]\,\partial m = 0 \\ S.[Zx - Xz]\,\partial m = 0 \\ S.[Yz - Zy]\,\partial m = 0 \end{array}\right\}$$

wo

$$X = P\,\mathrm{Cos.}\,\alpha + P'\,\mathrm{Cos.}\,\alpha' + P''\,\mathrm{Cos.}\,\alpha'' + \ldots$$
$$Y = P\,\mathrm{Cos.}\,\beta + P'\,\mathrm{Cos.}\,\beta' + P''\,\mathrm{Cos.}\,\beta'' + \ldots$$
$$Z = P\,\mathrm{Cos.}\,\gamma + P'\,\mathrm{Cos.}\,\gamma' + P''\,\mathrm{Cos.}\,\gamma'' + \ldots$$

---

1 S. Art. *Mechanik.* Bd. VI. S. 1532.

2 Vergl. ebend.

oder wo X, Y, Z die Summe der sämmtlichen auf den Körper einwirkenden Kräfte, nach x, y und z zerlegt, sind und wo ∂m das Element der Masse des Körpers bezeichnet, so dafs die durch S angezeigten Integrale sich auf die ganze Masse des Körpers beziehn. Wie wir daher oben[1] für das Gleichgewicht der progressiven Bewegung eines Körpers, dessen Masse m ist, die drei Bedingungen

$$S.X\partial m = 0;\quad S.Y\partial m = 0;\quad S.Z\partial m = 0$$

erhalten haben, so werden wir auch für das Gleichgewicht der drehenden Bewegung die drei Gleichungen aufstellen

$$S.[Xy - Yx]\partial m = 0$$
$$S.[Zx - Xz]\partial m = 0$$
$$S.[Yz - Zy]\partial m = 0$$

und die zweckgemäfse Behandlung dieser sechs Gleichungen wird die Auflösung eines jeden Problems geben, das man über das *Gleichgewicht* der fortschreitenden und der drehenden Bewegung eines Körpers vorlegen kann, auf welchen die Kräfte P, P′, P″. . nach gegebenen Richtungen wirken.

Wenn aber, vermöge dieser auf den Körper einwirkenden Kräfte, kein Gleichgewicht statt hat, so wird er sich *bewegen* und diese Bewegung wird im Allgemeinen eine doppelte seyn. Vermöge der ersten, die allen Puncten des Körpers gemein ist, wird er oder vielmehr sein Schwerpunct im Raume progressiv fortschreiten und vermöge der zweiten Bewegung wird er sich um diesen Schwerpunct gleichförmig oder ungleichförmig drehn. Die progressive Bewegung seines Schwerpuncts wird durch die Integration der drei Gleichungen gegeben

$$\left.\begin{aligned} S.\frac{m\partial^2 x}{\partial t^2} - S.mX = 0 \\ S.\frac{m\partial^2 y}{\partial t^2} - S.mY = 0 \\ S.\frac{m\partial^2 z}{\partial t^2} - S.mZ = 0 \end{aligned}\right\} \quad .\,.\quad (m)$$

wo die durch S angezeigten Integrale sich über die Masse des ganzen Körpers erstrecken und wo ∂t das constante Ele-

1 Vergl. Art. *Mechanik.*

ment der Zeit bezeichnet. Die Rotation des Körpers aber um seinen Schwerpunct oder um eine durch diesen Schwerpunct gehende constante oder veränderliche Axe wird durch die Integration der drei folgenden Gleichungen ausgedrückt werden:

$$\left.\begin{array}{l} S.\frac{(m(x\partial^2 y - y\partial^2 x)}{\partial t^2} - S.m(Yx - Xy) = 0 \\ S.\frac{m(z\partial^2 x - x\partial^2 z)}{\partial t^2} - S.m(Xz - Zx) = 0 \\ S.\frac{m(y\partial^2 z - z\partial^2 y)}{\partial t^2} - S.m(Zy - Yz) = 0 \end{array}\right\} \ldots (n)$$

und auch diese beiden Systeme von Gleichungen sind bereits oben[1] aufgeführt worden.

Diese Gleichungen (m) und (n) hat zuerst D'Alembert in dieser einfachen und allgemeinen Form aufgestellt, und Lagrange hat in seiner *Mécanique analytique* darauf seine Theorie der Statik und Mechanik erbaut und dadurch diesen beiden Doctrinen zuerst eine rein wissenschaftliche Form gegeben. Wir wollen nun sehn, wie man aus diesen Gleichungen (n) die Erscheinungen, die bei der Rotation der Körper statt haben, ableiten kann. Betrachten wir zuerst die Rotation der Körper um eine *gegebene fixe Axe.*

A. Rotation um eine gegebene fixe Axe.

Sey ∂m das Element der Masse eines Körpers, der sich um die feste Axe OZ dreht. Durch einen Punct O, den man nach Willkür in dieser Axe nimmt, lege man zwei andere fixe Linien OX und OY, die unter sich und auf der Axe OZ senkrecht stehn. Seyen x, y, z die Coordinaten des Elements ∂m am Ende der Zeit t in Beziehung auf jene drei fixen Linien OX, OY und OZ, und sey P die Projection von ∂m in der Ebene der xy, so ist OP = r der Halbmesser des Kreises, den das Element ∂m um die auf OP senkrechte Rotationsaxe OZ beschreibt. Sey endlich QPQ' eine in der Ebene der xy auf OP senkrechte Gerade, welche die Axen der x und der y in den Puncten Q und Q' schneidet. Die

Fig. 155.

1 S. Art. *Mechanik* Bd. VI. S. 1546. Nr. VIII. IX.

accelerirenden Kräfte, welche auf das Element ∂m wirken, wird man, nach dem bekannten einfachen Verfahren, das in der Mechanik überall angewendet wird, auf drei andere X, Y und Z zurückbringen können, die mit den Axen der x, y und z parallel sind. Da nun die Rotation des Körpers, unserer Voraussetzung gemäſs, bloſs um die Axe der z statt haben soll, so verschwinden die zwei letzten der Gleichungen (n) von selbst und man hat bloſs die einzige Gleichung

$$\int\left(\frac{x\,\partial^2 y - y\,\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\partial m = \int (Y x - X y)\,\partial m \;.\;.\;.\; \text{(I)},$$

durch welche daher die gesuchte Rotation des Körpers um die feste Axe der z bestimmt wird. Die Integration soll sich auf die Masse des ganzen Körpers erstecken. Sey ω die Winkelgeschwindigkeit jedes Elements des Körpers am Ende der Zeit t, also auch $r\omega$ die absolute Geschwindigkeit ν desselben, und nehmen wir diese Gröſse ω positiv oder negativ an, je nachdem die Rotation von Q nach C oder in der verkehrten Richtung von C nach Q vor sich geht. Diesem gemäſs ist die nach x und y zerlegte Geschwindigkeit

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \nu . \mathrm{Cos.}\, XQP = -\nu . \frac{y}{r} \text{ und } \frac{\partial y}{\partial t} = \nu . \mathrm{Cos.}\, YQq = \nu . \frac{x}{r}$$

oder, wenn man den Werth von $\nu = \omega r$ substituirt,

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\omega y \text{ und } \frac{\partial y}{\partial t} = \omega x .$$

Da aber $x^2 + y^2 = r^2$ ist, so hat man auch

$$x\,\partial y - y\,\partial x = r^2 \omega \partial t \;.\;.\;.\; \text{(II)}$$

und dieser Gleichung Differential wird seyn, da r und ∂t constant sind,

$$x\,\partial^2 y - y\,\partial^2 x = r^2\,\partial\omega\,\partial t .$$

Weil aber die Gröſse $\partial\omega$ allen Puncten des Körpers gemeinschaftlich ist, so muſs sie auch bei allen Integrationen in Beziehung auf ∂m als constant angesehn werden, so daſs demnach die Gleichung (I) in folgende übergeht

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} . \int r^2\,\partial m = \int (Y x - X y)\,\partial m \;.\;.\;.\; \text{(III)}$$

und diese Gleichung wird nach ihrer Integration die Winkelgeschwindigkeit ω des Körpers für jede gegebene Zeit t

geben. Welches nun auch die accelerirende Kraft seyn mag, die auf das Element ∂m des Körpers wirkt, so wird sich doch dieselbe in zwei andere zerlegen lassen, von welchen die eine mit der Rotationsaxe OZ parallel, die andere in einer auf dieser Axe senkrechten Ebene liegt. Von der ersten können wir hier ganz abstrahiren, da sie zur Bewegung der Rotation selbst nichts beitragen kann. Die zweite aber, die wir der Kürze wegen R nennen wollen, wird nichts anders, als die Resultirende der beiden obigen Kräfte X und Y seyn. Projicirt man diese drei Kräfte X, Y und R auf die Ebene der xy, und ist CP die Richtung dieser Kraft R, so wie $OH = h$ das von O auf diese Richtung gezogene Loth, so ist nach einem bekannten Satze der Statik

$$Yx - Xy = Rh.$$

Nennt man endlich δ den Winkel CPQ', also auch $90° - \delta$ den Winkel OPH, so hat man, da $OH = h$ und $OP = r$ ist,

$$h = r \operatorname{Cos.} \delta$$

und daher

$$Yx - Xy = Rr \operatorname{Cos.} \delta,$$

wodurch also die Gleichung (III) in die folgende übergeht

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} . \int r^2 \partial m = \int Rr \operatorname{Cos.} \delta . \partial m \ . \ . \ . \ (\text{III}').$$

Allein indem die erwähnten Kräfte den Körper um seine Axe zu drehn suchen, muſs durch diese Axe, da sie als fest angenommen wird, ein Theil dieser Kräfte aufgehalten oder vernichtet werden, und diese für die Rotation selbst verloren gegangene Kräfte müssen daher wenigstens auf jene Axe zurückwirken und auf dieselbe einen *Druck* ausüben, den wir nun noch suchen wollen.

Wir betrachten hier natürlich auch wieder nur diejenigen Pressungen auf die Axe, die auf ihr senkrecht stehn, weil sich doch alle andere immer auf zwei zurückführen lassen, von welchen die einen mit der Axe parallel sind und sie daher nicht drücken, während die andern eine auf sie senkrechte Richtung haben. Wir werden daher hier nur die verlornen Kräfte, die mit x und y parallel sind, betrachten, und diese sind bekanntlich

$$X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \text{ und } Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

so dafs, wenn U und V die Summen aller dieser Kräfte bezeichnen, man haben wird

$$U = \int \left(X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right) \partial m \text{ und } V = \int \left(Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) \partial m.$$

Nennt man dann u und v die Abstände derjenigen Puncte der Axe der z von der Ebene der xy, in welchen die Kräfte U und V diese Axe treffen, so sind bekanntlich die Momente dieser Kräfte in Beziehung auf dieselbe Ebene der xy gleich Uu und Vv. Dieselben Momente der Resultanten aller auf den ganzen Körper wirkenden Kräfte sind aber auch gleich der Summe der Momente aller einzelnen Kräfte

$$\left(X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right) \partial m \text{ und } \left(Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) \partial m$$

in Beziehung auf dieselbe Ebene der xy, oder sie sind gleich den Momenten

$$\int \left(X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right) z\, \partial m \text{ und } \int \left(Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) z\, \partial m,$$

so dafs man daher hat

$$Uu = \int \left(X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right) z\, \partial m,$$

$$Vv = \int \left(Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) z\, \partial$$

Allein wenn man die obigen Gleichungen

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\omega y \text{ und } \frac{\partial y}{\partial t} = \omega x$$

differentiirt, so erhält man

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -y \frac{\partial \omega}{\partial t} - \omega \frac{\partial y}{\partial t} = -y \frac{\partial \omega}{\partial t} - x\omega^2,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = x \frac{\partial \omega}{\partial t} + \omega \frac{\partial x}{\partial t} = x \frac{\partial \omega}{\partial t} - y\omega^2.$$

Substituirt man in diesen Ausdrücken den Werth von $\frac{\partial \omega}{\partial t}$ aus der Gleichung (III), und bemerkt man, dafs, wenn x_1 und y_1 die Coordinaten des *Schwerpuncts*[1] des Körpers sind und wenn M die ganze Masse desselben ist, man hat

1 S. Art. *Schwerpunct*. Bd. VIII. S. 641.

$$\int x\,\partial m = M x_1 \text{ und } \int y\,\partial m = M y_1,$$

so gehen dadurch die vorhergehenden Werthe von U, V und von Uu und Vv in folgende über:

$$\left.\begin{aligned} U &= M x_1 \omega^2 + \int X\,\partial m + y_1 . T \\ V &= M y_1 \omega^2 + \int V\,\partial m + x_1 . T \\ Uu &= \omega^2 \int x z\,\partial m + \int X z\,\partial m + T . \int y z\,\partial m \\ Vv &= \omega^2 \int y z\,\partial m + \int Y z\,\partial m - T . \int x z\,\partial m \end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{(IV)}$$

wo der Kürze wegen

$$T = \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\int (Yx - Xy)\,\partial m}{\int r^2\,\partial m}$$

gesetzt worden ist. Wenn also einmal die Winkelgeschwindigkeit ω durch die Gleichung (III) oder (III') bekannt geworden ist, so wird man durch die Gleichungen (IV) die mit x und y parallelen Pressungen U und V der Axe und zugleich die Distanz u und v der zwei Puncte von dem Anfangspuncte O der Coordinaten kennen lernen, in welchen die Axe diese Pressungen erleidet.

Wenn die Rotationsaxe OZ zugleich durch den Schwerpunct des Körpers geht, so hat man nach der Natur dieses Punctes $x_1 = 0$ und $y_1 = 0$, so dafs demnach die zwei ersten der Gleichungen (IV) in folgende einfacheren übergehn:

$$U = \int X\,\partial m \text{ und } V = \int Y\,\partial m.$$

Geht aber die Rotationsaxe durch den Schwerpunct und ist sie zugleich eine der drei freien Axen, so hat man[1] nach der Natur dieser freien Axen $\int x z\,\partial m = 0$ und $\int y z\,\partial m = 0$, und dadurch werden die Gleichungen (IV) in folgende übergehn

$$U = \int X\,\partial m; \quad V = \int Y\,\partial m;$$
$$Uu = \int X z\,\partial m; \quad Vv = \int Y z\,\partial m.$$

Aus dem Vorhergehenden lassen sich auch zugleich, als ein besonderer Fall, diejenigen Gleichungen ableiten, die für die Rotation um eine fixe Axe gehören, wenn keine accelerirenden Kräfte, sondern wenn blofs ein augenblicklicher Stofs auf den Körper wirkt. Die Gleichung (III') war nämlich

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\int R r \operatorname{Cos.} \delta . \partial m}{\int r^2\,\partial m}.$$

1 Vergl. *Moment.* Bd. VI. S. 2325.

Bezeichnet R diese augenblickliche Kraft eines Stofses und ν die dadurch hervorgebrachte constante Geschwindigkeit, so hat man, analog mit den accelerirenden Kräften

$$R = \frac{\partial \nu}{\partial t} \text{ und daher auch } \nu = \int R \partial t,$$

so dafs daher die vorige Gleichung in die folgende übergeht:

$$\partial \omega = \frac{\int R \partial t . r \operatorname{Cos}. \delta . \partial m}{\int r^2 \partial m} = \frac{\int \nu . r \operatorname{Cos}. \delta . \partial m}{\int r^2 \partial m}$$

oder, da ν eine constante Gröfse und $r \operatorname{Cos}. \delta = h = OH$ ist,

$$\omega = \frac{M h \nu}{\int r^2 \partial m} \quad \ldots \quad (a)$$

und diese Gleichung giebt die gesuchte Winkelgeschwindigkeit des Körpers. Setzt man endlich in den Gleichungen (IV) die Gröfse $X = Y = 0$, so erhält man für die Pressungen der Axe und für die Puncte derselben, wo sie statt haben, die folgenden Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} U &= M x_1 . \omega^2 \\ V &= M y_1 . \omega^2 \\ U u &= \omega^2 \int x z \partial m \text{ oder } u = \frac{\int x z \partial m}{M x_1} \\ V v &= \omega^2 \int y z \partial m \text{ oder } v = \frac{\int y z \partial m}{M y_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (b)$$

Durch die Gleichungen (a) und (b) ist die Theorie der Rotation um eine feste Axe, wie sie durch einen momentanen Stofs entsteht, vollständig dargestellt. In der Gleichung (a) bezeichnet r den senkrechten Abstand OP des Elements ∂m von der Rotationsaxe OZ und das Integral $\int r^2 \partial m$ mufs auf die ganze Masse M des Körpers ausgedehnt werden, so dafs also die Gröfse $\int r^2 \partial m$ das *Trägheitsmoment* des Körpers bezeichnet[1]. Ferner ist ν die Geschwindigkeit des stofsenden Körpers vor dem Stofse, senkrecht auf die Axe OZ, und endlich ist h oder OH das Loth, welches von dem Puncte O auf die Richtung PC des Stofses gefällt worden ist. Ist die

1 Vergl. *Moment.* Bd. VI. S. 2323.

Rotationsaxe OZ zugleich eine der drei freien Axen des Körpers, so ist

$$\int x z \partial m = 0 \text{ und } \int y z \partial m = 0,$$

also ist auch nach den Gleichungen (b) die Gröfse u sowohl, als v gleich Null. Ist aber u = v, so werden die beiden Pressungen $M x_1 . \omega^2$ und $M y_1 . \omega^2$ an einem und demselben Puncte der Axe angebracht seyn, und sie werden sich auf einen einzigen, zu dieser Axe senkrechten Druck zurückführen lassen, welcher gleich ist

$$\sqrt{U^2 + V^2} = M\omega^2 . \sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2} = M\omega^2 . r_1,$$

wo r_1 die Entfernung des Schwerpuncts des Körpers von dem Anfangspuncte O der Coordinaten bezeichnet. Soll die fixe Axe ganz und gar keinen Druck erleiden, so müssen die Gröfsen u und v gleich Null seyn, das heifst, nach den beiden letzten Gleichungen (b), die Rotationsaxe mufs eine freie Axe seyn. Nach der Gleichung (a) ist aber

$$h = \frac{\omega . \int r^2 \partial m}{M \nu},$$

wo ω die Winkelgeschwindigkeit, also auch $\nu = r\omega$ die wahre Geschwindigkeit eines jeden Elements ist, das von der Rotationsaxe um die Gröfse r absteht. Für die Geschwindigkeit des Schwerpuncts aber hat man $\nu = r_1 . \omega$, also auch, wenn man diesen Werth von ν in der vorigen Gleichung substituirt,

$$h = \frac{\int r^2 \partial m}{M r_1} \quad \ldots \quad (c)$$

Damit also die Rotationsaxe OZ keinen Druck von einer in der Ebene der xy liegenden Richtung des Stofses erleide, müssen diese drei Axen der Coordinaten OX, OY, OZ freie Axen seyn, und die Entfernung h = OH des Anfangspuncts O von der Richtung CP des Stofses mufs den durch die Gleichung (c) gegebenen Werth haben. Der auf diese Weise bestimmte Punct H, dessen Distanz vom Anfanspuncte gleich h ist, heifst der *Mittelpunct des Stofses* (*centre de percussion*). Dieser Punct wird daher ganz ebenso bestimmt, wie der sogenannte *Schwingungsmittelpunct* (*centrum oscillationis*), von dem wir bereits oben[1] gehandelt haben. Die erwähnte Eigenschaft

1 S. Art. *Mittelpunct*. Bd. VI. S. 2298. 2306.

ist sogar diesen freien Axen ausschliefsend zugehörend; denn wenn der Körper um eine Axe der z gedreht wird, die keine freie Axe ist, so lassen sich die beiden Pressungen $M x_1 . \omega^2$ und $M y_1 . \omega^2$ im Allgemeinen nicht mehr auf eine einzige, wie oben, zurückführen, und wenn sie es thun (nämlich für den Fall $u = v$), so wird doch diese einzige Pressung durch einen Punct gehn, der nicht mehr der Anfang der Coordinaten ist, so dafs also dann nicht blofs ein einziger Punct, wie zuvor, sondern dafs zwei Puncte des Körpers, d. h. dafs dann die ganze Axe des Körpers befestigt oder unterstützt werden mufs, damit sie sich nicht verrücken kann.

Wenn also ein Körper in irgend einem seiner Puncte fest gehalten und keiner accelerirenden Kraft, wie z. B. die Schwere ist, ausgesetzt wird, und wenn er dann durch einen augenblicklichen Stofs eine Drehung um eine der drei freien Axen erhält, die durch diesen festen Punct gehn, so wird er sich gleichförmig und ohne Ende um diesen Punct oder vielmehr um eine dieser drei freien Axen drehn. Ist die Richtung dieses Stofses in der Ebene, welche zwei dieser Axen bilden, ist sie z. B. in der Ebene der xy, so wird die freie Axe der z die Rotationsaxe seyn, und die Pressungen, welche diese Rotationsaxe durch jenen Stofs erleidet, werden sich auf eine einzige zurückführen lassen, die durch jenen festen Punct, den Durchschnittspunct der drei freien Axen, geht, so dafs es also hinreichen wird, diesen Punct gehörig zu befestigen, damit der Körper keine progressive Bewegung erhalte und sich blofs gleichförmig um jene Axe drehe. Ist dieser Punct des Körpers zugleich ein solcher, für welchen alle drei Momente der Trägheit des Körpers unter sich gleich sind, d. h. für welchen die Gleichung statt hat

$$\int x z \partial m = \int x y \partial m = \int y z \partial m,$$

so kann die Richtung des Stofses jede beliebige seyn, der Körper wird sich doch um eine freie Axe drehn und diese Axe wird während der Drehung stets unbeweglich bleiben. Einen solchen Punct haben wir z. B. oben[1] für das Parallelepipedum oder für das Ellipsoid mit drei Axen bestimmt. Werden daher diese zwei Körper in diesem Puncte festgehalten,

1 S. Art. *Moment*. Bd. VI. S. 2329. 2332.

so werden sie sich auch immer um eine unbewegliche, durch diesen Punct gehende Axe drehn können. Dasselbe wird, wie man auch schon ohne alle Rechnung sieht, bei einer Kugel der Fall seyn, deren Mittelpunct, oder bei einem Würfel, dessen Durchschnittspunct der Diagonalen fest ist, und da dieser Punct bei den beiden erwähnten Körpern zugleich der Schwerpunct ist, so wird jene freie Drehung bei ihnen selbst dann noch statt finden, wenn der Körper der Wirkung der Schwere unterworfen ist.

B. Rotation des physischen Pendels.

Betrachten wir nun die Bewegung eines physischen Pendels, d. h. eines Körpers von gegebener Gestalt, der um eine horizontale fixe Axe gedreht wird und der Einwirkung der Schwere unterworfen ist. Nimmt man die Richtung der Schwere g mit der Axe der verticalen y parallel, so hat man

$$X = 0 \text{ und } Y = g,$$

so dafs demnach die Gleichung (III) in folgende übergeht

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} \int r^2 \partial m = g \int x \partial m,$$

oder, wenn wieder M die Masse des ganzen Körpers und x_1 die Abscisse des Schwerpuncts bezeichnet, also $\int x \partial m = M x_1$ ist,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{M g x_1}{\int r^2 \partial m}.$$

Sey CA ein verticaler Faden, an dessen Endpunct in A ein Körper befestigt ist. Durch den andern Endpunct C des Fadens lege man drei unter sich senkrechte Linien CX, CY und CZ, welche letzte senkrecht auf der Ebene des Papiers steht und daher in der Zeichnung nicht erscheint. Von diesen Axen sind also CX und CZ horizontal, CY aber vertical oder parallel mit der Richtung der Schwere. Nehmen wir nun an, der Körper A werde bei immer gleich gespanntem Faden AC aus der verticalen Stellung CA in die schiefe Lage CB gebracht und erhalte in diesem Puncte, durch irgend einen in der Ebene der xy angebrachten Stofs, eine anfängliche Geschwindigkeit C, so wird der Schwerpunct des Körpers um den Punct C der fixen horizontalen Drehungsaxe CZ einen

Fig. 156

Kreisbogen BMAB' beschreiben, und es wird sich demnach noch darum handeln, diese kreisförmige Bewegung des Körpers näher zu bestimmen.

Nennen wir Θ den Winkel ACM, welchen die bewegliche Ebene, die durch C und durch den Schwerpunct des Körpers geht, mit der verticalen Ebene YCZ am Ende der Zeit t bildet. Ist a die constante Entfernung dieses Schwerpuncts von der Drehungsaxe CZ, so hat man

$$x_1 = a\,\mathrm{Sin.}\,\Theta \text{ und } y_1 = a\,\mathrm{Cos.}\,\Theta.$$

Allein die Gleichung (II) war, wenn man $r = a$ setzt,

$$x_1 \partial y_1 - y_1 \partial x_1 = u^2 \omega \partial t.$$

Substituirt man in dem letzten Ausdrucke für x_1 und y_1 die vorhergehenden Werthe und ihre Differentialien, so erhält man

$$\omega = -\frac{\partial \Theta}{\partial t}.$$

Sey endlich Mk^2 das Trägheitsmoment des Körpers in Beziehung auf eine Axe, die durch den Schwerpunct desselben geht und parallel mit der Rotationsaxe CZ ist, so hat man[1]

$$\int r^2 \partial m = M(a^2 + k^2),$$

und dieser Werth von $\int r^2 \partial m$ ist das Trägheitsmoment des Körpers in Beziehung auf die Rotationsaxe, wenn $AC = k$ die Entfernung des Schwerpuncts A von der Axe CZ der Rotation ist. Substituirt man diese Werthe von x_1, ω und $\int r^2 \partial m$ in der obigen Gleichung für $\frac{\partial \omega}{\partial t}$, so erhält man

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = -\frac{a g\,\mathrm{Sin.}\,\Theta}{a^2 + k^2}.$$

Wird diese Gleichung durch $z \partial t$ multiplicirt und integrirt, so erhält man

$$\frac{\partial \Theta^2}{\partial t^2} = \frac{2 a g\,\mathrm{Cos.}\,\Theta}{a^2 + k^2} + C,$$

wo C die Constante der Integration bezeichnet. Hat man im Anfange der Bewegung

$$\Theta = \alpha \text{ und } \frac{\partial \Theta}{\partial t} = 0,$$

1 S. Art. *Moment.* Bd. VI. S. 2328.

so ist

$$C = -\frac{2ag\,Cos.\alpha}{a^2+k^2}$$

und daher auch

$$\frac{\partial\Theta^2}{\partial t^2} = \frac{2ag(Cos.\Theta - Cos.\alpha)}{a^2+k^2} \quad \ldots \quad (d)$$

und diese Gleichung ist dieselbe, bis auf die constante Gröfse $\frac{2ag}{a^2+k^2}$, die man für die Bewegung eines *einfachen Pendels* gefunden hat[1], so wie auch das Differential derselben oder

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2} = -\frac{ag}{a^2+k^2}.Sin.\Theta.$$

C. Freie Rotation des Körpers von gegebener Gestalt um einen seiner Puncte.

Wir wenden uns nun zu der Rotation der freien, in keinem ihrer Puncte zurückgehaltenen Körper, auf welche ihrer Richtung und Gröfse nach gegebene Kräfte wirken, wie dieses z. B. bei den Planeten und Satelliten unseres Sonnensystems der Fall ist. Hier wird also die Axe der Rotation im Allgemeinen veränderlich seyn und mit der Zeit durch verschiedene Puncte der Oberfläche des Körpers gehn, so dafs demnach hier, nebst der veränderlichen Winkelgeschwindigkeit des Körpers um seine Axe, auch noch die Lage dieser Axe und ihr Ort im Raume für jede gegebene Zeit bestimmt werden mufs. Zu diesem Zwecke ist es aber nothwendig, die senkrechten Coordinaten x, y, z eines Punctes, die sich auf drei gegebene, unter sich senkrechte Ebenen beziehn, in drei andere Coordinaten x^1, y^1, z^1 desselben Punctes zu verwandeln, welche letzte sich auf drei neue Ebenen beziehn, deren Lage gegen die drei ersten Ebenen gegeben ist.

Um diese schon an sich sehr merkwürdigen Verwandlungen, die auch bei vielen andern Gelegenheiten häufige Anwendung finden, auf eine sehr einfache Weise zu geben, nehmen wir die Ebene der xy für die Ekliptik und die der x′y′

1 Vergl. Art. *Widerstand* unter B.

für den Aequator an. Es sey nun z. B. die Lage eines Gestirns M gegen die Ekliptik durch die drei Coordinaten $OA = x$, $AB = y$, $BM = z$ gegeben. Ist dann $O\alpha$ die Linie der Nachtgleichen, in welcher die Ekliptik den Aequator schneidet, und zieht man $B\alpha$ senkrecht auf diese Linie, so seyen die drei neuen Coordinaten $O\alpha = \xi$, $\alpha B = v$, $BM = \zeta$. Hier liegen also die Linien x und ξ, so wie y und v in der Ebene der Ekliptik, und z sowohl als ζ steht senkrecht auf der Ekliptik. Nennt man nun ψ den Winkel der x mit ξ oder ist $AO\alpha = \psi$, so findet man aus den beiden ähnlichen, rechtwinkligen Dreiecken αOn und AnB sehr leicht die folgenden Ausdrücke:

Fig. 157.

$$\left.\begin{array}{l} \xi = x \,\text{Cos.}\, \psi - y \,\text{Sin.}\, \psi \\ v = x \,\text{Sin.}\, \psi + y \,\text{Cos.}\, \psi \\ \zeta = z \end{array}\right\} \text{ oder umgekehrt } \left\{\begin{array}{l} x = \xi \,\text{Cos.}\, \psi + v \,\text{Sin.}\, \psi \\ y = v \,\text{Cos.}\, \psi - \xi \,\text{Sin.}\, \psi \\ z = \zeta \end{array}\right.$$

Da wir nun mit diesem zweiten Coordinatensysteme der ξ, v, ζ in die Linie ξ der Nachtgleichen gekommen sind, in welcher sich Ekliptik und Aequator schneiden, so wird es leicht seyn, von der Ekliptik auf den Aequator herabzusteigen und die Lage des Gestirns M gegen den Aequator zu bestimmen. Sind nämlich $O\alpha = \xi$, $\alpha B = v$, $BM = \zeta$ wieder die vorhergehenden Coordinaten des zweiten Systems, also $O\alpha B$ die Ebene der Ekliptik, so wird man, wenn $O\alpha C$ die Ebene des Aequators vorstellt, von dem Gestirn M ein Loth $MC = \zeta'$ auf den Aequator fällen und von diesem Puncte C die Linie $C\alpha = v'$ senkrecht auf die Linie der Nachtgleichen ziehn, wo dann der Winkel $C\alpha B = \Theta$ gleich der Schiefe der Ekliptik oder gleich dem Winkel seyn wird, unter welchem unsere beiden Ebenen gegen einander geneigt sind. Demnach geben wieder die beiden ähnlichen Dreiecke dieser Figur folgende Gleichungen:

Fig. 158.

$$\left.\begin{array}{l} \xi' = \xi \\ v' = v \,\text{Cos.}\, \Theta - \zeta \,\text{Sin.}\, \Theta \\ \zeta' = v \,\text{Sin.}\, \Theta + \zeta \,\text{Cos.}\, \Theta \end{array}\right\} \text{ oder umgekehrt } \left\{\begin{array}{l} \xi = \xi' \\ v = v' \,\text{Cos.}\, \Theta + \zeta' \,\text{Sin.}\, \Theta \\ \zeta = \zeta' \,\text{Cos.}\, \Theta - v' \,\text{Sin.}\, \Theta \end{array}\right.$$

Geht man endlich von dieser Linie $O\alpha$ der Nachtgleichen zu einer andern OE über, die ebenfalls in der Ebene des Aequators liegt, aber mit der Nachtgleichenlinie den Winkel

Fig. 159.

$EO\alpha = \varphi$ bildet, und nennt man, wie zuvor, v' das Loth $C\alpha$ auf die Linie $O\alpha$ und y' das Loth CE auf die neue Linie OE, so wie x' die Linie OE, indem $O\alpha = \xi'$ und $CM = \zeta'$ wie zuvor bleiben, so hat man

$$\left.\begin{aligned} x' &= v' \operatorname{Sin.}\varphi + \xi' \operatorname{Cos.}\varphi \\ y' &= v' \operatorname{Cos.}\varphi - \xi' \operatorname{Sin.}\varphi \\ z' &= \zeta' \end{aligned}\right\} \text{ oder umgekehrt } \left\{\begin{aligned} \xi' &= x' \operatorname{Cos.}\varphi - y' \operatorname{Sin.}\varphi \\ v' &= y' \operatorname{Cos.}\varphi + x' \operatorname{Sin.}\varphi \\ \zeta' &= z' \end{aligned}\right\}$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen die Gröfsen ξ, v, ζ und ξ', v', ζ', so erhält man, wenn man mit dem vorletzten Systeme, das x', y', z' durch ξ', v', ζ' giebt, den Anfang der Elimination macht, für den Uebergang von den Coordinaten x, y, z zu den x', y', z' folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} x' = {} & x (\operatorname{Cos.}\Theta \operatorname{Sin.}\psi \operatorname{Sin.}\varphi + \operatorname{Cos.}\psi \operatorname{Cos.}\varphi) \\ & + y (\operatorname{Cos.}\Theta \operatorname{Cos.}\psi \operatorname{Sin.}\varphi - \operatorname{Sin.}\psi \operatorname{Cos.}\varphi) \\ & - z \operatorname{Sin.}\Theta \operatorname{Sin.}\varphi ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' = {} & x (\operatorname{Cos.}\Theta \operatorname{Sin.}\psi \operatorname{Cos.}\varphi - \operatorname{Cos.}\psi \operatorname{Sin.}\varphi) \\ & + y (\operatorname{Cos.}\Theta \operatorname{Cos.}\psi \operatorname{Cos.}\varphi + \operatorname{Sin.}\psi \operatorname{Sin.}\varphi) \\ & - z \operatorname{Sin.}\Theta \operatorname{Cos.}\varphi ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z' = {} & x \operatorname{Sin.}\Theta \operatorname{Sin.}\psi \\ & + y \operatorname{Sin.}\Theta \operatorname{Cos.}\psi \\ & + z \operatorname{Cos.}\Theta . \end{aligned}$$

Ebenso kann man auch umgekehrt die Gröfsen x, y, z durch die neuen x', y', z' ausdrücken, wenn man die Elimination mit dem ersten der obigen sechs Systeme beginnt, wobei man durch eine sehr einfache Substitution folgende Ausdrücke erhält:

$$\begin{aligned} x = {} & x' (\operatorname{Cos.}\Theta \operatorname{Sin.}\psi \operatorname{Sin.}\varphi + \operatorname{Cos.}\psi \operatorname{Cos.}\varphi) \\ & + y' (\operatorname{Cos.}\Theta \operatorname{Sin.}\psi \operatorname{Cos.}\varphi - \operatorname{Cos.}\psi \operatorname{Sin.}\varphi) \\ & + z' \operatorname{Sin.}\Theta \operatorname{Sin.}\psi ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = {} & x' (\operatorname{Cos.}\Theta \operatorname{Cos.}\psi \operatorname{Sin.}\varphi - \operatorname{Sin.}\psi \operatorname{Cos.}\varphi) \\ & + y' (\operatorname{Cos.}\Theta \operatorname{Cos.}\psi \operatorname{Cos.}\varphi + \operatorname{Sin.}\psi \operatorname{Sin.}\varphi) \\ & + z' \operatorname{Sin.}\Theta \operatorname{Cos.}\psi ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z = {} & - x' \operatorname{Sin.}\Theta \operatorname{Sin.}\varphi \\ & - y' \operatorname{Sin.}\Theta \operatorname{Cos.}\varphi \\ & + z' \operatorname{Cos.}\Theta . \end{aligned}$$

Nach dieser Vorbereitung wollen wir nun zu der näheren Bestimmung der freien Rotation eines Körpers übergehn, auf

welchen gegebene Kräfte wirken. Die allgemeinen Gleichungen, welche diese Rotation bestimmen, haben wir schon oben gegeben. Wenn man nämlich in den Gleichungen (n) das Zeichen m in ∂m verwandelt, wo ∂m das Element der Masse des Körpers bezeichnet, so giebt die erste dieser Gleichungen

$$S.(x\partial^2 y - y\partial^2 x)\frac{\partial m}{\partial t} = S.(Yx - Xy)\,\partial t.\partial m,$$

wo das Integral S sich auf die ganze Masse des Körpers bezieht. Integrirt man den ersten Theil dieser Gleichung in Beziehung auf x und y, und zeigt man bei dem zweiten Theile derselben Gleichung diese Integration durch das Zeichen $\int$ an, so hat man

$$S.(x\partial y - y\partial x).\frac{\partial m}{\partial t} = S\int(Yx - Xy)\partial t.\partial m$$

und ebenso erhält man also auch

$$S.(x\partial z - z\partial x).\frac{\partial m}{\partial t} = S\int(Zx - Xz)\partial t.\partial m$$

und

$$S.(y\partial z - z\partial y)\frac{\partial m}{\partial t} = S\int(Zy - Yz)\partial t.\partial m.$$

Setzt man, um dieses bequemer auszudrücken, die Gröfsen

$$N = S\int(Yx - Xy)\;\; t.\partial m,$$
$$N' = S\int(Zx - Xz)\partial t.\partial m,$$
$$N'' = S\int(Zy - Yz)\partial t.\partial m,$$

so gehen jene drei Gleichungen (n) in folgende über

$$\left.\begin{aligned} S.(x\,\partial y - y\partial x)\frac{\partial m}{\partial t} &= N \\ S.(x\,\partial z - z\,\partial x)\frac{\partial m}{\partial t} &= N' \\ S.(y\,\partial z - z\partial y)\frac{\partial m}{\partial t} &= N'' \end{aligned}\right\} \;\ldots\; (V)$$

und diese Gleichungen (V) sollen nun weiter entwickelt werden, um die Theorie der Rotation vollständig zu bestimmen. Wir wollen diese Entwickelung hier nur so weit vornehmen,

als sie uns zu der Lehre von der Präcession[1] nothwendig scheint.

Bringen wir zuerst die Coordinaten x, y, z der Gleichungen (V), die sich auf irgend ein Element des Körpers beziehn, auf drei andere Coordinaten x', y', z', welche letzteren mit den drei freien Axen des Körpers zusammenfallen sollen. Zu diesem Zwecke wollen wir also in den Gleichungen (V) für x, y, z ihre Werthe in x', y', z' aus den im Anfange dieses Abschnitts gegebenen Gleichungen substituiren und dabei, der vorausgesetzten freien Axen wegen, die drei Gröfsen

$$\int x'y'\partial m, \quad \int x'z'\partial m \text{ und } \int y'z'\partial m$$

jede für sich gleich Null setzen. Ferner wollen wir der Kürze wegen folgende Bedeutung der Gröfsen A, B, C und p, q, r annehmen:

$$A = \int(y'^2 + z'^2)\partial m$$
$$B = \int(x'^2 + z'^2)\partial m$$
$$C = \int(x'^2 + y'^2)\partial m$$

und

$$\left.\begin{array}{l} p.\partial t = \partial\varphi - \quad \psi \text{Cos.}\,\Theta \\ q.\partial t = \partial\psi \text{Sin.}\,\Theta \text{Sin.}\,\varphi - \partial\Theta \text{Cos.}\,\varphi \\ r.\partial t = \partial\psi \text{Sin.}\,\Theta \text{Cos.}\,\varphi + \partial\Theta \text{Sin.}\,\varphi \end{array}\right\} \ldots (e)$$

also auch, wenn man die letzten drei Gleichungen umkehrt,

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} = r\,\text{Sin.}\,\varphi - q\,\text{Cos.}\,\varphi$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}.\text{Sin.}\,\Theta = r\,\text{Cos.}\,\varphi + q\ \text{Sin.}\,\varphi$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}.\text{Sin.}\,\Theta = (r\,\text{Cos.}\,\varphi + q\ \text{Sin.}\,\varphi)\ \text{Cos.}\,\Theta + p\,\text{Sin.}\,\Theta.$$

Führt man die angezeigte Substitution aus, so erhält man

$$N = C p \text{Cos.}\,\Theta - B r \text{Sin.}\,\Theta \text{Cos.}\,\varphi - A q \text{Sin.}\,\Theta \text{Sin.}\,\varphi$$

$$N' = (A q \text{Cos.}\,\varphi - B r \text{Sin.}\,\varphi) \text{Sin.}\,\psi - C p \text{Sin.}\,\Theta \text{Cos.}\,\psi$$
$$- B r \text{Cos.}\,\Theta \text{Cos.}\,\varphi \text{Cos.}\,\psi - A q \text{Cos.}\,\Theta \text{Sin.}\,\varphi \text{Cos.}\,\psi$$

$$N'' = (A q \text{Cos.}\,\varphi - B r \text{Sin.}\,\varphi) \text{Cos.}\,\psi - C p \text{Sin.}\,\Theta \text{Sin.}\,\psi$$
$$- B r \text{Cos.}\,\Theta \text{Cos.}\,\varphi \text{Sin.}\,\psi - A q \text{Cos.}\,\Theta \text{Sin.}\,\varphi \text{Sin.}\,\psi.$$

---

1 S. Art. *Vorrücken der Nachtgleichen.*

Wenn man diese drei Werthe von N differentiirt und nach der Differentiation den Winkel ψ gleich Null setzt, was erlaubt ist, da man die Lage der x in der Ebene der xy willkürlich annehmen kann, so erhält man

$$\partial N = \partial . Cp \,Cos.\, \Theta - \partial P . Sin.\, \Theta - \partial \Theta . P\, Cos.\, \Theta$$
$$\partial N' = -\partial . Cp\, Sin.\, \Theta - \partial P . Cos.\, \Theta + \partial \Theta . P\, Sin.\, \Theta - Q . \partial \psi$$
$$\partial N'' = \quad Cp . \partial \psi . Sin.\, \Theta + \partial \psi . P\, Cos.\, \Theta - \partial Q,$$

wo der Kürze wegen gesetzt wurde

$$P = Br\, Cos.\, \varphi + Aq\, Sin.\, \varphi$$

und

$$Q = Br\, Sin.\, \varphi - Aq\, Cos.\, \varphi .$$

Multiplicirt man aber die erste der drei letzten Gleichungen durch Cos. Θ und die zweite durch — Sin. Θ, so giebt die Summe dieser Producte

$$C\partial p + (B-A) qr \partial t = \partial N . Cos.\, \Theta - \partial N' . Sin.\, \Theta$$

und ebenso

$$A\partial q + (C-B) pr \partial t = -(\partial N\, Sin.\, \Theta + \partial N'\, Cos.\, \Theta)\, Sin.\, \varphi + \partial N'' . Cos.\, \varphi$$

$$B\partial r + (A-C) pq \partial t = -(\partial N Sin.\, \Theta + \partial N' Cos.\, \Theta)\, Cos.\, \varphi - \partial N'' . Sin.\, \varphi \quad \ldots (VI)$$

und diese drei Gleichungen (VI) sind, wie wir später sehn werden, sehr geschickt, die Rotation der Körper zu bestimmen, wenn diese, wie es bei den Körpern des Himmels der Fall ist, nahe um eine ihrer freien Axen statt hat.

Die drei oben eingeführten Hülfsgröfsen p, q, r sind sehr wichtig, da durch sie die Lage der Rotationsaxe für jeden Augenblick bestimmt wird. Man hat nämlich für die in der Rotationsaxe liegenden Puncte

$$\partial x = 0, \partial y = 0 \text{ und } \partial z = 0.$$

Differentiirt man daher die im Anfange dieses Abschnitts gegebenen Ausdrücke zwischen x, y, z und x', y', z' in Beziehung auf Θ, φ und ψ, und setzt man wieder nach der Differentiation den Winkel $\psi = 0$, so gehn die drei Gleichun-

---

1 S. Art. *Vorrücken der Nachtgleichen.*

gen $\partial x = 0$, $\partial y = 0$, $\partial z = 0$ nach der Ordnung in folgende über:

$$0 = x'(\partial\psi \,\text{Cos.}\,\Theta \,\text{Sin.}\,\varphi - \partial\varphi \,\text{Sin.}\,\varphi)$$
$$+ y'(\partial\psi \,\text{Cos.}\,\Theta \,\text{Cos.}\,\varphi - \partial\varphi \,\text{Cos.}\,\varphi)$$
$$+ z'\partial\psi \,\text{Sin.}\,\Theta \;.\;.\; (1)$$

$$0 = x'(\partial\varphi \,\text{Cos.}\,\Theta \,\text{Cos.}\,\varphi - \partial\Theta \,\text{Sin.}\,\Theta \,\text{Sin.}\,\varphi - \partial\psi \,\text{Cos.}\,\varphi)$$
$$+ y'(\partial\psi \,\text{Sin.}\,\varphi - \partial\varphi \,\text{Cos.}\,\Theta \,\text{Sin.}\,\varphi - \partial\Theta \,\text{Sin.}\,\Theta \,\text{Cos.}\,\varphi)$$
$$+ z'\partial\Theta \,\text{Cos.}\,\Theta \;.\;.\; (2)$$

$$0 = x'(\partial\Theta \,\text{Cos.}\,\Theta \,\text{Sin.}\,\varphi + \partial\varphi \,\text{Sin.}\,\Theta \,\text{Cos.}\,\varphi)$$
$$+ y'(\partial\Theta \,\text{Cos.}\,\Theta \,\text{Cos.}\,\varphi - \partial\varphi \,\text{Sin.}\,\Theta \,\text{Sin.}\,\varphi)$$
$$+ z'\partial\Theta \,\text{Sin.}\,\Theta \;.\;.\; (3)$$

Combinirt man aber die drei letzten Gleichungen auf folgende Art

$$(1)\,\text{Sin.}\,\varphi - (2)\,\text{Cos.}\,\Theta \,\text{Cos.}\,\varphi - (3)\,\text{Sin.}\,\Theta \,\text{Cos.}\,\varphi$$
$$(1)\,\text{Cos.}\,\varphi + (2)\,\text{Cos.}\,\Theta \,\text{Sin.}\,\varphi + (3)\,\text{Sin.}\,\Theta \,\text{Sin.}\,\varphi$$

und

$$(2)\,\text{Sin.}\,\Theta - (3)\,\text{Cos.}\,\Theta,$$

so erhält man nach derselben Ordnung folgende drei sehr einfache Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} px' - qz' = 0 \\ py' - rz' = 0 \\ qy' - rx' = 0 \end{array}\right\} \;.\;.\;.\; \text{(VII)}$$

und von diesen drei Gleichungen ist, wie man sieht, jede eine Folge der beiden andern. Diese Gleichungen gehören aber für eine gerade Linie, nämlich für diejenige, welche während der Rotation des Körpers für jeden Augenblick in Ruhe bleibt, oder mit andern Worten, sie gehören für die *Rotationsaxe* selbst. Wenn diese Axe mit den Coordinatenaxen der x', y', z' in derselben Ordnung die Winkel λ, μ und ν bildet, so hat man, nach den bekannten Elementen der analytischen Geometrie,

$$\text{Cos.}\,\lambda = \frac{q}{s}; \;\text{Cos.}\,\mu = \frac{r}{s}; \;\; \text{Cos.}\,\nu = \frac{p}{s},$$

wo $s = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ ist.

Aber nicht bloſs die Lage der Rotationsaxe, sondern auch die Winkelgeschwindigkeit ω des Körpers um diese Axe hängt

von diesen drei Gröfsen p, q und r ab. Denn betrachtet man denjenigen Punct der Axe der z', der von dem Anfangspuncte der Coordinaten um eine Gröfse entfernt ist, die wir als Einheit annehmen wollen, so hat man für diesen Punct

$$x' = 0; \quad y' = 0 \text{ und } z' = 1.$$

Substituirt man aber diese Werthe von x', y', z' in den im Anfange dieses Abschnitts gegebenen Gleichungen zwischen x, y, z und x', y', z', so erhält man

$$x = \text{Sin.}\,\Theta\ \text{Sin.}\,\psi$$
$$y = \text{Sin.}\,\Theta\ \text{Cos.}\,\psi$$
$$z = \text{Cos.}\,\Theta.$$

Die Geschwindigkeit dieses Punctes, parallel mit den drei Coordinaten zerlegt, ist aber

$$\frac{\partial x}{\partial t};\ \frac{\partial y}{\partial t} \text{ und } \frac{\partial z}{\partial t},$$

oder, wenn man wieder nach der Differentiation den Winkel $\psi = 0$ setzt,

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial t}\ \text{Sin.}\,\Theta;\ \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial \Theta}{\partial t}\ \text{Cos.}\,\Theta;\ \frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{\partial \Theta}{\partial t}\ \text{Sin.}\,\Theta,$$

also ist auch die eigentliche Geschwindigkeit dieses Punctes gleich

$$\frac{1}{\partial t}\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2} = \frac{1}{\partial t}\sqrt{\partial \Theta^2 + \partial \psi^2\,\text{Sin.}^2\Theta},$$

das heifst, gleich

$$\sqrt{q^2 + r^2}.$$

Es ist aber die Winkelgeschwindigkeit $\partial \omega$ jedes Punctes gleich der absoluten Geschwindigkeit $\sqrt{q^2 + r^2}$ desselben, dividirt durch die Entfernung dieses Punctes von der Rotationsaxe, welche Entfernung gleich

$$\text{Sin.}\ \nu = \sqrt{\frac{q^2 + r^2}{p^2 + q^2 + r^2}}$$

ist. Man hat aber für die gesuchte Winkelgeschwindigkeit

$$\partial \omega = \sqrt{q^2 + p^2 + r^2}$$

und daher auch

$$p = \partial \omega\,\text{Cos.}\,\nu;\ q = \partial \omega\,\text{Cos.}\,\lambda;\ r = \partial \omega\,\text{Cos.}\,\mu.$$

In allem Vorhergehenden sind die Axen der drei senkrechten Coordinaten x, y, z der Lage nach willkürliche, aber im Raume fixe Linien, während die Axen der drei anderen senkrechten Coordinaten x', y', z', die denselben Anfangspunct haben, in dem Körper fix, also auch mit ihm selbst beweglich sind. Die Coordinaten x, y, z sind für jeden Augenblick dieselben für alle Elemente des Körpers (wie z. B. die Coordinaten des Schwerpuncts desselben), aber sie ändern sich mit jedem Augenblicke (wie der Schwerpunct sich bewegt), oder endlich, sie sind *Functionen der Zeit.* Die Coordinaten x', y', z' aber (deren Axen mit den drei freien Axen des Körpers für den gemeinschaftlichen Anfangspunct dieser beiden Coordinatensysteme zusammenfallen), die mit dem Körper selbst sich im Raume bewegen, bestimmen die Lage eines Elements des Körpers gegen den Anfangspunct und ändern sich daher nur bei dem Uebergange von einem Elemente des Körpers zum anderen, während sie für dasselbe Element auch immer dieselben Werthe haben, oder endlich, diese Coordinaten x', y', z' sind Functionen der Gestalt des Körpers, aber von der Zeit ganz unabhängig.

Betrachten wir nun die Oscillationen eines Körpers, auf den keine äufseren Kräfte wirken und der sich überdiefs sehr nahe um eine seiner freien Axen bewegt. Diese Voraussetzung giebt $N = N' = N'' = 0$, so dafs daher die Gleichungen (VI) in folgende übergehn:

$$\left.\begin{aligned} \partial p + \frac{B-A}{C}\, q r \partial t &= 0 \\ \partial q + \frac{C-B}{A}\, p r \partial t &= 0 \\ \partial r + \frac{A-C}{B}\, p q \partial t &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{(VIII)}$$

Dreht sich also der Körper sehr nahe um die freie Axe der z', so sind q und r sehr kleine Gröfsen, deren Producte und Quadrate man vernachlässigen kann. Dadurch giebt die erste der Gleichungen (VIII)

$$\partial p = 0 \text{ oder } p = \text{Const.}$$

Es bleiben daher nun die beiden anderen dieser Gleichungen

übrig und die Integrale derselben haben, wie man sich durch Differentiation überzeugen kann, die Form

$$\left.\begin{array}{l} q = M \,\text{Sin.}(nt + m) \\ r = M' \,\text{Cos.}(nt + m) \end{array}\right\} \ldots \quad (f)$$

wo M, M′, m und n constante Gröſsen bezeichnen und wo man hat

$$n = p \sqrt{\frac{(C-A)\,(C-B)}{AB}}$$

und

$$M' = -M \sqrt{\frac{A\,(C-A)}{B\,(C-B)}}.$$

Diese Ausdrücke zeigen, daſs die Gröſsen n und M′ nur dann reelle Gröſsen sind, wenn das Moment der Trägheit

$$C = \int (x'^2 + y'^2)\, \partial m$$

in Beziehung auf die eigentliche Rotationsaxe der z′ entweder das gröſste oder das kleinste der drei Momente A, B, C ist. In diesem Falle sind also q und r, wie die Gleichungen (f) zeigen, in der That die Sinus und Cosinus von solchen Winkeln, die mit der Zeit gleichförmig zunehmen, und die Veränderungen der Rotation sind daher alle nur periodisch oder in bestimmte Grenzen eingeschlossen, d. h. die Rotationsaxe macht nur kleine Oscillationen um ihre ursprüngliche Lage, welche letztere, für $t = 0$, durch die beiden Gleichungen

$$q = M\,\text{Sin.}\,m \quad \text{und} \quad r = M'\,\text{Cos.}\,m$$

gegeben ist. Da nämlich die Gröſsen q und r, der Voraussetzung gemäſs, nur klein sind, so werden auch die Gröſsen M und M′ immer nur klein seyn können. Ist aber (C — A) (C — B) negativ oder ist C zwischen den beiden Momenten A und B, so ist n und M′ imaginär, und die trigonometrischen Functionen der Gleichungen (f) verwandeln sich in Exponentialgröſsen, die nicht mehr, wie jene, periodisch sind, sondern die mit der Zeit ohne Ende wachsen können. In diesem Falle kann also schon die geringste Störung die ursprüngliche Rotationsaxe über alle Grenzen hinaus ändern. Da bei der Sonne, den Planeten und den Satelliten unsers Systems diese *Stabilität* der Rotation, den Beobachtungen der Astronomen gemäſs, statt findet, so müs-

sen sich auch alle diese Himmelskörper sehr nahe um eine solche freie Axe drehn, für welche das Moment der Trägheit ein Gröſstes oder ein Kleinstes ist, wahrscheinlich ein Gröſstes, weil wegen der durch die Rotation erzeugten Abplattung die Rotationsaxe kleiner ist, als der Durchmesser des Aequators, so daſs also auch das Moment der Trägheit in Beziehung auf die Rotationsaxe gröſser seyn muſs, als auf den Durchmesser des Aequators.

Um nun auch die Lage der drei freien Axen des Körpers im Raume zu bestimmen, wollen wir annehmen, daſs die dritte freie Axe der z' sehr nahe mit der Axe der z zusammenfällt, so daſs also Θ nur einen kleinen Winkel bezeichnet, dessen Quadrat wir vernachlässigen können. Setzt man der Kürze wegen

$$s = \mathrm{Sin.}\,\Theta\,\mathrm{Sin.}\,\varphi \text{ und } u = \mathrm{Sin.}\,\Theta\,\mathrm{Cos.}\,\varphi,$$

so gehn die obigen Gleichungen (e) in folgende über:

$$\begin{aligned} p\,\partial t &= \partial\varphi - \partial\psi \\ q\,\partial t &= s\,\partial\psi - \partial\Theta\,\mathrm{Cos.}\,\varphi \\ r\,\partial t &= u\,\partial\psi + \partial\Theta\,\mathrm{Sin.}\,\varphi \end{aligned}$$

oder auch, da $\partial s = \partial\Theta\,\mathrm{Sin.}\,\varphi + u\,\partial\varphi$ und $\partial u = \partial\Theta\,\mathrm{Cos.}\,\varphi - s\,\partial\varphi$ ist,

$$\begin{aligned} p\,\partial t &= \partial\varphi - \partial\psi \\ q\,\partial t &= s(\partial\varphi - p\,\partial t) - \partial\Theta\,\mathrm{Cos.}\,\varphi \\ r\,\partial t &= u(\partial\varphi - p\,\partial t) + \partial\Theta\,\mathrm{Sin.}\,\varphi, \end{aligned}$$

so daſs man daher hat

$$\begin{aligned} \partial\psi &= \partial\varphi - p\,\partial t \\ \frac{\partial s}{\partial t} &= r + p\,u \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -q - p\,s \end{aligned}$$

und davon sind die Integrale

$$\left.\begin{aligned} \psi &= \varphi - p\,t - \alpha \\ s &= \beta\,\mathrm{Sin.}\,(p\,t + \gamma) - \frac{q}{p} \\ u &= \beta\,\mathrm{Cos.}\,(p\,t + \gamma) - \frac{r}{p} \end{aligned}\right\} \;\ldots\; (g)$$

wo α, β, γ constante Gröſsen bezeichnen. Durch die Glei-

chungen (f) und (g) ist unsere Aufgabe vollständig gelöst. Denn jene geben die Werthe von q und r als Functionen von t, und von den Gleichungen (g) geben die beiden letzten die Werthe von s und u, also auch von Θ und φ als Functionen von t, und wenn also φ bekannt ist, so kennt man auch ψ durch die erste der Gleichungen (g). Die Winkelgeschwindigkeit der Rotation aber ist nach dem Vorhergehenden

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$$

oder einfacher

$$\omega = p,$$

wenn man nämlich wieder die Quadrate von q und r wegläfst, so dafs also diese Geschwindigkeit nahe constant ist.

Wenn man für den Anfang der Rotation genau $q = 0$ und $r = 0$ hat, das heifst, wenn die Rotationsaxe mit der dritten freien Axe der z' genau zusammenfällt, so ist in dem Vorhergehenden auch M und M' gleich Null, oder die Gröfsen q und r bleiben selbst immer gleich Null, oder endlich, die Rotationsaxe fällt immer mit dieser dritten freien Axe zusammen. Wenn daher ein Körper anfängt, sich genau um eine seiner freien Axen zu drehen, so wird er sich auch immerfort, und zwar mit constanter Geschwindigkeit, um diese Axe drehn, so lange keine äufseren Kräfte seine Rotation stören. Diese Eigenschaft aber kommt nur den freien Axen zu, wie man sich aus dem Vorhergehenden leicht überzeugen wird. Nur die drei freien Axen des Körpers geben also zugleich unveränderliche Rotationsaxen, und unter ihnen geben nur die zwei, deren Trägheitsmomente ein Gröfstes und ein Kleinstes sind, eine stabile Rotation, während die dritte Axe, wenn sie die Rotationsaxe ist, schon durch die geringste Störung sehr grofse Aenderungen in ihrer Lage erleiden kann.

D. Unabhängigkeit der progressiven uud der rotirenden Bewegung der Körper.

Die Gleichungen für die fortschreitende Bewegung eines Körpers, dessen Massenelement ∂m ist, sind nach dem Vorhergehenden

$$\int \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \partial m = \int X \partial m,$$

$$\int \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \partial m = \int Y \partial m,$$

$$\int \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \partial m = \int Z \partial m,$$

wo X, Y, Z die Summen der auf den Körper wirkenden und nach den Richtungen der Coordinaten x, y, z zerlegten Kräfte bezeichnen und wo die Integrale sich auf die Masse des ganzen Körpers erstrecken. Ist aber $M = \int \partial m$ die Masse des ganzen Körpers und sind x_1, y_1, z_1 die Coordinaten seines Schwerpuncts, so hat man

$$M x_1 = \int x \partial m, \quad M y_1 = \int y \partial m, \quad M z_1 = \int z \partial m.$$

Differentiirt man die letzten Gleichungen zweimal in Beziehung auf die Zeit t, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} M \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} &= \int \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} . \partial m \\ M \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} &= \int \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} . \partial m \\ M \frac{\partial^2 z_1}{\partial t^2} &= \int \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} . \partial m \end{aligned}\right\} \ldots \text{(h)}$$

und wenn man die Gleichungen (h) mit den vorhergehenden ersten drei Gleichungen zusammenstellt, so hat man

$$\left.\begin{aligned} M \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} &= \int X \partial m \\ M \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} &= \int Y \partial m \\ M \frac{\partial^2 z_1}{\partial t^2} &= \int Z \partial m \end{aligned}\right\} \ldots \text{(i)}$$

woraus sofort folgt, daſs während der ganzen Zeit der Bewegung des Körpers der Schwerpunct G desselben sich durchaus nur so bewegt, als ob die ganze Masse M des Körpers in diesem Puncte vereinigt wäre und als ob die Kräfte X, Y, Z unmittelbar in ihren alten Richtungen an diesen Punct G an-

gebracht würden. Diese Gleichungen (i) werden also die *progressive* Bewegung des Körpers geben. Die *rotirende* Bewegung desselben aber wird durch die Gleichungen (e) und (VI) gegeben seyn, wenn man in den letzten den Schwerpunct G für den Anfang der Coordinaten annimmt. Wenn daher die Kräfte X, Y, Z von ihrer absoluten Lage im Raume abhängen, so werden die Coordinaten der einzelnen Elemente des Körpers, von welchen jene Kräfte Functionen sind, zugleich in diese beiden Systeme von Gleichungen (für die progressive und für die rotirende Bewegung) eintreten, und man wird daher das eine dieser Systeme nicht ohne das andere integriren können, oder mit andern Worten, die beiden Bewegungen, die progressive und die rotirende, werden einander gegenseitig bestimmen und eine von der andern abhängig seyn. Man wird daher diese beiden Systeme im Allgemeinen nie anders, als durch Approximation integriren können. Doch giebt es zwei Fälle, in welchen von diesem allgemeinen Satze eine Ausnahme statt findet.

I. Wenn der Körper bloſs der Wirkung der Schwere unterworfen ist. Dann werden nämlich die Gleichungen (i) für die progressive Bewegung dieselben mit denen seyn, welche die Bewegung eines materiellen Punctes im Raume bestimmen. Welches dann auch die Gestalt des Körpers und welches auch seine Bewegung um den Schwerpunct seyn mag, dieser Schwerpunct wird im freien Raume eine Parabel beschreiben, von welcher die Richtung der ursprünglichen Geschwindigkeit die erste Tangente ist und deren Parameter nur von der Gröſse dieser Geschwindigkeit abhängen wird, ganz so, wie wir oben[1] für einen materiellen Punct im leeren Raume gefunden haben. Da überdieſs das Gewicht des Körpers als eine in seinem Schwerpuncte angebrachte Kraft zu betrachten ist, so wird dieses Gewicht keinen Einfluſs auf die rotirende Bewegung des Körpers äuſsern, welche bloſs von dem anfänglichen Stoſse, den der Körper erhält, abhängen und dieselbe bleiben wird, als wenn der Schwerpunct des Körpers nicht aus seiner Stelle gerückt worden wäre. Es sey z. B. der Körper ein Ellipsoid von durchaus homogener Masse DHEK, der von einem andern Körper in dem Puncte E seiner Oberfläche

Fig. 160.

1 S. Art. *Ballistik.* Bd. I. S. 721.

einen Stoſs erhält. Ist dann EF die Normale dieser Oberfläche für den Punct E und GD eine mit dieser Normale parallele Gerade, die durch den Schwerpunct G geht, so wird, wenn das Ellipsoid bloſs der Schwere unterworfen ist, der Punct G eine Parabel beschreiben, von welcher GD die erste Tangente ist. Nehmen wir an, daſs der Schnitt HEK, in dessen Ebene der Punct G und die Linie EF liegen, zwei von den drei Axen des Ellipsoids in sich enthalte. Sind 2a und 2b diese Axen, und ist C das Trägheitsmoment in Beziehung auf die dritte Axe und M die Masse des Körpers, so hat man[1]

$$C = \tfrac{1}{5} M(a^2 + b^2).$$

Allein der Körper muſs sich um den Punct G drehn, und zwar so, als ob die Schwere gar nicht auf ihn wirkte und als ob dieser Punct G gar keine progressive Bewegung hätte; also wird auch die auf den Schnitt HEK senkrechte Axe ganz unbeweglich bleiben. Ist nun ω die Winkelgeschwindigkeit des Körpers um diese letzte Axe, und nennt man V die anfängliche Geschwindigkeit des Punctes G, also auch MV die Quantität der Bewegung des Körpers, so hat man, wenn $h = GL$ das Loth von G auf die Normale EF bezeichnet, nach der obigen Gleichung (a)

$$\omega = \frac{MhV}{C}$$

oder, wenn man für C seinen vorhergehenden Werth substituirt,

$$\omega = \frac{5hV}{a^2 + b^2},$$

und diese Gleichung zeigt zugleich die Abhängigkeit der beiden Geschwindigkeiten ω und V, der Rotation und der progressiven Bewegung, die alle beide in dem anfänglichen Stoſse, den der Körper erhielt, ihren gemeinschaftlichen Ursprung haben. Demnach werden also alle Puncte des Ellipsoids Parabeln beschreiben, die sämmtlich der von dem Schwerpuncte beschriebenen Parabel parallel sind, und zugleich wird der Körper sich gleichförmig um die auf den Schnitt HEK

1 S. Art. *Moment.* Bd. VI. S. 2332.

senkrechte Axe drehn, welche Axe selbst sich wieder progressiv im Raume parallel mit sich selbst bewegt.

II. Der zweite Fall, wo die rotirende und die progressive Bewegung von einander unabhängig sind, tritt bei einer Kugel ein, die entweder eine ganz homogene Masse enthält, oder aus concentrischen Schichten besteht, deren Puncte alle von anderen, ruhenden oder selbst wieder bewegten Körpern, im verkehrten Verhältnisse des Quadrats ihrer Distanzen angezogen werden. Dann wird nämlich, wie bekannt, die Bewegung der Kugel dieselbe seyn, als ob ihre ganze Masse in ihrem Mittelpuncte vereinigt wäre, und dieser Mittelpunct wird sich daher wie ein ganz isolirter Punct im Raume fortbewegen, während die rotirende Bewegung der Kugel von den auf sie wirkenden Kräften unabhängig und völlig dieselbe seyn wird, als wenn der Schwerpunct derselben in Ruhe geblieben wäre, so dafs also auch in diesem zweiten Falle die rotirende und die progressive Bewegung wieder von einander ganz unabhängig seyn werden.

E. Gleichungen der Rotationsflächen.

Da bei physischen Untersuchungen diejenigen Körper so oft vorkommen, die durch Rotation der krummen Linien um irgend eine feste Axe entstehn, so wird es nicht unangemessen seyn, in diesen beiden letzten Abschnitten E und F des Artikels *Umdrehung* das Vorzüglichste über diese durch Umdrehung entstandenen Körper kurz zusammenzustellen.

Was nun zuerst die Ableitung der Gleichung für die Rotationsfläche aus der für die rotirende Curve betrifft, so sey die Gleichung dieser Curve zwischen den beiden senkrechten Coordinaten z und y gegeben und die Coordinatenaxe der z soll zugleich die Rotationsaxe der Curve seyn. Da während der Drehung der Curve die Ordinate y immer denselben Werth beibehält, weil sie den Halbmesser des Kreises bezeichnet, den ihr Endpunct während der Drehung beschreibt, so wird man offenbar in der zwischen z und y gegebenen Gleichung der Curve nur statt y die Gröfse $\sqrt{y^2 + x^2}$ substituiren, um die gesuchte Gleichung der Rotationsfläche zu erhalten, in welcher daher x, y und z die drei unter sich senkrechten

Coordinaten dieser Fläche bezeichnen. So hat man für die Ellipse, deren Halbaxen a und b sind, wenn die Abscissen z auf deren grofser Axe 2a vom Mittelpuncte genommen werden,

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

also ist auch sofort

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{y^2 + x^2}{b^2} = 1$$

die Gleichung der Fläche, die durch Rotation der Ellipse um ihre grofse Axe entsteht. Werden aber die Abscissen z auf der kleinen Axe 2b genommen, so ist die Gleichung der Ellipse

$$\frac{z^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

also auch

$$\frac{z^2}{b^2} + \frac{z^2 + x^2}{a^2} = 1$$

die Gleichung der Fläche, die durch Rotation der Ellipse um ihre kleine Axe entsteht.

Dieses sehr einfache Verfahren setzt also voraus, dafs die Coordinatenaxe der z auch schon zugleich die Rotationsaxe der Curve ist. Ist aber dieses nicht der Fall, se mufs man zuerst die Gleichung der Curve so ändern, dafs beide Axen zusammenfallen. Um auch davon ein Beispiel zu geben, sey wieder die Gleichung der Ellipse

$$\frac{z'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

wo die Abscisse $CQ = z'$ auf der grofsen Axe und die Ordinate $QM = y'$ darauf senkrecht ist. Fig. 161.

Die Rotationsaxe AP soll mit der grofsen Axe CQ der Ellipse den Winkel Θ bilden, und $CA = c$ soll das Loth seyn, das von dem Mittelpuncte C der Ellipse auf diese Rotationsaxe gefällt wird. Sind dann die beiden auf einander senkrechten Linien $AP = z$ und $PM = y$, so hat man, wie man leicht sieht,

$$z' = z \operatorname{Cos.} \Theta + (y - c) \operatorname{Sin.} \Theta$$

und

$$y' = (y - c) \operatorname{Cos.} \Theta - z \operatorname{Sin.} \Theta.$$

Substituirt man diese Werthe von y' und z' in der vorhergehenden Gleichung der Ellipse, so erhält man für die Fläche, die durch Rotation der Ellipse um die Axe AP entstanden ist, die Gleichung

$$\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}\right)\text{Sin.}^2\Theta+\left(\frac{u^2}{b^2}+\frac{z}{a^2}\right)\text{Cos.}^2\Theta$$

$$+\frac{(b^2-a^2)^2}{a^2b^2}\,uz\,\text{Sin.}\,2\Theta=1 \quad \ldots\ldots \quad (IX)$$

wo der Kürze wegen $u=\sqrt{x^2+y^2}-c$ gesetzt worden ist. Setzt man in der letzten Gleichung $\Theta=0$, so hat man

$$\frac{u^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$$

oder

$$a\sqrt{x^2+y^2}-b\sqrt{a^2-z^2}=ac$$

für den Fall, wo die Rotationsaxe der z mit der grofsen Axe $CQ=a$ der Ellipse parallel ist. Ist überdiefs $c=0$ oder fällt die Rotationsaxe mit der grofsen Axe zusammen, so ist

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1, \text{ wie zuvor,}$$

für das sogenannte *verlängerte Sphäroid.*

Setzt man aber in der Gleichung (IX) den Winkel $\Theta=90°$, so hat man

$$\frac{u^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

oder

$$b\sqrt{x^2+y^2}-a\sqrt{b^2-z^2}=bc$$

für den Fall, wo die Rotationsaxe der z mit der kleinen Axe $CB=b$ der Ellipse parallel ist.

Ist auch hier wieder $c=0$ oder fällt die Rotationsaxe mit der kleinen Axe der Ellipse zusammen, so ist

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1, \text{ wie zuvor,}$$

für das sogenannte *abgeplattete Sphäroid.* Ist ferner $a=b$, so geht die Gleichung (IX) in die folgende über

$$\frac{u^2+x^2}{a^2}\,\text{Sin.}^2\Theta+\frac{u^2+x^2}{a^2}\,\text{Cos.}^2\Theta=1$$

oder

$$u^2 + x^2 = a^2,$$

das heifst,

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 - c^2 + 2c\sqrt{y^2 + z^2}$$

oder auch

$$\sqrt{y^2 + z^2} - \sqrt{a^2 - x^2} = c$$

für die Fläche, die durch die Rotation eines Kreises vom Halbmesser a um eine Axe entsteht, deren senkrechte Entfernung von dem Mittelpuncte gleich c ist. Ist in dem letzten Falle c gleich Null, so erhielt man

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

für die Fläche, die durch die Rotation eines Kreises vom Halbmesser a um seinen Durchmesser entsteht, d. h. für eine *Kugel.*

Die Theorie der durch Rotation entstandenen Flächen läfst sich noch allgemeiner auf folgende Art geben. Sind die Gleichungen der geradlinigen Rotationsaxe

$$x = Az + \alpha$$

und

$$y = Bz + \beta,$$

so ist die *allgemeine Gleichung* aller Rotationsflächen

$$(x-\alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = F.(Ax + By + z) \ldots (X),$$

wo F irgend eine willkürliche Function bedeutet, so dafs z. B. $F.(Ax + By + z)$ gleich $(Ax + By + z)$ oder gleich $\text{Log.}(Ax + By + z)$ u. dgl. seyn kann. Ist die Rotationsaxe zugleich die Axe der z, sô hat man, da die Gleichungen der Coordinatenaxe der z sind $x = 0$ und $y = 0$, oder da hier die Gröfsen A und B, so wie a und b verschwinden,

$$x^2 + y^2 = Fz$$

oder, was dasselbe ist,

$$z = \varphi.(x^2 + y^2) \ldots (X'),$$

wo wieder φ eine willkürliche Function bezeichnet.

Differentiirt man die Gleichung (X) in Beziehung auf z und x, so erhält man

$$2(x-\alpha) + 2z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = F'.(Ax + By + z).\left[A + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]$$

und ebenso, wenn man in Beziehung auf z und y differentiirt,

$$2(y-\beta)+2z\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=F'.(Ax+By+z).\left[B+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right].$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen die Gröfse $F'.(Ax+By+z)$, so erhält man

$$(\beta-y+Bz)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)-(\alpha-x+Az)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$
$$+A(\beta-y)-B(\alpha-x)=0\;\ldots\;(XI)$$

und dieses ist eine ebenso allgemeine Gleichung aller Rotationsflächen, wie die Gleichung (X), nur mit dem Unterschiede, dafs die Gleichung (X) eine willkürliche Function und (XI) im Gegentheile partielle Differentiale enthält. Ist die Rotationsaxe zugleich die Coordinatenaxe der z, so ist wieder $A=B=\alpha=\beta=0$, und daher die Gleichung (XI)

$$y\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)-x\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0\;\ldots\;(XI')$$

Beide Gleichungen (X) und (XI) sind so allgemein, dafs durch sie über die Curve, durch deren Umdrehung die Rotationsfläche entstehn soll, nichts ausgesagt wird und dafs daher diese Curve eine ganz willkürliche seyn kann.

Es ist wichtig, diesen merkwürdigen Unterschied der Gleichungen mit endlichen Gröfsen, mit gewöhnlichen Differentialen und endlich mit partiellen Differentialen gehörig aufzufassen. Die Gleichung

$$(x-A)^2+(y-B)^2+(z-C)^2=R^2$$

z. B. zwischen endlichen Gröfsen gehört bekanntlich für eine Kugel, deren Halbmesser R und deren Coordinaten des Mittelpuncts A, B und C sind, und durch diese Gleichung ist die Gröfse und Lage der Kugel vollkommen bestimmt, so dafs nur eine individuelle Kugel an einem bestimmten Orte durch diese Gleichung ausgedrückt wird. Differentiirt man sie aber in Beziehung auf x, y und z, so erhält man

$$(x-A)\partial x+(y-B)\partial y+(z-C)\partial z=0,$$

und diese Gleichung gehört offenbar auch noch für eine Kugel, deren Mittelpunct die Coordinaten A, B, C hat, wie die vorige. Aber über den Halbmesser, über die Gröfse dieser Kugel wird durch die letzte Gleichung nichts ausgesagt, so dafs daher die dieser Gleichung entsprechende Kugel von

einem ganz willkürlichen Halbmesser seyn kann, oder dafs sie alle Kugeln bezeichnet, die denselben Mittelpunct haben, welches auch ihre Halbmesser seyn mögen. Differentiirt man die letzte Gleichung noch einmal und nimmt man dabei ∂x constant, so erhält man

$$\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 + (y-B)\partial^2 y + (z-C)\partial^2 z = 0$$

und diese Gleichung ist nicht nur von R, sondern auch von A unabhängig, so dafs daher die durch sie ausgedrückte Kugel einen ganz willkürlichen Halbmesser hat und dafs auch noch ihr Mittelpunct eine von der Ebene der yz ganz willkürliche Distanz A haben kann. Und so wird man sich durch fortgesetztes Differentiiren immer mehrere Gleichungen verschaffen, aus denen man dann auch so viele der Constanten, als man will, durch Elimination wegschaffen kann. Jede dieser Gleichungen, so wie auch jede Combination derselben, wird wieder für eine Kugel gehören, und je weniger von diesen Constanten in jeder dieser Gleichungen vorkommen, desto allgemeiner wird dadurch die Kugel in Beziehung auf ihre Gröfse und Lage ausgedrückt erscheinen.

Die Gleichungen der Curven und Flächen mit *gewöhnlichen Differentialen* sind also viel allgemeiner, als die mit endlichen Gröfsen, aber sie drücken doch immer nur eine bestimmte Gattung von Curven und Flächen, z. B. im letzten Falle immer nur wieder eine *Kugel* aus, an der aber einige ihre Gröfse und Lage bedingende Bestimmungsstücke unserer Willkür überlassen bleiben. Noch viel allgemeiner aber sind die Gleichungen der Flächen mit *partiellen Differentialen.* Sie drücken nämlich weder die Gröfse, noch die Lage, noch selbst die Form der Fläche aus, sondern sie beziehn sich nur auf die Art, auf welche diese Fläche entstanden ist. So drückt die Gleichung

$$y\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - x\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

blofs aus, dafs die zu ihr gehörende Fläche durch Rotation einer Curve um die Axe der z entstanden ist, ohne etwas über die Natur dieser Curve selbst weiter zu bestimmen, einer Curve, die daher ganz willkürlich ist und selbst discontinuirlich oder auch aus mehreren Curven zusammengesetzt seyn

kann, wie es z. B. eine Curve seyn würde, die man aus freier Hand ganz willkürlich gezogen hätte.

Ist nun die krumme Linie gegeben und die Fläche zu suchen, welche durch die Rotation jener Curve um eine gegebene Axe entsteht, so wird die Auflösung dieses Problems in der Bestimmung der Function φ bestehn, die der Bedingung des Problems genug thut. Sind nämlich $U=0$ und $V=0$ die Gleichungen der gegebenen Curve von doppelter Krümmung, so wird man aus ihnen und aus den beiden folgenden Gleichungen

$$Ax + By + z = \omega$$

und

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + z^2 = \varphi\,\omega$$

nur die Gröfsen x, y und z eliminiren, wodurch man eine Gleichung zwischen $\varphi\omega$ und ω erhält, und diese wird uns die Form der gesuchten Function $\varphi\,\omega$ geben.

Um dieses auf ein Beispiel anzuwenden, sey die gegebene Curve eine Ellipse in der Ebene der xz, deren halbe grofse und kleine Axe a und b sind. Der Mittelpunct dieser Ellipse sey von dem Anfangspuncte der Coordinaten um die Gröfse $x=c$ entfernt, so dafs demnach die Gleichungen dieser Ellipse sind

$$\left.\begin{array}{c} y=0 \\ \left(\frac{x-c}{a}\right)^2 + \frac{z^2}{b^2} = 1 \end{array}\right\}$$

Ist die Rotationsaxe zugleich die Axe der z, so hat man $\alpha=\beta=0$, also auch

$$\left.\begin{array}{c} z = \omega \\ x^2 + y^2 + z^2 = \varphi\,\omega \end{array}\right\}$$

Eliminirt man aus den letzten vier Gleichungen die drei Gröfsen x, y, z, so erhält man

$$c + \frac{a}{b}\sqrt{b^2-\omega^2} = \sqrt{\varphi\,\omega-\omega^2},$$

so dafs demnach die gesuchte Gleichung der Rotationsfläche seyn wird

$$c + \frac{a}{b}\sqrt{b^2-z^2} = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Ist $c = a$, so hat man

$$ab + a\sqrt{b^2 - z^2} = b\sqrt{x^2 + y^2}$$

für die Fläche, die durch Rotation der Ellipse um die Tangente im Scheitel der grofsen Axe entsteht. Ist aber $c = 0$, so erhält man

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

für die Fläche, welche durch Rotation der Ellipse um ihre kleine Axe entsteht, oder man erhält die Gleichung des abgeplatteten Sphäroids, mit dem Obigen übereinstimmend. Ist endlich $a = b$, so hat man

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

für die bekannte Gleichung der Kugel.

F. Bestimmung der Oberfläche und des Volums derjenigen Körper, die durch Umdrehung von Curven entstanden sind.

Nachdem wir in dem vorhergehenden Abschnitte gezeigt haben, wie man in allen Fällen die Gleichungen der Rotationsflächen finden könne, ist nur noch übrig, die *Complanation* (oder den Inhalt dieser Oberflächen) und die *Cubatur* (oder den körperlichen Inhalt des von diesen Oberflächen eingeschlossenen Raumes) zu bestimmen. Wir wollen im Folgenden den Flächeninhalt dieser Körper durch F und das Volumen oder den körperlichen Inhalt derselben durch V bezeichnen. Ist dann die Gleichung irgend einer, auch nicht durch Rotation entstandenen Fläche durch die drei senkrechten Coordinaten x, y, z gegeben, so sucht man daraus die partiellen Differentiale $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ und $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$, und dann erhält man die Oberfläche derselben durch die Gleichung

$$F = \iint \partial x \partial y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

und das Volumen derselben durch

$$V = \iiint \partial x \partial y \partial z.$$

Für Rotationsflächen aber, die durch die Umdrehung einer

Curve entstehn, vorausgesetzt, dafs die Rotationsaxe zugleich die Coordinatenaxe der x ist, hat man die einfacheren Ausdrücke

$$F = 2\pi\int y \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}$$

und

$$V = \pi\int y^2 \partial x,$$

wo π die Peripherie des Kreises bezeichnet, dessen Durchmesser der Einheit gleich ist. Dreht sich z. B. eine Parabel, deren Gleichung $y^2 = ax$ ist, um die Axe der x, so ist die Oberfläche des so entstehenden Körpers, des sogenannten parabolischen Konoids,

$$F = \pi\int\partial x \sqrt{a^2 + 4ax} = \frac{\pi}{6a}(a^2 + 4ax)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6}a^2\pi,$$

wenn diese Oberfläche vom Scheitel der Parabel gezählt oder wenn $F = 0$ für $x = 0$ genommen wird. Dreht sich ein Kreis vom Halbmesser a um einen seiner Durchmesser und nimmt man die Abscissen auf diesem Durchmesser vom Mittelpuncte an, so hat man für die Gleichung des Kreises

$$x^2 + y^2 = a^2$$

und für die *Oberfläche des Kugelstücks*, das zur Absoisse x gehört,

$$F = 2a\pi\int\partial x = 2a\pi x,$$

so dafs F mit x zugleich verschwindet. Dieser Ausdruck für $x = a$ doppelt genommen giebt die *Oberfläche der ganzen Kugel* gleich $4a^2\pi$ oder viermal so grofs, als die Oberfläche eines ihrer gröfsten Kreise, welche letztere bekanntlich gleich $a^2\pi$ ist.

Dreht sich eine Ellipse, deren Gleichung ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

um die Abscissenaxe der x, d. h. um ihre grofse Axe 2a, so erhält man, wenn $a^2 e^2 = a^2 - b^2$ gesetzt wird, für die Oberfläche des *verlängerten Sphäroids*

$$F = 2b\pi\int\partial x \sqrt{1 - \frac{e^2 x^2}{a^2}}$$

oder, wenn man nach den bekannten Vorschriften integrirt,

$$F = \frac{b\pi x}{a}\sqrt{a^2 - e^2 x^2} + \frac{ab\pi}{e} \text{Arc. Sin.} \frac{e}{a},$$

wo F mit x zugleich verschwindet. Nimmt man dieses Integral von $x = 0$ bis $x = a$ doppelt, so erhält man für die *Oberfläche des ganzen verlängerten Sphäroids* den Ausdruck:

$$2b^2\pi + \frac{2ab\pi}{e} \text{Arc. Sin. } e.$$

Für $e = 0$ oder $a = b$ giebt der letzte Ausdruck die Oberfläche der Kugel gleich $4a^2\pi$, wie zuvor. Dreht sich aber dieselbe Ellipse, deren Gleichung

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

ist, um ihre kleine Axe $2b$, die zugleich die Coordinatenaxe der x ist, so findet man für die *Oberfläche des abgeplatteten Sphäroids*

$$F = 2a\pi \int \partial x \sqrt{1 + \frac{a^2 e^2 x^2}{b^4}},$$

oder, wenn man diesen Ausdruck integrirt,

$$F = \frac{a\pi x}{b^2}\sqrt{b^4 + a^2 e^2 x^2} + \frac{b^2\pi}{e} \text{Log.} \left(\frac{aex + \sqrt{b^4 + a^2 e^2 x^2}}{b^2}\right) - \frac{2b^2\pi}{e} \text{Log. } b,$$

wenn F mit x zugleich verschwindet. Nimmt man diesen Ausdruck für $x = +b$ und dann für $x = -b$, so giebt die Differenz beider Werthe für die gesuchte Oberfläche des ganzen abgeplatteten Sphäroids den Ausdruck

$$2a^2\pi + \frac{b^2\pi}{e} \text{Log.} \frac{1+e}{1-e}.$$

Für $e = 0$ oder $a = b$ giebt der letzte Ausdruck die Oberfläche der Kugel gleich $4a^2\pi$, wie zuvor.

Wenn eine Gerade von gegebener Länge sich so bewegt, dafs ihre beiden Endpuncte immer auf den zwei Schenkeln eines rechten Winkels bleiben, so beschreiben die aufeinander folgenden Durchschnittspuncte dieser beweglichen Geraden eine Curve, welche die Gestalt ADBE hat und die man von ihrer Form die *Astrois* nennen kann. Ist C der Fig. 162.

Scheitel des rechten Winkels und ist $\frac{AB}{2} = \frac{DE}{2} = a$ die erzeugende Gerade, so hat man, wenn man $CP = x$ und $PM = y$ setzt, für die Gleichung dieser Curve

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Dieselbe Gleichung kann man auch durch Einführung eines Hülfswinkels φ durch die beiden folgenden Gleichungen ausdrücken:

$$x = a\ \mathrm{Cos.}^3\varphi \text{ und } y = a\ \mathrm{Sin.}^3\varphi,$$

wo dann die Oberfläche F des Körpers, der durch Rotation der Astrois um die Axe der x entsteht, gleich ist

$$F = -6a^2\pi \int \partial\varphi\, \mathrm{Sin.}^4\varphi\, \mathrm{Cos.}\varphi = -\tfrac{6}{5}a^2\pi\, \mathrm{Sin.}^5\varphi + \tfrac{6}{5}a^2\pi,$$

wenn F mit $\varphi = 90^\circ$ verschwindet. Dieser Ausdruck für $\varphi = 0$ doppelt genommen giebt die Oberfläche dieses ganzen Körpers $\frac{12}{5}a^2\pi$.

Fig. 163. Ist ADB die gemeine *Cykloide* und ist $CD = 2a$ der Durchmesser des diese Curve erzeugenden Kreises, also auch $AC = CB = a\pi$ die halbe Peripherie dieses Kreises, so hat man, wenn $AP = x$ und $PM = y$ ist, für die Gleichung dieser Curve

$$x = a\ \mathrm{Arc.Cos.}\left(1 - \frac{y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2}.$$

Auch diese Gleichung läſst sich mittelst eines Hülfswinkels φ bequemer durch die zwei folgenden Gleichungen ausdrücken:

$$x = a(\varphi - \mathrm{Sin.}\varphi),$$
$$y = a(1 - \mathrm{Cos.}\varphi).$$

Also ist auch die Oberfläche F des durch Rotation der Cykloide um die Axe der x erzeugten Körpers

$$F = 2\pi a^2 \int \partial\varphi \left(3\,\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}\varphi - \mathrm{Sin.}\frac{3\varphi}{2}\right)$$

oder

$$F = \frac{32}{3}a^2\pi + 4\pi a^2\left(\tfrac{1}{3}\mathrm{Cos.}\tfrac{3}{2}\varphi - 3\,\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}\varphi\right),$$

wenn F mit φ oder x zugleich verschwindet.

Nimmt man diesen Ausdruck für $\varphi = 180^\circ$ zweimal, so erhält man für die Fläche des Körpers, der durch Rotation

der ganzen Cykloide ADB um die Axe AB entsteht, den Ausdruck $F' = \frac{64}{3} a^2 \pi$. Dreht sich aber der Bogen ADB um die Tangente EDF in dem höchsten Puncte D der Cykloide, so erhält man die ganze Rotationsfläche

$$F'' = \frac{32}{3} a^2 \pi.$$

Dreht sich derselbe Bogen ADB um die Axe CD, so erhält man für die Rotationsfläche

$$F''' = 8 a^2 \pi (\pi - \tfrac{4}{3}).$$

Dreht sich endlich der Bogen ADB um die Tangente AE im Anfangspuncte A, die daselbst auf AB senkrecht steht, so erhält man für die ganze Rotationsfläche

$$F^{IV} = 16 a^2 \pi^2.$$

Dasselbe Verfahren läſst sich auch auf die *Cubatur* dieser Rotationsflächen anwenden. So hat man für das so eben betrachtete parabolische Konoid das gesuchte Volumen

$$V = \pi \int y^2 \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2} = a \pi \int x \partial x = \tfrac{1}{2} a \pi x^2.$$

Dreht sich ein Kreis vom Halbmesser a um einen seiner Durchmesser, und nimmt man die Abscissen x auf diesem Durchmesser von dem Endpuncte desselben, so ist die Gleichung des Kreises

$$y^2 = 2ax - x^2,$$

also auch das Volumen desjenigen Theils der *Kugel*, das zu der Abscisse x gehört,

$$V = \pi x^2 (a - \tfrac{1}{3} x).$$

Nimmt man diesen Ausdruck für $x = a$ doppelt, so erhält man für das Volumen der ganzen $\frac{4}{3} a^3 \pi$.

Für das oben angeführte *verlängerte Sphäroid* hat man

$$V = \frac{b^2 \pi x}{a^2} (a^2 - \tfrac{1}{3} x^2),$$

wenn V mit x zugleich verschwindet. Dieser Ausdruck für $x = a$ doppelt genommen giebt das Volumen dieses ganzen Sphäroids gleich $\frac{4}{3} a b^2 \pi$. Für $a = b$ wird der letzte Werth $\frac{4}{3} a^3 \pi$ gleich dem Volumen der Kugel, wie zuvor. Ebenso ist für das *abgeplattete Sphäroid*

$$V = \frac{a^2 \pi x}{b^2}(b^2 - \tfrac{1}{3}x^2),$$

welcher Ausdruck für $x = b$ doppelt genommen das Volumen dieses ganzen Körpers gleich $\frac{4}{3} a^2 b \pi$ giebt, und dieser Ausdruck geht ebenfalls für $a = b$ in den bereits mehrmals erwähnten Werth $\frac{4}{3} a^3 \pi$ der Kugel über.

Für das oben angeführte *cykloidische Sphäroid* hat man, wenn AB die Rotationsaxe ist,

$$V = \frac{a^3 \pi}{12}(30\varphi - 45\,\mathrm{Sin.}\,\varphi + 45\,\mathrm{Sin.}\,2\varphi - \mathrm{Sin.}\,3\varphi).$$

Dieser Werth für $\varphi = \pi$ doppelt genommen giebt das Volumen des ganzen Körpers gleich $5 a^3 \pi^2$. Ist EDF die Rotationsaxe, so hat man

$$V = \frac{a^3 \pi}{12}(6\varphi - 3\,\mathrm{Sin.}\,\varphi - 3\,\mathrm{Sin.}\,2\varphi + \mathrm{Sin.}\,3\varphi),$$

und dieser Werth für $\varphi = \pi$ doppelt genommen giebt das Volumen des ganzen Körpers gleich $a^3 \pi^2$. Ist CD die Rotationsaxe, so hat man

$$V = a^3 \pi [\varphi^2 (\tfrac{1}{2} - \mathrm{Cos.}\,\varphi) + 2\varphi(\mathrm{Sin.}\,\varphi - \mathrm{Sin.}\,2\varphi)]$$
$$+ a^3 \pi [\tfrac{5}{4}\,\mathrm{Cos.}\,\varphi - \mathrm{Cos.}\,2\varphi + \tfrac{1}{12}\,\mathrm{Cos.}\,3\varphi - \tfrac{1}{3}].$$

Für $\varphi = \pi$ erhält man das Volumen des ganzen so entstehenden Körpers gleich

$$\frac{3 a^3 \pi}{2}[\pi^2 - \tfrac{16}{9}]$$

Ist endlich die Tangente AE im Scheitel A die Rotationsaxe, so erhält man

$$V = a^3 \pi [\tfrac{5}{4}\,\mathrm{Cos.}\,\varphi + \tfrac{1}{4}\,\mathrm{Cos.}\,2\varphi + \tfrac{1}{12}\,\mathrm{Cos.}\,3\varphi - \tfrac{19}{12}].$$
$$+ a^3 \pi [2\varphi\,\mathrm{Sin.}\,\varphi - \tfrac{1}{2}\varphi\,\mathrm{Sin.}\,2\varphi - \varphi^2 (\tfrac{1}{2} + \mathrm{Cos.}\,\varphi)].$$

Für $\varphi = 2\pi$ erhält man das Volumen des ganzen so entstehenden Körpers gleich $6 a^3 \pi^3$.

Bei dieser Gelegenheit mufs aber auch einer anderen Art der Complanation und der Cubatur der Flächen erwähnt werden, die eigentlich in das Gebiet der Statik gehört, aber auch bei geometrischen Untersuchungen oft von grofsem Nutzen seyn kann. Fig. 164. Sey MaNb eine Curve und AP eine in der Ebene dieser Curve

in willkürlicher Richtung gezogene Gerade, die ganz aufser dieser Curve fällt oder sie höchstens in einem einzigen Puncte berührt. Sey ferner C der Schwerpunct der Peripherie dieser Curve und CA = Y ein Loth aus diesem Schwerpuncte auf jene Gerade AP. Nennt man dann S die Peripherie oder den Umfang MaNb der Curve, so ist die Oberfläche F des Körpers, der durch Rotation jener Curve um die Axe der AP entsteht, gleich

$$F = 2\pi . YS,$$

und ebenso ist auch, wenn wieder C den Schwerpunct der Fläche und f diese Fläche der Curve, d. h. den von der Peripherie derselben eingeschlossenen Raum bezeichnet, das Volumen V des Körpers, der durch Rotation jener Curve um die Axe der AP entsteht, gleich

$$V = 2\pi . Yf.$$

Das heifst also: die Oberfläche F des so entstehenden Rotationskörpers ist gleich der Länge S der erzeugenden Curve, multiplicirt in die Peripherie $2\pi Y$ des Kreises, der während der Rotation von dem Schwerpuncte des Bogens der Curve beschrieben wird, und ebenso ist das Volumen V des so entstehenden Rotationskörpers gleich der Fläche f der erzeugenden Curve, multiplicirt in die Peripherie $2\pi Y$ des Kreises, welchen der Schwerpunct der Fläche dieser Curve während der Rotation beschreibt[1].

Diese Ausdrücke von F und V werden uns also die Oberfläche und das Volumen dieser Rotationskörper gleichsam ohne alle Rechnung in allen den Fällen kennen lehren, wo der Umfang S und die Fläche f der erzeugenden Curve bekannt sind und wo der Ort des Schwerpunctes derselben zugleich der Mittelpunct dieser Curve ist, so dafs um diesen Punct Bogen und Fläche der Curve zu allen Seiten gleichmäfsig vertheilt sind. So ist z. B. der Schwerpunct des Kreises oder der Ellipse oder aller regelmäfsigen Polygone zugleich ihr Mittelpunct; so ist der Schwerpunct der Parallelogramme

---

1 Dieses Verfahren ist unter der Benennung der *Guldin'schen Regel* bekannt. Guldin, ein Jesuit aus St. Gallen, hat sie in seinem Werke: *De centro gravitatis.* Viennae 1640 vorgetragen, aber sie findet sich auch schon im VII. Buche der mathematischen Sammlungen des Pappus, eines Griechen aus der Alexandrinischen Schule.

zugleich der Durchschnittspunct ihrer Diagonalen u. s. w. Kennt man also auch den Umfang S oder die Fläche f dieser Figuren, so kann man mittelst der vorhergehenden Gleichungen auch die Oberfläche F und das Volumen V der durch die Rotation dieser Figuren um irgend eine aufser ihr liegende Axe entstehenden Körper bestimmen. Ist z. B. die erzeugende Curve ein Kreis MAN vom Halbmesser $CA = a$ und ist der Mittelpunct C dieses Kreises von der Rotationsaxe PQ um die senkrechte Distanz $CP = d$ entfernt, so ist die Peripherie dieses Kreises

Fig. 165.

$$S = 2a\pi$$

und die Fläche desselben

$$f = a^2\pi.$$

Setzt man daher $Y = d$, so geben jene beiden Gleichungen für die Oberfläche des Körpers, der durch die Rotation dieses Kreises um die Axe PQ entsteht,

$$F = 4ad\pi^2$$

und für das Volumen desselben

$$V = 2a^2d\pi^2.$$

Ist $d = a$ oder wird der Kreis um eine seiner Tangenten gedreht, so erhält man für den Rotationskörper, da $d = a$ ist,

$$F = 4a^2\pi^2$$

und

$$V = 2a^3\pi^2.$$

Ist in derselben Figur MAN eine Ellipse, deren halbe Axen a und b sind und deren Mittelpunct C ist, so hat man wieder, wenn $CP = Y = d$ ist, für die Fläche dieser Ellipse

$$f = ab\pi.$$

Ist aber $a^2e^2 = a^2 - b^2$ und vernachlässigt man die achten und höheren Potenzen der Excentricität e, so hat man bekanntlich für die Peripherie der Ellipse

$$S = 2a\pi\left[1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3}{64}e^4 - \frac{5}{256}e^6 - \ldots\right],$$

so dafs man daher für den Körper, der durch Rotation dieser Ellipse um die Axe PQ entsteht, erhält:

Oberfläche $F = 4ad\pi^2.\left[1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3}{64}e^4 - \frac{5}{256}e^6 - ..\right]$

Volumen $V = 2abd\pi^2.$

Ist $a = b$, also auch e gleich Null, oder geht die Ellipse in einen Kreis über, so geben die letzten Gleichungen

$$F = 4 a d \pi^2$$

und

$$V = 2 a^2 d \pi^2 \text{, wie zuvor.}$$

Bemerken wir noch, dafs die zwei vorhergehenden Ausdrücke

$$F = 4 a^2 \pi^2 \text{ und } V = 2 a^3 \pi^2,$$

welche die Oberfläche und das Volumen des Körpers geben, der durch Umdrehung eines Kreises um eine seiner Tangenten entstanden ist, zugleich die Complanation und die Cubatur des Körpers geben, dessen Gleichung

$$\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{a^2 - z^2} = a$$

wir bereits oben (Abschnitt E) gefunden haben. Substituirt man nämlich die Werthe von x, y und z und von ihren Differentialen aus der letzten Gleichung in den beiden folgenden Ausdrücken

$$F = \int\int \partial x \partial y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

und

$$V = \int\int\int \partial x \partial y \partial z,$$

so sind diese vollständigen Integrale, wie man aus dem Vorhergehenden sieht, gleich

$$F = 4 a^2 \pi^2$$

und

$$V = 2 a^3 \pi^2.$$

Für die oben angeführte *Astrois*, deren Gleichung ist

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

findet man den Umfang der ganzen Curve

$$S = 6 a$$

und die Fläche derselben

$$f = \frac{3 a^2 \pi}{8}.$$

Ist daher wieder d der senkrechte Abstand des Mittelpuncts von der Rotationsaxe, so hat man

$$F = 12 a d \pi$$

und

$$V = \tfrac{3}{4} a^2 d \pi^2,$$

und alle diese Ausdrücke für F und V bleiben unverändert, wie auch die Ellipse oder die Astrois vor ihrer Rotation um ihren Mittelpunct gewendet werden mag, so dafs z. B. die Lage der grofsen Axe der Ellipse gegen die Rotationsaxe auf die Werthe von F und V keinen Einflufs hat. Anders verhält es sich, wenn die Rotationsaxe ihre Lage ändert, weil dann auch die senkrechte Entfernung $Y = d$ des Mittelpuncts von der Rotationsaxe geändert wird, wie denn auch in der That die beiden obigen Werthe von

$$F = 2\pi . YS \text{ und } V = 2\pi . Yf$$

für *dieselbe* Curve sich nur ändern, wenn die Distanz Y sich ändert, wobei noch bemerkt werden mufs, dafs die Rotationsaxe immer ganz aufser der Curve fallen mufs oder sie höchstens in einem Puncte berühren darf. Wird z. B. die Astrois um eine Gerade gedreht, die durch den Punct D oder E parallel mit der Abscissenaxe AB geht, so ist $Y = d = a$ und daher

Fig. 162.

$$F' = 12 a^2 \pi \text{ und } V' = \tfrac{3}{4} a^3 \pi^2,$$

und wird endlich die Rotationsaxe durch zwei benachbarte Spitzen der Curve, z. B. durch die Puncte B und E, gelegt, so ist $Y = d = \frac{a}{\sqrt{2}}$, also auch für den so entstehenden Rotationskörper

$$F'' = \frac{12 a^2 \pi}{\sqrt{2}} \text{ und } V'' = \frac{3 a^3 \pi^2}{4\sqrt{2}}.$$

Betrachten wir noch zum Schlusse dieses Gegenstandes diejenigen Körper, die durch Rotation eines Quadrats um irgend eine aufser demselben liegende Axe entstehn. Sey ABCD dieses Quadrat, und nehmen wir die Diagonalen desselben $AD = BC = 2a$ an, so ist die Seite des Quadrats $b = a\sqrt{2}$ und der Umfang $S = 4a\sqrt{2}$, so wie die Oberfläche desselben $f = 2a^2$. Bezeichnet daher hier wieder $Y = d$ den senkrechten Abstand OP des Mittelpuncts der Figur von der Rotationsaxe PQ, so hat man für den so entstehenden Körper

Fig. 166.

$$F = 8 a d \pi \sqrt{2} = 8 b d \pi,$$
$$V = 4 a^2 d \pi = 2 b^2 d \pi,$$

und diese Werthe von F und V bleiben dieselben, welche

Lage auch die Seite AB des Quadrats gegen die Rotationsaxe annehmen mag, so lange nur der Durchschnitt O der Diagonalen seinen Ort nicht ändert. Dreht sich aber das Quadrat ABCD um eine seiner Seiten AB, so ist $d = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}b$, also auch

$$F' = 8a^2\pi = 4b^2\pi$$

und

$$V' = 2a^3\pi\sqrt{2} = b^3\pi.$$

Dreht sich endlich das Quadrat um eine Gerade pq oder p'q', die durch eine Spitze des Quadrats parallel mit der ihr gegenüberstehenden Diagonale geführt wird, so hat man $d = a$ und daher für den auf diese Weise durch Umdrehung des Quadrats entstandenen Körper

$$F'' = 8a^2\pi\sqrt{2} = 4b^2\pi\sqrt{2}$$

und

$$V'' = 4a^3\pi = b^3\pi\sqrt{2}.$$

L.

Umhüllung.

Obvolutio; Enveloppe; *Envelope.*

Wenn ein Kreis, dessen Halbmesser sich nach einem bestimmten Gesetze ändert, auf einer gegebenen krummen Linie fortschreitet, so wird der Raum, welchen die Fläche dieses Kreises während seiner Bewegung beschreibt, von einer anderen krummen Linie begrenzt seyn, die jenen Kreis in allen seinen Lagen einschliefst und die daher die *Umhüllende* oder auch die *Einhüllende* (*Enveloppe*) aller jener Kreise genannt wird. Die Lehre von der Umhüllung der Curven ist von dem höchsten Interesse in der mathematischen Analysis, in der Astronomie und ebenfalls bei vielen Untersuchungen der Physik, daher sie hier, in ihren Grundzügen wenigstens, nicht übergangen werden darf. Wir werden weiter unten[1] eine wichtige Anwendung derselben auf die Bewegung der Körper in widerstehenden Mitteln finden. Hier bemerken wir nur, dafs dieser Gegenstand auf das Innigste mit der Theorie

1 S. Art. *Widerstand.*

der sogenannten *particulären Integrale* und mit der Integration der Differentialgleichungen mit partiellen Differentialen im Zusammenhange steht[1].

Sey $U = 0$ die Gleichung irgend einer ebenen Curve zwischen den veränderlichen Coordinaten x, y und einer Constante α. So lange diese Constante denselben bestimmten Werth beibehält, wird auch die Gleichung $U = 0$ eine bestimmte, individuelle Curve bezeichnen. Wenn man aber diesem Parameter α nach und nach verschiedene Werthe giebt, so wird auch die Gleichung $U = 0$ nach und nach zwei unter einander ähnliche, aber ihrer Gröfse und Lage nach verschiedene Curven ausdrücken. Läfst man in dieser Gleichung $U = 0$ die Constante α in ihren nächstfolgenden Werth $\alpha + \partial\alpha$ übergehn, so wird man eine neue, der vorhergehenden in Gröfse und Lage unendlich nahe Curve erhalten, und beide Curven werden einander in einem oder in mehreren Puncten schneiden. Die Durchschnittspuncte dieser zwei nächsten Curven werden aber diejenigen Puncte der ersten Curve seyn, für welche sich die Coordinaten x und y nicht ändern, während α sich ändert und in $\alpha + \partial\alpha$ übergeht. Wenn man also die gegebene Gleichung $U = 0$ in Beziehung auf α differentiirt, so wird die Gleichung $\left(\frac{\partial U}{\partial \alpha}\right) = 0$ für jenen Durchschnittspunct der beiden Curven gehören, und da dieser Durchschnittspunct zugleich auf der ersten Curve liegt, so werden die beiden Gleichungen dieses Durchschnittspunctes je zweier nächsten dieser Curven seyn

$$\left.\begin{array}{l} U = 0 \\ \left(\frac{\partial U}{\partial \alpha}\right) = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

Wenn man also aus diesen zwei Gleichungen (1) die Werthe von x und y, in α ausgedrückt, durch Elimination sucht, so werden die so erhaltenen Werthe von x und y die Coordinaten des Durchschnittspuncts von je zwei nächsten Curven geben, und man wird auf diese Art so viele dieser Durchschnittspuncte erhalten, als man der Gröfse α verschiedene Werthe geben kann. Allein die stetige Aufeinanderfolge die-

1 Vergl. Lacroix, Traité du calcul diff. et intégral. T. II.

ser Durchschnittspuncte, welche nach einem bestimmten Gesetze fortgeht, das von der gegebenen Gleichung $U=0$ abhängt, wird offenbar wieder eine *neue Curve* bilden, und man wird die Gleichung dieser Curve in x und y erhalten, wenn man die beiden Gleichungen (I) von der sie particularisirenden Constante α unabhängig macht, d. h. wenn man aus diesen beiden Gleichungen die Gröſse α eliminirt.

Man sieht aus dieser Erklärung, daſs diese Curven, die gleichsam aus den sämmtlichen Durchschnittspuncten der gegebenen Curve in allen ihren Lagen besteht, zugleich diejenige ist, welche die gegebene Curve in allen ihren Lagen berührt oder mit ihr eine gemeinschaftliche Tangente hat und sie daher ringsum einschlieſst oder umhüllt, daher sie auch die *umhüllende Curve* von der gegebenen, beweglichen Curve genannt wird. Nehmen wir, um dieses sofort durch ein Beispiel deutlich zu machen, an, der Mittelpunct eines Kreises bewege sich auf der Axe der x so, daſs das Quadrat seines veränderlichen Halbmessers immer gleich der Abscisse α des Mittelpuncts multiplicirt in eine Constante b ist. Um die Curve zu finden, welche alle diese Kreise umhüllt, hat man für die Gleichung des Kreises in irgend einer seiner Lagen

$$y^2+(x-\alpha)^2=\alpha.b$$

und davon ist das Differential in Beziehung auf die Constante α

$$2(\alpha-x)=b.$$

Eliminirt man daher aus diesen beiden Gleichungen die Gröſse α, so erhält man

$$y^2=bx+\tfrac{1}{4}b^2$$

für die umhüllende Curve, die also, wie man sieht, die Apollonische Parabel ist.

Dieselbe Gleichung fand Leibnitz[1], aber als Auflösung einer ganz anderen Aufgabe. Er suchte nämlich die Curve, für welche die Gleichung statt hat

$$(\text{Normale})^2=b.(x+\text{Subnormale}),$$

wo b eine Constante ist.

---

1 Acta Eruditorum. Lips. Ann. 1694.

Diese Gleichung läfst sich, da bekanntlich

$$\text{Normale} = \frac{y}{\partial x} \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}$$

und

$$\text{Subnormale} = \frac{y \partial y}{\partial x}$$

ist, auch auf folgende Weise ausdrücken

$$\frac{y \partial y}{\partial x} = \tfrac{1}{2} b + \sqrt{\tfrac{1}{4} b^2 + b x - y^2} \ldots \quad (A)$$

Es mochte ihm, dem deutschen Erfinder der damals noch wenig entwickelten Infinitesimalrechnung, Schwierigkeit gemacht haben, das Integral dieser Gleichung (A) zu finden, aber sein Scharfsinn bahnte ihm einen anderen neuen Weg, indem er die gesuchte Curve durch die auf einander folgenden Durchschnitte von Kreisen entstehn läfst, deren Mittelpuncte alle auf der Axe der x liegen. Dann werden die Halbmesser dieser Kreise die Normalen der gesuchten Curve seyn und die Summe der Abscisse und Subnormale wird gleich der Abscisse des Mittelpuncts seyn. Heifst daher α die Abscisse des Mittelpuncts und r der Halbmesser des Kreises, so ist die Gleichung desselben

$$y^2 + (x - \alpha)^2 = r^2,$$

und da nach der Bedingung der Aufgabe $r^2 = b.\alpha$ ist, so hat man

$$y^2 + (x - \alpha)^2 = b.\alpha.$$

In dieser Gleichung läfst Leibnitz blofs die Gröfse α variiren, wodurch er erhält

$$\alpha = \tfrac{1}{2} b + x,$$

und indem er diesen Werth von α in der vorhergehenden Gleichung substituirt, erhält er

$$y^2 = b x + \tfrac{1}{4} b^2$$

für die Parabel, wie zuvor. Allein das wahre allgemeine Integral der gegebenen Gleichung (A) ist, wie man jetzt aus jedem Compendium dieser Wissenschaft lernen kann,

$$x - C + \sqrt{\tfrac{1}{4} b^2 + b x - y^2} = 0,$$

wo C die Constante der Integration bezeichnet. Diese Gleichung gehört bekanntlich für einen Kreis, dessen Halbmesser

$$R = \sqrt{b(\tfrac{1}{2}b + C)}$$

und dessen Coordinaten des Mittelpuncts

$$X = \tfrac{1}{2}b + C \text{ und } Y = 0$$

sind, so dafs also auch hier der Halbmesser

$$R = \sqrt{b.X}$$

ist. Allein auch die obige Gleichung

$$y^2 = bx + \tfrac{1}{4}b^2$$

der Parabel thut der gegebenen Gleichung (A) genug, kann aber, da sie keine allgemeine Constante enthält, nicht als das Integral, sondern nur als eine particuläre Auflösung der Gleichung (A) angesehn werden.

Dieses war der erste Versuch, die Differentiation auch auf die constanten Gröfsen auszudehnen. Er führte Leibnitz zu einem Fehlschlufs, aber er mufs doch als der Keim einer der wichtigsten Entdeckungen und einer der interessantesten Erweiterungen der Analysis angesehn werden.

Es bewege sich, in einem zweiten Beispiele, der Mittelpunct eines Kreises vom constanten Halbmesser r auf einer krummen Linie, deren Gleichung durch $x = \alpha$ und $y = \varphi\alpha$ gegeben ist. Um die Curve zu finden, welche alle diese Kreise umhüllt, hat man für die Gleichung des Kreises in irgend einer seiner Lagen

$$(x - \alpha)^2 + (y - \varphi\alpha)^2 = r^2$$

und davon ist das Differential in Beziehung auf α

$$x - \alpha + (y - \varphi\alpha) . \frac{\partial\varphi\alpha}{\partial\alpha} = 0,$$

so dafs, dem Vorhergehenden zufolge, die Elimination der Gröfse α aus diesen beiden Gleichungen die gesuchte Gleichung der umhüllenden Curve geben wird. Ist also für einen besondern Fall die Curve, auf deren Peripherie sich der Mittelpunct jenes Kreises bewegt, wieder ein Kreis vom Halbmesser R, so hat man

$$\varphi\alpha = \sqrt{R^2 - \alpha^2},$$

also sind auch jene zwei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &(x - \alpha)^2 + (y - \sqrt{R^2 - \alpha^2})^2 = r^2 \\ &(x - \alpha)\sqrt{R^2 - \alpha^2} - \alpha y + \alpha\sqrt{R^2 - \alpha^2} = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Die letzte dieser zwei Gleichungen giebt

$$\alpha = \frac{Rx}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

und dieser Werth von α in der ersten substituirt giebt

$$x^2 + y^2 = (R \pm r)^2$$

für die gesuchte einhüllende Curve, die demnach aus zwei dem vorigen concentrischen Kreisen bestehn wird, von denen der eine $R + r$ und der andere $R - r$ zum Halbmesser haben wird.

Durch dasselbe Mittel der Differentiation der Constanten lassen sich auch mehrere andere interessante Aufgaben auflösen. Wenn z. B. eine gerade Linie sich so bewegen soll, daſs die Summe ihrer Entfernungen von dem Anfangspuncte der Coordinaten, in der Axe der x und der y gezählt, immer gleich einer constanten Gröſse c ist, so läſst sich auch leicht diejenige Curve finden, die durch die auf einander folgenden Durchschnittspuncte dieser Geraden mit ihrer nächstliegenden entsteht. Ist nämlich a die Entfernung dieser Geraden vom Anfange der Coordinaten in der Richtung der x und ebenso b in der Richtung der y, so ist die Gleichung der Geraden in irgend einer ihrer Lagen

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

und da nach der Bedingung der Aufgabe

$$a + b = c$$

seyn soll, so hat man auch

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{c - a} = 1.$$

Das Differential der letzten Gleichung in Beziehung auf a ist aber

$$a = \tfrac{1}{2}(c + x - y)$$

und dieser Werth von a in der vorhergehenden Gleichung substituirt giebt

$$(y - x)^2 - 2c(x + y) + c^2 = 0$$

für die Gleichung der gesuchten Curve, die demnach eine Parabel ist. Soll sich aber die Gerade so bewegen, daſs ihr senkrechter Abstand vom Anfange der Coordinaten immer

gleich einer constanten Gröſse R ist, so hat man, wenn α den Winkel der Geraden mit der Axe der x bezeichnet, für die Gleichung der beweglichen Geraden

$$x \,\text{Sin.}\,\alpha + y \,\text{Cos.}\,\alpha = R\,.$$

Das Differential dieses Ausdrucks in Beziehung auf α giebt aber

$$\text{Tang.}\,\alpha = \frac{x}{y},$$

also hat man auch, wenn man diesen Werth von α in der vorhergehenden Gleichung substituirt,

$$x^2 + y^2 = R^2$$

für die gesuchte Curve, die durch die Durchschnittspuncte der erwähnten beweglichen geraden Linie entsteht. Diese Curve ist daher ein Kreis vom Halbmesser R.

Die einfachste und zugleich ganz allgemeine Gleichung einer geraden Linie ist bekanntlich

$$y = ax + b,$$

wo von den beiden Constanten a die trigonometrische Tangente des Winkels bezeichnet, welchen die Gerade mit der Axe der x bildet, und b die Ordinate y der Geraden für den Anfangspunct der Coordinaten oder für $x = 0$ ist. Nimmt man nun die Gröſse $b = c.a^n$, wo c und n beständige Gröſsen bezeichnen, so wird die Gleichung der Geraden

$$y = ax + c.a^n \quad \ldots \quad (I)$$

Sey BM diese Gerade, AX und AY die senkrechten Coordinatenaxen, also $AM = b$ und a gleich der Tangente des Winkels MBA. Aendert man nun die Gröſse $AM = b$, so daſs z. B. der neue Werth von b gleich $b' = Am$ wird, so wird man daraus auch den neuen Werth von a oder $a' = \text{Tang.}\,MbA$ mittelst der oben aufgestellten Gleichung $b' = c.a'^n$ oder Fig. 167.

$$a' = \sqrt[n]{\frac{b'}{c}}$$

finden, und sonach die neue Lage der Geraden mb bestimmen können, wo dann die beiden Geraden MB und mb sich irgendwo in einem Puncte n schneiden werden. Ist ebenso $b'' = Am'$ ein dritter Werth von b, so findet man den dazu-

gehörenden Werth von a oder $a'' =$ Tang. $M b' A$ durch die Gleichung

$$a'' = \sqrt[n]{\frac{b''}{c}}$$

und man wird daher auch diese dritte Lage $m' b'$ verzeichnen können, wo dann die zweite und dritte Lage sich im Puncte n' schneiden mögen. Ebenso erhält man für einen vierten Werth von $b = A m''$ die Lage $m'' b''$, welche die vorhergehende $m' b'$ im Puncte n'' schneidet, u. s. w. Nimmt man daher die ersten willkürlichen Werthe von $b, b', b'' \ldots$ nur sehr wenig unter einander verschieden an, so werden auch die erwähnten Durchschnittspuncte $n, n', n'' \ldots$ sehr nahe an einander liegen, und sie werden, wenn sie einander in der That unendlich nahe sind, eine continuirliche Curve bilden, deren Gleichung zwischen den veränderlichen Coordinaten $AP = x$ und $PQ = y$ wir nun suchen müssen. Allein diese Gleichung folgt, nach dem Vorhergehenden, sofort aus der Gleichung (I), wenn man dieselbe bloſs in Beziehung auf die Gröſse a differentiirt. Durch dieses Verfahren erhält man nämlich

$$a^{n-1} = -\frac{x}{nc} \quad \text{oder} \quad a = \left(-\frac{x}{nc}\right)^{\frac{1}{n-1}},$$

und wenn man diesen Werth von a in der Gleichung (I) substituirt, so erhält man für die gesuchte Gleichung der Curve $n n' n'' \ldots$ den folgenden Ausdruck

$$y = \left(-\frac{x}{nc}\right)^{\frac{1}{n-1}} . \, x + c . \left(-\frac{x}{nc}\right)^{\frac{n}{n-1}} \quad \ldots \quad \text{(II)}$$

Diese Gleichung (II) giebt, um nur einige specielle Fälle kurz anzuführen,

$$\text{für } n = 2 \quad \ldots \quad y = -\frac{x^2}{4c}$$

und

$$\text{für } n = -1 \quad \ldots \quad y = 2\sqrt{cx},$$

also in beiden Fällen die Apollonische Parabel. Für $n = -2$ aber erhält man

$$y^3 = \frac{27}{4} c x^2$$

oder die *Neil'sche Parabel*, und ebenso giebt $n = \frac{1}{2}$ die Gleichung

$$4xy + c^2 = 0$$

der gleichseitigen Hyperbel u. s. w.

Die vorhergehenden interessanten Betrachtungen lassen sich, wie man ohne Mühe sieht, auch leicht auf die Bestimmung solcher *Flächen* anwenden, welche durch die stetige Aufeinanderfolge oder durch die fortwährende gegenseitige Schneidung einer gegebenen Fläche entstehn, die sich nach einem bestimmten Gesetze bewegt. Wenn z. B. der Mittelpunct eines Ellipsoids sich auf der Peripherie eines Kreises oder einer Parabel bewegt, so werden sich je zwei nächste Lagen dieses Ellipsoids in irgend einer krummen Linie schneiden, und die Aufeinanderfolge dieser Durchschnittscurven wird eine Fläche bilden, welche das Ellipsoid in allen seinen Lagen umhüllt und berührt und welche daher die *einhüllende Fläche* aller dieser Ellipsoide seyn wird.

Sey überhaupt $U = 0$ die Gleichung einer solchen beweglichen Fläche zwischen den drei senkrechten Coordinaten x, y, z und irgend einer Constante α. Giebt man dieser Gröfse α nach und nach alle mögliche Werthe, so wird man eine Folge von Flächen erhalten, deren jede von den andern nur durch ihren besondern Werth von α verschieden ist. Giebt man z. B. der Gröfse α den ihr nächstfolgenden Werth $\alpha + \partial\alpha$, so hat man die Gleichung der nächstfolgenden Fläche, die durch ihre Gestalt und Lage von der vorhergehenden nur unendlich wenig verschieden seyn und daher auch diese im Allgemeinen in irgend einer Curve schneiden wird. Diese Curve ist aber offenbar nichts Anderes, als die gemeinschaftliche Berührungslinie der beiden eingehüllten Flächen mit ihrer einhüllenden, und die Puncte dieser Curve werden diejenigen der ersten eingehüllten Fläche seyn, für welche die Werthe von x, y, z sich nicht ändern, während sich α in $\alpha + \partial\alpha$ ändert, das heifst also: differentiirt man die gegebene Gleichung $U = 0$ blofs in Beziehung auf α, so gehört die resultirende Gleichung für jene Durchschnittscurve den beiden

nächsten Flächen, und da diese Curve auch zugleich ganz auf der ersten dieser zwei Flächen liegen mufs, so sind die beiden Gleichungen der Curve, in welcher sich zwei nächste eingehüllte Flächen schneiden,

$$U = 0 \quad \ldots \quad (I)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \alpha}\right) = 0 \quad \ldots \quad (II)$$

und diese Curve ist zugleich, wie bereits bemerkt, diejenige, in welcher zwei nächste eingehüllte Flächen von der sie umschliefsenden einhüllenden Fläche berührt werden. Diese Curve wird nach MONGE, dem wir diese ganze schöne Theorie verdanken, die *Charakteristik* genannt[1]. Giebt man also in den beiden Gleichungen (I) und (II) der Gröfse α nach und nach alle mögliche Werthe, so erhält man auch alle auf einander folgende Charakteristiken, die sich sämmtlich auf der gesuchten einhüllenden Fläche befinden und aus denen diese, wenn man so sagen darf, gleichsam zusammengesetzt ist.

Eliminirt man daher aus diesen beiden Gleichungen die jede einzelne Charakteristik particularisirende Gröfse α, so erhält man in x, y, z eine einzige Gleichung, welche, da sie von α ganz unabhängig ist, für alle Charakteristiken zusammen, d. h. also, welche für die gesuchte *einhüllende Fläche* selbst gehören wird.

MONGE geht in seinem angeführten Werke noch weiter, indem er auch die zweiten Differentiale der gegebenen Gleichung $U = 0$ in seine Betrachtungen mit aufnimmt. Indem wir aber hier diese, dem Physiker weniger nothwendigen, Erweiterungen übergehn, wollen wir das Vorhergehende durch einige Beispiele deutlicher zu machen suchen.

Auf der Ebene der xy sey irgend eine Curve verzeichnet, deren Gleichung

$$y = \varphi x$$

seyn soll. Auf dieser Curve bewege sich der Mittelpunct einer Kugel vom Halbmesser r. Man suche diejenige Fläche, welche diese Kugel in allen ihren Lagen umhüllt.

---

1 Application de l'Analyse à la Géométrie. 4me éd. Paris 1809. 4.

Ist α der Werth von x für irgend eine bestimmte Lage des Mittelpuncts der Kugel, also auch $\varphi\alpha$, nach der Gleichung $y = \varphi x$, der ihm entsprechende Werth von y, so hat man für die Gleichung der beweglichen Kugel

$$(x-\alpha)^2 + (y-\varphi\alpha)^2 + z^2 = r^2 \quad \ldots \quad (I)$$

Differentiirt man diese Gleichung in Beziehung auf α und setzt der Kürze wegen $\varphi'\alpha = \frac{\partial . \varphi\alpha}{\partial \alpha}$, so erhält man

$$x - \alpha + (y - \varphi\alpha) . \varphi'\alpha = 0 \quad \ldots \quad (II)$$

und die Gleichungen (I) und (II) zusammengenommen gehören für die *Charakteristik* der gesuchten einhüllenden Fläche. Eliminirt man aber aus diesen zwei Gleichungen die Gröfse α, so erhält man eine Gleichung in x, y, z, welche die gesuchte Gleichung der einhüllenden Fläche selbst ist. Da diese Elimination nicht vorgenommen werden kann, so lange die Function φx oder $\varphi\alpha$ nicht bestimmt ist, so wollen wir für einen speciellen Fall dieses allgemeinen Beispiels annehmen, dafs die erwähnte Kugel vom Halbmesser r mit ihrem Mittelpuncte auf der Peripherie eines in der Ebene der xy liegenden Kreises vom Halbmesser R einhergehe. Dadurch wird die Function $\varphi\alpha$ dahin bestimmt, dafs man hat

$$\varphi\alpha = \sqrt{R^2 - \alpha^2},$$

also auch

$$\varphi'\alpha = -\frac{\alpha}{\sqrt{R^2 - \alpha^2}},$$

demnach gehen die zwei obigen Gleichungen in folgende über:

$$(x-\alpha)^2 + (y - \sqrt{R^2-\alpha^2})^2 + z^2 = r^2 \quad \ldots \quad (I)$$

$$x = \frac{\alpha y}{\sqrt{R^2 - \alpha^2}} \quad \ldots \quad (II)$$

Diese zwei Gleichungen (I) und (II) zusammen genommen, gehören für die Charakteristik. Man sieht, dafs diese Charakteristik eine *ebene Curve* ist und dafs sie, wie die Gleichung (II) zeigt, in einer auf xy senkrechten Ebene steht.

Nennt man k den Winkel, welchen die Durchschnittslinie dieser Ebene in der coordinirten Ebene der xy mit der Axe der x bildet, so ist

$$\text{Tang. k} = \frac{y}{x},$$

also auch vermöge der Gleichung (II)

$$\text{Tang. k} = \sqrt{\frac{R^2 - \alpha^2}{\alpha^2}} \text{ oder Cos. k} = \frac{\alpha}{R}.$$

Substituirt man aber den Werth von y aus (II) in der Gleichung (I), so erhält man

$$(x - \alpha)^2 . \frac{R^2}{\alpha^2} + z^2 = r^2,$$

welche Gleichung, wenn man in ihr $x = x' \text{ Cos. k}$ setzt, in folgende übergeht:

$$(x' - R)^2 + z^2 = r^2,$$

das heifst: die Charakteristik ist ein Kreis vom Halbmesser r, dessen Mittelpunct vom Anfangspuncte der Coordinaten um die Distanz R absteht. Eliminirt man endlich aus den beiden Gleichungen (I) und (II) die Gröfse α, so erhält man für die gesuchte Gleichung der Enveloppe aller jener beweglichen Kugeln

$$\sqrt{x^2 + y^2} = R + \sqrt{r^2 - z^2}$$

oder, was dasselbe ist,

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 + r^2 + 2R\sqrt{r^2 - z^2}.$$

Nehmen wir in einem zweiten Beispiele an, dafs der Mittelpunct eines Sphäroids, das durch die Rotation einer Ellipse, deren grofse und kleine Axe 2a und 2b sind, entstand, sich auf der Peripherie des in der Ebene der xy liegenden Kreises vom Halbmesser R bewege, so hat man für die Gleichung dieses Sphäroids

$$x^2 + y^2 + \frac{b^2 z^2}{a^2} = b^2$$

oder für unsern Fall

$$(x - \alpha)^2 + (y - \sqrt{R^2 - \alpha^2})^2 + \frac{b^2 z^2}{a^2} = b^2 \quad \ldots \quad \text{(I)}.$$

Das Differential der letzten Gleichung in Beziehung auf α aber ist

$$x - \alpha - (y - \sqrt{R^2 - \alpha^2}) . \frac{\alpha}{\sqrt{R^2 - \alpha^2}} = 0,$$

oder einfacher

$$x - \frac{\alpha y}{\sqrt{R^2 - \alpha^2}} = 0 \ldots (II).$$

Eliminirt man aus den Gleichungen (I) und (II) die Gröfse α, so erhält man für die gesuchte Gleichung der einhüllenden Fläche dieser Sphäroids

$$\sqrt{x^2 + y^2} = R + \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - z^2},$$

oder, was dasselbe ist,

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 + b^2 + (a^2 - b^2)\frac{z^2}{a^2} + \frac{2Rb}{a}\sqrt{a^2 - z^2}.$$

Setzt man in diesem Ausdrucke $a = b = r$, so erhält man das bereits zuvor gefundene Resultat.

Betrachten wir noch die Bewegung eines Kegels mit kreisförmiger Basis, dessen Axe mit der Seitenlinie einen Winkel bildet, dessen Tangente gleich a ist. Wenn der Scheitel dieses Kegels in der Ebene der xy und die Axe desselben senkrecht auf dieser Ebene steht, so ist die Gleichung des Kegels

$$x^2 + y^2 = a^2 z^2.$$

Bewegt sich der Scheitel dieses Kegels in der Peripherie eines Kreises, dessen Halbmesser R ist und der in der Ebene der xy liegt, so hat man, wenn man den Mittelpunct dieses Kreises zum Anfangspuncte der Coordinaten macht, für die Gleichung des Kegels in irgend einer seiner Lagen

$$(x - \alpha)^2 + (y - \sqrt{R^2 - \alpha^2})^2 = a^2 z^2 \ldots (I)$$

und davon ist das Differential in Beziehung auf die Gröfse α

$$x - \frac{\alpha y}{\sqrt{R^2 - \alpha^2}} = 0 \ldots (II).$$

Die letzte Gleichung giebt

$$\alpha = \frac{Rx}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

also hat man, wenn man diesen Werth von α in der Gleichung (I) substituirt, für die gesuchte Gleichung der alle diese Kegel einhüllenden Fläche

$$[x\sqrt{x^2+y^2}-Rx]^2+[y\sqrt{x^2+y^2}-Ry]^2=a^2z^2.(x^2+y^2),$$

oder einfacher, wenn man die beiden ersten Quadrate auflöst und dann alle Glieder der Gleichung durch x^2+y^2 dividirt,

$$x^2+y^2-a^2z^2+R^2-2R\sqrt{x^2+y^2}=0.$$

Setzt man in dieser Gleichung $z=b$, so erhält man für einen mit xy parallelen Schnitt, der in der Höhe b über der Ebene der xy statt hat, die Gleichung

$$x^2+y^2-2R\sqrt{x^2+y^2}+R^2=a^2b^2$$

oder

$$(R-\sqrt{x^2+y^2})^2=a^2b^2,$$

also auch

$$x^2+y^2=(R\pm ab)^2,$$

so dafs also dieser Schnitt der alle Kegel umhüllenden Fläche ein doppelter concentrischer Kreis des Halbmessers $R+ab$ und $R-ab$ seyn wird.

Das Vorhergehende hängt auf das Innigste mit der Lehre von der *Variation der Parameter* zusammen, die in der Theorie der planetarischen Störungen eine so wichtige Rolle spielt und von der daher hier wenigstens eine kurze Anzeige gegeben werden soll. Es ereignet sich nämlich sehr oft bei höheren analytischen Untersuchungen, dafs eine Differentialgleichung sehr leicht integrabel wird, wenn man in ihr ein Glied, das gewöhnlich gegen die anderen sehr klein ist, gleich Null setzen oder gänzlich verschwinden lassen kann. Dieses ist z. B. der Fall mit der Gleichung

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+a^2x+\alpha.\text{Cos.}\,mt=0,$$

wo x und t die veränderlichen und a, α und m constante Gröfsen bezeichnen. Diese Gleichung kommt in der Theorie der Perturbationen, welche die Planeten unseres Sonnensystems von einander erleiden, sehr oft vor, und in ihr ist das letzte Glied $\alpha.\text{Cos.}\,mt$, welches die eigentlichen Perturbationen enthält, gegen die übrigen Glieder gewöhnlich sehr klein. Setzt man dieses Glied vollkommen gleich Null, so erhält man die Gleichung

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + a^2 x = 0,$$

die bekanntlich für die ungestörte Bewegung eines Planeten um die Sonne gehört. Das Integral dieser letzten einfachen Gleichung ist aber, wie man weiſs,

$$x = A \text{ Cos. } (at - B),$$

wo A und B die zwei Constanten bezeichnen, die durch die doppelte Integration eingeführt werden. Wenn nun aber auf diese Weise das Integral dieser einfachern Gleichung

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + a^2 x = 0$$

bekannt ist, welches wird das gesuchte Integral der oben gegebenen Gleichung

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + a^2 x + \alpha . \text{Cos. } mt = 0$$

seyn, vorausgesetzt, daſs α eine sehr kleine Gröſse bezeichnet? Da beide Differentialgleichungen unter sich ähnlich und nur durch das sehr kleine Glied α.Cos. mt verschieden sind, so wird die Voraussetzung erlaubt seyn, daſs auch ihre zwei Integrale unter sich ähnlich und ebenfalls nur durch solche Glieder, welche die sehr kleine Gröſse α als Factor enthalten, verschieden seyn werden, ja daſs vielleicht die oben aufgestellte Gleichung

$$x = A \text{ Cos. } (at - B),$$

die das Integral der ersten einfacheren Gleichung ist, auch zugleich das Integral der zweiten Differentialgleichung vorstellen kann, wenn man nur die zwei willkürlichen constanten Gröſsen A und B oder, wie sie auch genannt werden, wenn man nur die *Parameter* A und B nicht mehr, wie zuvor, als beständige, sondern wenn man sie selbst wieder als veränderliche Gröſsen betrachtet. Nehmen wir also, um diese Voraussetzung näher zu untersuchen, an, daſs von der oben aufgestellten Gleichung, dis wir so schreiben wollen

$$\frac{\partial^2 x'}{\partial t^2} + a^2 x' + \alpha . \text{Cos. } mt = 0 \quad . \; . \; . \; (I)$$

das gesuchte Integral ebenfalls die Form

$$x' = A' . \text{Cos. } (at - B')$$

haben soll, wo aber die beiden Gröſsen A' und B' kleinen,

von der ebenfalls kleinen Gröfse α abhängigen Veränderungen unterworfen seyn sollen. Unter den unzähligen Wegen, auf welchen man dieser letzten Annahme entsprechen kann, wird ohne Zweifel einer der einfachsten der seyn, dafs man die beiden Werthe des ersten Differentialcoefficienten $\frac{\partial x}{\partial t}$ und $\frac{\partial x'}{\partial t}$ der beiden aufgestellten Differentialgleichungen als von derselben Form voraussetzt. Nun ist aber von der Gleichung

$$x' = A' \operatorname{Cos.}(at - B')$$

das erste Differential in Beziehung auf alle in ihr enthaltenen veränderlichen Gröfsen

$$\frac{\partial x'}{\partial t} = -aA' \operatorname{Sin.}(at - B') + \frac{\partial A'}{\partial t} . \operatorname{Cos.}(at - B')$$
$$+ A' \frac{\partial B'}{\partial t} . \operatorname{Sin.}(at - B').$$

Von dem bekannten Integral

$$x = A \operatorname{Cos.}(at - B')$$

unserer einfachen Gleichung

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + a^2 x = 0$$

ist aber das erste Differential

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -aA . \operatorname{Sin.}(at - B),$$

und da, unserer Annahme gemäfs, die Werthe von $\frac{\partial x}{\partial t}$ und von $\frac{\partial x'}{\partial t}$ dieselbe Form haben sollen, so hat man die beiden Bedingungsgleichungen

$$\frac{\partial x'}{\partial t} = -aA' . \operatorname{Sin.}(at - B')$$

und

$$\frac{\partial A'}{\partial t} . \operatorname{Cos.}(at - B') + A' \frac{\partial B'}{\partial t} . \operatorname{Sin.}(at - B').$$

Differentiirt man aber den Ausdruck von $\frac{\partial x'}{\partial t}$ und substituirt dann den Werth desselben in der gegebenen Gleichung (I), so erhält man

$$0 = \frac{\partial A'}{\partial t} \text{Sin.}(at - B') + A' \frac{\partial B'}{\partial t} \text{Cos.}(at - B') + \frac{\alpha}{a} \text{Cos.}\, mt.$$

Aus dieser und der letzten Gleichung findet man aber für die beiden Differentialcoefficienten $\frac{\partial A'}{\partial t}$ und $\frac{\partial B'}{\partial t}$ folgende Werthe:

$$\frac{\partial A'}{\partial t} = \frac{\alpha}{a} \text{Sin.}(at - B') \text{Cos.}\, mt,$$

$$\frac{\partial B'}{\partial t} = -\frac{\alpha}{aA'} \text{Cos.}(at - B') \text{Cos.}\, mt.$$

Aus diesen beiden Differentialausdrücken wird man aber auch leicht die zwei Integrale für A′ und B′ finden, wenn man annimmt, dafs diese Gröfsen A′ und B′ von zwei andern constanten Gröfsen A und B nur so wenig verschieden sind, dafs man in den beiden letzten, in die Gröfse α multiplicirten Gliedern dieser Gleichungen A für A′ und B für B′ setzen darf. Dann hat man nämlich

$$x' = A' \text{Cos.}(at - B')$$

und damit erhält man sofort

$$A' = A - \frac{\alpha}{2a(a+m)} \text{Cos.}(at + mt - B)$$
$$- \frac{\alpha}{2a(a-m)} \text{Cos.}(at - mt - B),$$

und

$$B' = B - \frac{\alpha}{2a(a+m)A} \text{Sin.}(at + mt - B)$$
$$- \frac{\alpha}{2a(a-m)A} \text{Sin.}(at - mt - B),$$

und dadurch sind die beiden gesuchten Gröfsen A′ und B′ bestimmt, und sonach ist auch das Integral der Gleichung (I) gegeben.

Allgemeiner noch stellt diesen wichtigen Gegenstand LAPLACE[1] dar. Er nimmt nämlich die Gleichung an

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + P + \alpha Q = 0 \ldots (II)$$

1 Mécanique céleste. T. I.

wo P und Q Functionen von x, t und von $\frac{\partial x}{\partial t}$ vorstellen und wo α ein sehr kleiner constanter Factor ist. Das Integral dieser Gleichung für den Fall, wo α gleich Null ist, sey bekannt, man suche das Integral der gegebenen Gleichung (II). Differentiirt man das gegebene Integral zweimal in Beziehung auf x und t, so erhält man zwei Gleichungen, aus denen man durch Elimination die Werthe der zwei Constanten C und C′ finden kann, die in diesen zwei Gleichungen enthalten sind. Diese Constanten werden natürlich in Functionen von x, t und $\frac{\partial x}{\partial t}$ ausgedrückt seyn. Nennt man also V und V′ diese zwei Functionen, so kann man diese zwei Constanten so darstellen

$$C = V \text{ und } C' = V',$$

und diese zwei Gleichungen sind offenbar die zwei ersten Integrale von der gegebenen Gleichung

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + P = 0$$

und sie werden durch die Elimination von $\frac{\partial x}{\partial t}$ das gesuchte zweite oder endliche Integral dieser Gleichung wieder geben.

Differentiirt man aber die beiden letzten Gleichungen noch einmal, so erhält man

$$\partial V = 0 \text{ und } \partial V' = 0,$$

und da diese Ausdrücke vollständige Differentialgleichungen der zweiten Ordnung sind, so kann jede von ihnen nichts Anderes seyn, als die gegebene Gleichung

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + P = 0$$

selbst, mit irgend einem Factor multiplicirt. Nennt man also $F \partial t$ den Factor dieser letzten Gleichung, der die Gleichung $\partial V = 0$ giebt, und ist ebenso $F' \partial t$ der Factor der Gleichung $\partial V' = 0$, so hat man

$$\partial V = F \partial t. \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + P\right)$$

und

$$\partial V' = F' \partial t. \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + P\right).$$

Nun ist es aber sehr leicht, diese Factoren F und F' zu bestimmen, wenn einmal die Gröfsen V und V' bekannt sind. Denn F ist offenbar der Factor von $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$ in dem Differentiale von V, und F' ist der Factor von $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$ in dem Differentiale von V'. Da man also, nach der Voraussetzung, die Werthe von V und V' kennt, so darf man nur die Factoren von $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$ aus diesen beiden Werthen suchen, um die Werthe von F und F' zu erhalten. Gehn wir dann wieder zu der ursprünglichen Gleichung (II) zurück und multipliciren wir sie durch $F\partial t$ und $F'\partial t$, so erhalten wir

$$0 = \partial V + \alpha\partial t . FQ$$

und

$$0 = \partial V' + \alpha\partial t . F'Q,$$

und davon sind die Integrale

$$C - \alpha\int\partial t . FQ = V,$$
$$C' - \alpha\int\partial t . F'Q = V'.$$

Auf diese Weise hat man also zwei Differentialgleichungen, welche dieselbe Form haben, wie in dem Falle, wo $\alpha = 0$ ist, mit dem einzigen Unterschiede, dafs man statt der willkürlichen Constanten C und C' die Gröfsen

$$C - \alpha\int\partial t . FQ \text{ und } C' - \alpha\int\partial t . F'Q$$

setzt. Wenn man aber unter der Annahme von $\alpha = 0$ aus den zwei Integralen $C = V$ und $C' = V'$ die Gröfse $\frac{\partial x}{\partial t}$ eliminirt, so erhält man, wie wir oben gesehn haben, das endliche Integral der Gleichung

$$0 = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + P,$$

also erhält man auch das endliche Integral der oben aufgestellten Gleichung

$$0 = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + P + \alpha Q,$$

wenn man blofs in dem vorhergehenden Integrale die Gröfsen C und C' in

$$C - \alpha \int \partial t . F Q \text{ und } C' - \alpha \int \partial t . F' Q$$

verwandelt.

Um das Vorhergehende auf einen besondern Fall anzuwenden, sey die Gleichung gegeben

$$0 = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + a^2 x + \alpha Q,$$

wo α eine sehr kleine Gröſse bezeichnet und wo Q irgend eine Function von x, t und $\frac{\partial x}{\partial t}$ ist.

Für $\alpha = 0$ hat man

$$0 = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + a^2 x,$$

und von dieser Gleichung ist bekanntlich das zweite Integral

$$x = \frac{C}{a} \text{ Sin. at} + \frac{C'}{a} \text{ Cos. at},$$

wo C und C' zwei Constanten sind. Von der letzten Gleichung ist aber das erste Differential

$$\frac{\partial x}{\partial t} = C \text{ Cos. at} - C' \text{ Sin. at}$$

und die Combination der beiden letzten Gleichungen giebt

$$C = ax \text{ Sin. at} + \frac{\partial x}{\partial t} \text{ Cos. at},$$

$$C' = ax \text{ Cos. at} - \frac{\partial x}{\partial t} \text{ Sin. at}.$$

Dieses sind die zwei Gleichungen, die wir oben durch $C = V$ und $C' = V'$ bezeichnet haben. In der ersten derselben ist der Factor von $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$ gleich $F = \text{Cos. at}$, und in der zweiten ist $F' = - \text{Sin. at}$. Um daher das vollständige Integral der gegebenen Gleichung zu erhalten, werden wir, nach dem Vorhergehenden, in der Gleichung

$$x = \frac{C}{a} \text{ Sin. at} + \frac{C'}{a} \text{ Cos. at}$$

bloſs statt C die Gröſse $C - \alpha \int \partial t . F Q$ und statt C' die Gröſse $C' - \alpha \int \partial t . F' Q$ substituiren, wodurch man erhält:

$$x = \frac{C - \alpha \int Q \partial t \operatorname{Cos.} at}{a} . \operatorname{Sin.} at,$$

$$+ \frac{C' + \alpha \int Q \partial t \operatorname{Sin.} at}{a} . \operatorname{Cos.} at,$$

das heifst, das vollständige Integral der Gleichung

$$0 = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + a^2 x + \alpha Q$$

wird seyn

$$x = \frac{C}{a} \operatorname{Sin.} at + \frac{C'}{a} \operatorname{Cos.} at$$

$$- \frac{\alpha}{a} \operatorname{Sin.} at . \int Q \partial t \operatorname{Cos.} at + \frac{\alpha}{a} \operatorname{Cos.} at . \int Q \partial t \operatorname{Sin.} at .$$

Wäre z. B. die Gröfse

$$\alpha Q = A + B \operatorname{Cos.} mt + B' \operatorname{Cos.} nt$$
$$+ \beta \operatorname{Sin.} mt + \beta' \operatorname{Sin.} nt$$

gegeben, so ist das gesuchte Integral der Gleichung (II)

$$x = - \frac{A}{a^2} + \frac{C}{a} \operatorname{Sin.} at + \frac{C'}{a} \operatorname{Cos.} at$$

$$+ \frac{B}{m^2 - a^2} \operatorname{Cos.} mt + \frac{B'}{n^2 - a^2} \operatorname{Cos.} nt,$$

$$+ \frac{\beta}{m^2 - a^2} \operatorname{Sin.} mt + \frac{\beta}{n^2 - a^2} \operatorname{Sin.} nt,$$

welche Auflösung mit der vorhergehenden übereinstimmt.

Um diese Variation der Parameter, von welcher wir im Art. *Widerstand* einen merkwürdigen Gebrauch machen werden, hier noch von ihrer geometrischen Seite zu erklären, wollen wir die Bewegung eines Pendels noch einmal in Kürze betrachten. Die ganze Theorie dieser Bewegung, wie sie in dem Art. *Pendel* ausgeführt worden ist, folgt aus den beiden Gleichungen

$$\left. \begin{array}{l} x \partial x + z \partial z = 0 \\ \frac{\partial x^2 + \partial z^2}{\partial t^2} = A + 4gz \end{array} \right\},$$

die bereits oben[1] angeführt worden sind, vorausgesetzt, dafs

1 S. Art. *Mechanik*. Bd. VI. S. 1565.

die Bewegung des schweren, am Pendel befestigten Körpers in einem verticalen Kreise vor sich gehn soll. Diese beiden Gleichungen lassen sich selbst auf eine einzige zurückführen, ohne ihrer Allgemeinheit Eintrag zu thun. Nimmt man nämlich die beiden Coordinaten x und z so an, daſs man hat

$$x = r \,\mathrm{Sin.}\,\alpha \text{ und } z = r \,\mathrm{Cos.}\,\alpha,$$

wo r den Halbmesser des Kreises bezeichnet, so verschwindet, wenn man die Werthe von $\partial x = z\,\partial\alpha$ und $\partial y = -x\,\partial\alpha$ in den beiden vorhergehenden Gleichungen substituirt, die erste derselben von selbst und die zweite geht in die folgende über:

$$\frac{r\,\partial\alpha}{\partial t} = \sqrt{C + 4gr\,\mathrm{Cos.}\,\alpha},$$

deren Differential in Beziehung auf α und t ist

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} + \frac{2g}{r}\,\mathrm{Sin.}\,\alpha = 0$$

und diese letzte Gleichung ist es, welche die ganze Theorie des kreisförmigen Pendels enthält, so wie die vorletzte zugleich die Geschwindigkeit desselben für jeden Punct seiner Bahn giebt.

Setzt man in der letzten Gleichung den Winkel α sehr klein, so hat man

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} + \frac{2g}{r}.\alpha = 0 \;\ldots\; \text{(III)}$$

und von dieser Gleichung ist das Integral

$$\alpha = \sqrt{\frac{Cr}{2g}}\,.\,\mathrm{Sin.}\,t\sqrt{\frac{2g}{r}}$$

oder auch

$$t = \sqrt{\frac{r}{2g}}\,.\,\mathrm{Arc.\,Sin.}\,\alpha\sqrt{\frac{2g}{rC}},$$

wo C die Constante der Integration bezeichnet. Wenn aber die Gleichung (III) die Pendelbewegung unter der Voraussetzung giebt, daſs der von dem schweren Körper beschriebene Bogen nur klein ist und überdieſs einem Kreise vom Halbmesser r angehört, so ist aus dem, was oben[1] gesagt wor-

1 S. Art. *Pendel.* Bd. VII. S. 309. und Art. *Fall.* Bd. IV. S. 22.

den ist, auch schon ohne weitere Rechnung zu vermuthen, dafs dieselbe Gleichung (III) auch die Bewegung eines *cykloidalischen Pendels* und zwar für jede Gröfse des Bogens der Cykloide darstellen werde. In der That, wenn $BM = s$ den Bogen einer Cykloide $DMmd$ vorstellt, deren tiefster Punct B ist, und wenn man die Verticale $BP = x$ und die Constante $BE = h$ nimmt, wo h die anfängliche Höhe des beweglichen Körpers im Puncte D über der durch B gehenden Horizontallinie anzeigt, so hat man aus den ersten Gründen der Mechanik für jede willkürliche Curve den Ausdruck

Fig. 168.

$$\sqrt{4g}.\partial t = -\frac{\partial s}{\sqrt{h-x}}.$$

Die bekannte einfachste Gleichung der Cykloide aber ist

$$s^2 = 4ax,$$

wo a der Durchmesser des die Cykloide erzeugenden Kreises ist. Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen die Gröfse x, so erhält man

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + \frac{g}{a}.s = 0$$

für die Bewegung des cykloidalischen Pendels, die, wie gesagt, mit der Gleichung (III) von derselben Form ist. Da $\frac{g}{a}$ eine ihrer Natur nach positive Gröfse ist, kann diese Gleichung auch so geschrieben werden

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + a^2 x = 0 \;...\; (IV)$$

Diese Gleichung (IV) drückt demnach die Bewegung eines Pendels aus, das sich in einer vertical stehenden Cykloide bewegt und auf welches blofs die Schwere, ebenfalls in verticaler Richtung, einwirkt. Also drückt auch, nach dem Vorhergehenden, die Gleichung

$$\frac{\partial^2 x'}{\partial t^2} + a^2 x' + \alpha \,\text{Cos.}\, mt = 0 \;...\; (V)$$

die Bewegung eines cykloidalischen Pendels aus, auf welche nebst der Schwere auch noch eine andere kleinere Kraft als Perturbation der ersten Kraft einwirkt, welche Perturbation die Gröfse α Cos. mt ist und in der Richtung der Tangente

der Curve liegt. Wenn die Gröfse α gleich Null wäre, so hätte man für das Integral der Gleichung (V)

$$x' = A' \text{Cos.} (at - B')$$

und daraus folgt, dafs auch in dem durch jene Perturbation gestörten Pendel der Ort des bewegten Körpers für jede gegebene Zeit t durch dieselbe Formel bestimmt werden kann, wie in dem ungestörten Pendel. Dieses unterliegt auch keinem Zweifel, da offenbar dieselbe Sache auch in derselben Form mit unzähligen verschiedenen Werthen ihrer Parameter dargestellt werden kann. Wenn wir aber die letzte Gleichung differentiiren, so finden wir, nach dem Vorhergehenden, dafs mit den gefundenen Werthen von A' und B' die Geschwindigkeit des Pendels gleich $- a A' \text{Sin.} (at - B')$ ist, d. h. dafs auch die Geschwindigkeit in dem gestörten Pendel durch dieselbe Formel, wie in dem ungestörten, dargestellt wird. Demnach ist sowohl der *Ort*, als auch die *Geschwindigkeit* des gestörten Pendels für die Zeit t dieselbe mit der des ungestörten Pendels, vorausgesetzt, dafs für dieses ungestörte die Amplitüde der Vibration in derselben Zeit t durch die Gröfse A' ausgedrückt ist und dafs dieses ungestörte Pendel in dem Augenblicke $\frac{B'}{a}$ sich am äufsersten Endpuncte seiner Amplitüde befunden habe. Sollte also für irgend eine Zeit t die störende Kraft plötzlich verschwinden, so würde von diesem Augenblicke an das Pendel zu beiden Seiten der Verticale solche Schwingungen machen, dafs der Bogen seiner Amplitüde gleich seyn würde demjenigen Werthe von A', welchen das Pendel zu jener Zeit t hatte, und dafs es fortan immer zur Zeit $\frac{B}{a}$ an dem Endpuncte seines Bogens ankommen würde, wo B' wieder denjenigen Werth hat, den es zu derselben Zeit t hatte, als die störende Kraft plötzlich zu wirken aufhörte. Ganz ebenso verhält es sich aber auch mit den Störungen, welche die Planeten in ihrer Bewegung um die Sonne unter einander erleiden, insofern nämlich diese Störungen nicht sowohl auf den Ort des gestörten Planeten in seiner Bahn, als vielmehr auf die Elemente dieser Bahn selbst einwirken, welche Elemente hier diejenigen constanten Gröfsen sind, deren Aenderungen den Differenzen A' — A und B' — B

in dem vorhergehenden Beispiele entsprechen, und die[1] unter der Benennung der Säcularstörungen bekannt sind.

L.

Umlaufszeiten.

Revolution; *Revolutio;* Revolution; *Revolution* ist die Zeit, die ein in einer geschlossenen krummen Linie sich bewegender Körper braucht, um wieder zum anfänglichen Puncte seiner Bahn zurückzukommen. Bei den Himmelskörpern, wo dieser Ausdruck am gebräuchlichsten ist, ist Revolution die Zeit, während welcher der Planet oder Komet um die Sonne oder der Satellit um seinen Hauptplaneten den ganzen Umfang seiner Bahn zurücklegt oder während welcher er wieder zu demselben Puncte seiner Bahn zurückkehrt. Kennt man die tägliche Bewegung a des Planeten, so ist es leicht, die Revolution T desselben zu finden. Es ist nämlich in Folge einer einfachen Proportion, da der Planet in der Zeit von T Tagen 360 Grade zurücklegt,

$$a = \frac{360}{T} \text{ oder } T = \frac{360}{a},$$

wo a in Graden, so wie T in Tagen ausgedrückt wird. Für die Sonne z. B. hat man in Beziehung auf die Fixsterne oder auf irgend einen festen Punct des Himmels die tägliche Bewegung $a = 0^0{,}985609$, also ist auch die Revolution der Sonne in Beziehung auf die Fixsterne

$$T = \frac{360}{a} = 365{,}256384 \text{ Tage.}$$

Allein die Puncte der Bahn, zu welchen der Planet wieder zurückkehren soll, um eine Revolution in Beziehung auf dieselben zu vollenden, können selbst wieder *bewegliche Puncte* seyn, und so wird man für denselben Planeten verschiedene Revolutionen erhalten, je nachdem man seine Bewegung auf verschiedene Puncte seiner Bahn bezieht. Wir wollen die vorzüglichsten derselben angeben.

---

1 Vergl. Art. *Perturbationen.*

Die einfachste ist die *siderische Revolution* oder die Zeit der Rückkehr des Planeten zu demselben Gestirne (*sidus*) als fester Punct des Himmels betrachtet. Wenn nämlich der Planet, von der Sonne gesehn, oder wenn der Satellit, von dem Mittelpuncte seines Hauptplaneten gesehn, wieder zu demselben Puncte des Himmels, bei dem er zuletzt gesehn wurde, zurückkehrt, so hat er um seinen Centralpunct in der That volle 360 Grade zurückgelegt und die Zeit, in welcher er dieses thut, ist seine *wahre* oder, wie sie auch genannt wird, seine *siderische* Umlaufszeit. Für die Sonne, von der Erde gesehn, oder eigentlich für die Erde, von der Sonne gesehn, ist diese siderische Umlaufszeit gleich 365,256384 mittlere Sonnentage und für den Mond ist sie gleich 27,3216614 solcher Tage. Diese wahre oder siderische Revolution ist aber nicht die Zeit, nach welcher die Sonne oder der Mond wieder dieselbe *Länge* erhält, denn die Länge wird vom Frühlingspuncte an gerechnet und dieser Punct ist vermöge der Präcession der Nachtgleichen[1] selbst wieder veränderlich. Die Zeit zwischen zwei nächsten Zurückkünften eines Planeten zu diesem veränderlichen Frühlingspuncte wird die *tropische* oder auch die *periodische* Revolution des Planeten genannt. Für die Sonne ist diese tropische Revolution 365,2422542 und für den Mond 27,321582 mittlere Sonnentage. Ebenso heifst die Zeit zwischen zwei nächsten Durchgängen des Planeten durch die zwei äufsersten Puncte der (ebenfalls beweglichen) grofsen Axe seiner Bahn die *anomalistische Revolution*, weil nämlich von diesem Puncte aus die mittlere und wahre *Anomalie* gezählt wird. Für die Erde ist das anomalistische Jahr 365,259709 und für den Mond 27,55455 Tage. Bei dem Monde pflegt man noch zwei andere Revolutionen anzuwenden, da durch sie besonders die Berechnung der Finsternisse sehr erleichtert wird. Die Zeit nämlich zwischen zwei nächsten Durchgängen des Monds durch den auf- oder absteigenden *Knoten* seiner Bahn wird die *drakontische Revolution* des Monds oder auch der *Drachenmonat* genannt, und die Zeit endlich zwischen zwei nächsten Neumonden oder zwischen zwei nächsten Vollmonden heifst die *synodische Revolution* des Monds. Es ist daher die *siderische* Revolution eines Pla-

1 S. Art. *Vorrückung der Nachtgleichen.*

neten die Umlaufszeit desselben um die Sonne in Beziehung auf einen festen Punct des Himmels, die *tropische* in Beziehung auf die Nachtgleichen, die *anomalistische* in Beziehung auf die grofse Axe oder auf die Apsiden, die *drakontische* auf die Knoten und endlich die *synodische* in Beziehung auf die von der Erde gesehene Sonne, d. h. auf die Conjunction oder Opposition des Planeten mit der Sonne.

A. Ableitung dieser Revolutionen aus einander.

Wir wollen sehn, wie man, wenn man eine dieser Revolutionen kennt, die andern daraus ableiten kann. Nehmen wir an, zwei Körper bewegen sich hinter einander in der Peripherie eines Kreises, dessen Halbmesser r Fufs und dessen Peripherie daher $2r\pi$ Fufs betrage, wo π das Verhältnifs der Peripherie jedes Kreises zu seinem Durchmesser bezeichnet. Der erste dieser Körper soll a und der zweite a' Fufs in einer Secunde zurücklegen, die anfängliche Distanz beider Körper soll b Fufs betragen, und der erste soll um t Secunden früher, als der zweite, seine Bewegung anfangen. Wann werden sich beide Körper begegnen? Wenn sie sich in x Secunden nach dem Abgange des zweiten Körpers begegnen, so ist in dieser Zeit der Weg des ersten Körpers $a(t + x)$ und der des zweiten $a'x$. Man hat daher $a'x = b + a(t + x)$, folglich

$$x = \frac{at + b}{a' - a}.$$

Wenn sie sich, nach dieser ersten Begegnung, noch weiter zu bewegen fortfahren, so wird man die Zeit zwischen der ersten und zweiten Begegnung finden, wenn man in dem letzten Ausdrucke $b = 2r\pi$ und $t = 0$ setzt, welche Zeit daher

$$\frac{2r\pi}{a' - a}$$

seyn wird, so dafs man daher für die Zeit der zweiten Begegnung seit dem Abgange des zweiten Körpers haben wird

$$x' = \frac{2r\pi + at + b}{a' - a}$$

und ebenso wird die Zeit der dritten Begegnung seyn

$$x'' = \frac{4r\pi + at + b}{a' - a}$$

und die der vierten

$$x''' = \frac{6r\pi + at + b}{a' - a} \text{ u. s. w.}$$

Sollte der erste Körper seine Bewegung nicht, wie bisher vorausgesetzt wurde, t Secunden früher, sondern vielmehr t Secunden später anfangen, als der zweite, so wird man in den vorhergehenden Ausdrücken die Gröfse t negativ nehmen, und ebenso wird a negativ zu nehmen seyn, wenn der zweite dem ersten nicht nachfolgt, wie oben angenommen wurde, sondern ihm entgegen geht.

Beisp. I. Um 12 Uhr stehn beide Zeiger einer Uhr über einander. Wann werden sie wieder über einander stehn?

Hier ist für den Stundenzeiger $a = 1$ und für den Minutenzeiger $a' = 12$; ferner $t = 0$ und $b = 60$, so wie auch $2r\pi = 60$ Minuten. Das erste Zusammentreffen hat daher um die Zeit

$$x = \frac{b}{a' - a} = \tfrac{60}{11} = 5\tfrac{5}{11}$$

oder $5\tfrac{5}{11}$ Minuten nach 1 Uhr statt. Die zweite Begegnung erfolgt um

$$x' = \frac{2 \times 60}{11} = 10\tfrac{10}{11} \text{ Minuten nach 2 Uhr;}$$

die dritte Begegnung hat statt um

$$x'' = \frac{3 \times 60}{11} = 16\tfrac{4}{11} \text{ Minuten nach 3 Uhr u. s. w.}$$

Beisp. II. An einem gegebenen Tage ist die Länge der Sonne 130 und die des Monds 70 Grade; die Geschwindigkeit des Monds ist 13,368, wenn die der Sonne gleich der Einheit angenommen wird. Man hat daher

$$a = 1, \quad a' = 13{,}368, \quad b = 60 \text{ und } t = 0,$$

und damit erhält man für die Zeit der Begegnung beider Gestirne

$$x = \frac{at + b}{a' - a} = \frac{60}{12{,}368} = 4{,}851 \text{ Tage,}$$

und am Ende dieser 4,851 Tage wird die Länge dieser beiden Gestirne 134,851 Grade seyn.

Beisp. III. Wenn wieder das Verhältnifs der Geschwindigkeiten dieser beiden Gestirne 13,368 ist und wenn sie, von der Erde gesehn, dieselbe Länge haben oder in Conjunction sind, wann werden sie in ihre nächstfolgende Conjunction treten? Hier ist $a = 1$, $a' = 13{,}368$, $t = 0$ und b gleich der Umlaufszeit der Sonne oder $b = 365{,}256384$, also ist auch

$$x = \frac{at + b}{a' - a} = \frac{365{,}256384}{12{,}368} = 29{,}532 \text{ Tage},$$

und dieses wird daher die *synodische* Revolution des Monds seyn.

Sey überhaupt A die Revolution irgend eines Gestirns in Beziehung auf irgend einen Punct, also auch $\frac{360}{A}$ die tägliche Bewegung dieses Gestirns in Beziehung auf denselben Punct. Nennt man ferner m, in Graden ausgedrückt, die tägliche Bewegung eines zweiten Puncts in Beziehung auf jenen ersten, so ist auch $\frac{360}{A} - m$ die tägliche Bewegung des Gestirns in Beziehung auf diesen zweiten Punct, und wenn daher B die Revolution des Gestirns in Beziehung auf diesen zweiten Punct genannt wird, so ist

$$B = \frac{360}{\frac{360}{A} - m} = \frac{A}{1 - \frac{Am}{360}}.$$

Setzt man der Kürze wegen $\Theta = \frac{A}{360}$, so hat man

$$B = A.[1 + \Theta m + \Theta^2 m^2 + \Theta^3 m^3 + \ldots]$$

und dieses ist die gesuchte Gleichung zwischen den beiden Revolutionen A und B. Geht der zweite Punct in Beziehung auf das Gestirn rückwärts, so wird m negativ genommen.

Für die Erde ist, nach dem Vorhergehenden, die siderische Revolution $A = 365{,}256384$ Tage. Um daraus die tropische Revolution der Erde zu finden, so beträgt die jährliche allgemeine Präcession[1] $50'',2296$ für das Jahr 1825, also ist auch die tägliche Präcession in Graden ausgedrückt

1 S. Art. *Vorrückung.*

$$m = -\frac{50{,}2296}{3600 \times 365{,}25} = -0{,}0000382,$$

wenn die Länge des Julianischen Jahres gleich $365\frac{1}{4}$ Tage gesetzt wird. Wir erhalten demnach für das tropische Jahr der Erde

$$B = \frac{360}{0{,}985609 + 0{,}0000382} = 365{,}24225 \text{ Tage, wie zuvor.}$$

Das tropische Jahr ist demnach um 0,014134 Tage, nämlich um die Zeit, welche die Erde gebraucht, den Bogen 50″,2296 der jährlichen Präcession zurückzulegen, kürzer als das siderische. Da aber dieser Bogen veränderlich ist, so ist auch die Länge des tropischen Jahres der Erde veränderlich, während die des siderischen für alle Zeiten dieselbe bleibt.

Für den Mond hatten wir oben die siderische Revolution $A = 27{,}3216614$ Tage. Ueberdiefs ist $m = -0{,}0000382$, wie zuvor, also auch

$$\frac{A\,m}{360} = -0{,}000002899132$$

und daher die tropische Revolution des Monds

$$B = \frac{A}{1 - \frac{A\,m}{360}} = 27{,}321582 \text{ Tage, wie oben.}$$

Die jährliche Bewegung der Apsiden der Erdbahn in Beziehung auf die Gestirne ist 11,798 Secunden gen Ost, also ist auch die tägliche Bewegung der Apsiden in Graden ausgedrückt

$$m = \frac{11{,}798}{3600 \times 365{,}25}$$

und daher

$$\frac{A\,m}{360} = 0{,}0000091036,$$

woraus man für das anomalistische Jahr der Erde erhält

$$B = A + \frac{A^2 m}{360} + \ldots = 365{,}259709 \text{ Tage.}$$

Auch kann man die vorhergehende allgemeine Gleichung noch einfacher auf folgende Weise ausdrücken. Ist A die Revolution des Gestirns in Beziehung auf einen Punct, T die

Revolution eines zweiten Puncts in Beziehung auf jenen ersten und endlich B die Revolution des Gestirns in Beziehung auf diesen zweiten Punct, so hat man

$$B = \frac{1}{\frac{1}{A} - \frac{1}{T}} \text{ oder } B = \frac{AT}{T - A}.$$

Ist z. B. A = 27,3216614 die siderische Revolution des Monds und T = 3232,575343 die siderische Revolution der grofsen Axe der Mondbahn, so ist

$$\frac{1}{A} = 0{,}036601 \text{ und } \frac{1}{T} = 0{,}000309351,$$

also auch die anomalistische Revolution des Monds

$$B = \frac{1}{\frac{1}{A} - \frac{1}{T}} = 27{,}55455.$$

Ist aber T = — 6793,39108 die siderische Revolution der Mondknoten und bleibt A wie in dem letzten Beispiele, so hat man

$$\frac{1}{T} = -0{,}000147202$$

und daher den Drachenmonat des Monds gleich

$$B = \frac{1}{\frac{1}{A} - \frac{1}{T}} = 27{,}21221 \text{ Tage u. s. w.}$$

B. Bestimmung der Revolution aus Beobachtungen.

Sey l die beobachtete heliocentrische (von der Sonne aus gesehene) Länge eines Planeten für irgend eine Zeit und l' die durch eine spätere Beobachtung gegebene heliocentrische Länge desselben, und nehmen wir an, dafs die Zwischenzeit der beiden Beobachtungen t Tage betrage. Wenn nun der Planet sich in einem Kreise, also gleichförmig, um die Sonne bewegte, so würde die tropische Umlaufszeit T, in Tagen ausgedrückt, durch folgende Proportion gegeben seyn

$$l' - l : t = 360^\circ : T,$$

oder man würde haben

$$T = \frac{360\,t}{l'-l},$$

wo l und l' in Graden und Theilen eines Grades ausgedrückt sind. Da aber die Planeten sich nicht in Kreisen, sondern in Ellipsen, also auch ungleichförmig um die Sonne bewegen, so mufs man die beiden beobachteten *wahren* Längen zuerst von dieser elliptischen Ungleichheit befreien oder in die sogenannten *mittleren* Längen verwandeln[1]. Ebenso mufs man sie von den Störungen befreien, die durch die Nutation, Aberration u. s. w. und durch die Einwirkungen oder Perturbationen der anderen Planeten entstanden sind, so dafs also l und l' die *mittleren*, von allen diesen fremden Einflüssen ungestörten Längen bezeichnen.

Da die Bestimmung der Umlaufszeit für die Theorie der Planeten von der gröfsten Wichtigkeit ist, so mufs sie auch mit aller möglichen Schärfe vorgenommen werden und die beobachteten mittleren Längen l und l' sollten daher ganz fehlerfrei seyn. Allein da alle unsere Beobachtungen, wie überhaupt jede menschliche Unternehmung, nie, oder doch nur zufällig, ganz fehlerlos seyn kann, und da ebenso die erwähnten Reductionen (durch welche man die wahren beobachteten Längen auf mittlere bringt) wieder mannigfaltige neue, wenn gleich vielleicht nur geringe, Fehler veranlassen können, so wollen wir annehmen, dafs die erste mittlere Länge l um ∂l und die zweite l' um $\partial l'$ fehlerhaft sey, so dafs man also eigentlich die beiden mittleren Längen $l + \partial l$ und $l' + \partial l'$ hätte beobachten sollen. Dann würde also auch die aus diesen Längen geschlossene Revolution nicht

$$T = \frac{360\,t}{l'-l},$$

sondern eine andere $T + \partial T$ gewesen seyn, und man findet diese Verbesserung ∂T, wenn man die vorhergehende Gleichung in Beziehung auf T und $l' - l$ differentiirt. Dieses giebt

$$\partial T = -\frac{(\partial l' - \partial l)}{l'-l} . T = -\frac{(\partial l' - \partial l) . T^2}{360\,t}.$$

1 S. Art. *mittlerer Planet.* Bd. VI. S. 2310.

Diese Gleichung zeigt, dafs bei denselben Fehlern ∂l und $\partial l'$ der Beobachtung der Fehler ∂T in der aus diesen Beobachtungen gefolgerten Revolution desto kleiner seyn wird, je gröfser der Bogen $(l' - l)$ ist, den der Planet in der Zwischenzeit t durchlaufen hat, oder je gröfser die Zwischenzeit t selbst ist. Man wird daher im Allgemeinen immer zwei in der Zeit sehr entfernte Beobachtungen zu diesem Zwecke auswählen müssen, wenn man den Werth von T mit grofser Präcision erhalten will. Gesetzt man hätte zu Hipparch's Zeit (150 Jahre vor Chr. G.) und im Anfange des gegenwärtigen Jahrhunderts zwei Längen l und l' des Monds beobachtet, so würde die Zwischenzeit dieser beiden Beobachtungen

$$150 + 1800 = 1950 \text{ Jahre}$$

oder, wenn man durch 365,25 multiplicirt, $t = 712237{,}5$ Tage betragen. Die siderische Umlaufszeit des Monds ist aber 27,322 Tage, und sonach giebt die letzte Gleichung

$$\partial T = -0{,}0000029114\,(\partial l' - \partial l),$$

wo $\partial l' - \partial l$ in Graden und ∂T in Tagen ausgedrückt ist. Will man aber, wie gewöhnlich, $\partial l' - \partial l$ in Bogensecunden und ∂T in Zeitsecunden ausdrücken, so hat man

$$\partial T = -0{,}000069874\,(\partial l' - \partial l).$$

Aus der letzten Gleichung geht hervor, dafs man in $\partial l' - \partial l$ einen Fehler von vollen $3^\circ\, 58'\, 32''$ begehn müfste, um die Revolution T um eine einzige Zeitsecunde unrichtig zu erhalten, und dafs ein Fehler von $\partial l' - \partial l = 143'' = 0^\circ\, 2'\, 23''$ erst einen Fehler $\partial T = 0{,}01$ Zeitsecunde geben würde. Man sieht daraus den grofsen Vortheil, welchen uns sehr alte Beobachtungen gewähren. Diesen Vortheil erkannte ohne Zweifel auch schon Hipparch, da er die synodische Umlaufszeit des Monds gleich 29 Tage 12 Stund. 44 Min. 3 Sec., 26224 bestimmte[1], also noch nicht 0",4 gröfser, als sie unsere neuesten Bestimmungen geben, denn nach Laplace[2] ist diese synodische Revolution des Monds gleich 29 Tage 12 St. 44 Min. 2 Sec., 8650624. Allein wenn, wie es leider nur zu oft der Fall ist, diese alten Beobachtungen der Griechen oder Chaldäer gar zu fehler-

1 Ptolemaeus Almagest. Lib. IV. Cap. 2. Lalande Astronomie. §. 1417.

2 Exposition du Syst. du Monde. Vme éd. T. I. p. 41.

haft sind, dann müssen wir uns mit den neueren Beobachtungen begnügen, die zwar des grofsen Vortheils einer sehr langen Zwischenzeit entbehren, aber dafür wieder nur sehr kleine Beobachtungsfehler geben. Dieses ist der Fall bei fast allen alten Planetenbeobachtungen, die uns Ptolemäus erhalten hat, und die noch überdiefs an dem Umstande leiden, dafs sie, besonders für die beiden unteren Planeten, Mercur und Venus, keinen heliocentrischen, sondern nur den geocentrischen Ort der Planeten geben, da doch jene Oerter, die heliocentrischen, unter den obigen Gröfsen l und l′ verstanden werden. Wir werden aber am Ende dieses Artikels kurz zu zeigen suchen, wie man den heliocentrischen Ort eines Planeten in seinen geocentrischen und umgekehrt verwandeln kann.

Hier wird der Ort seyn, die vorzüglichsten und ältesten Beobachtungen der Alten zur bequemen Uebersicht zusammenzustellen. Die sieben ersten hat uns Ptolemäus in seinem Werke *Μεγάλη σύνταξις* erhalten, die beiden letzten aber haben uns die Jesuiten-Missionäre aus den Büchern der Chinesen mitgetheilt. Die Angaben sind sämmtlich vor dem Anfange unserer Zeitrechnung.

Im Jahre 228 vor Chr. G. am 1. März bedeckte Saturn den Stern *γ Virginis*.

Im Jahre 240 am 3. September bedeckte Jupiter den Stern *δ Cancri*.

Im Jahre 264 am 14. Nov. wurde eine gröfste Elongation Mercurs von der Sonne beobachtet, woraus man die Länge dieses Planeten 212° 47′ um 16^h 16′ Paris. Zeit geschlossen hat.

Im Jahre 271 den 17. Januar wurde *β Scorpii* vom Mars bedeckt.

Im Jahre 271 den 11. October wurde γ *Virginis* von der Venus bedeckt.

Im Jahre 719 am 8. März wurde von den Chaldäern in Babylon eine Mondfinsternifs beobachtet.

Im Jahre 720 am 19. März beobachteten dieselben wieder eine Mondfinsternifs.

Im Jahre 1100 beobachtete Tschukong in China die Sonne am Gnomon. Die Resultate dieser Beobachtung sind im Art. *Vorrückung* umständlich angeführt.

Im Jahre 2155 endlich sollen, nach den Erzählungen eines bei den Chinesen heiligen Buches, die Astronomen Hi und Ho eine in diesem Jahre eingetretene Finsternifs falsch berechnet haben und dafür mit dem Tode bestraft worden seyn. Die Beobachtung dieser Finsternifs selbst ist nicht auf uns gekommen.

C. Bestimmung der mittleren Länge der Planeten durch ihre Umlaufszeit.

Wenn sonach die Umlaufszeit T bekannt ist, so ist dadurch, wie bereits oben gesagt, auch die mittlere tägliche Bewegung a durch die Gleichung gegeben

$$a = \frac{360}{T}.$$

Kennt man also die mittlere Länge l des Planeten für irgend eine bestimmte Zeit, die man die *Epoche* des Planeten zu nennen pflegt, so wird man für jede andere Zeit, die t Tage von jener Epoche entfernt ist, die mittlere Länge l' des Planeten durch die Gleichung erhalten

$$l' = l + at,$$

wo t negativ genommen wird, wenn die zweite Zeit, für die man l' sucht, vor der Epoche liegt. Demnach reducirt sich also die Angabe der mittleren Länge der Planeten für jede Zeit auf eine blofse Addition oder Subtraction der Gröfse at zu der Epoche.

Um aber diese Reduction gehörig vorzunehmen, mufs man auf die Einrichtung unseres Kalenders Rücksicht nehmen, welche oben[1] erwähnt worden ist.

Das tropische Jahr der Sonne ist nämlich, nach dem Vorhergehenden, T = 365,2422542 Tage. Da man aber zum bürgerlichen und selbst zum astronomischen Gebrauche das Jahr viel bequemer in ganzen Zahlen, ohne Brüche von Tagen, ausdrücken wird, und da man auf der andern Seite, wenn man z. B. das Jahr zu 365 vollen Tagen annehmen wollte, die Jahreszeiten und mit ihnen die Arbeiten des Acker-

1 S. Art. *Jahr.* Bd. V. S. 671.

baues u. s. w. mit der Zeit ganz verrücken würde, so dafs z. B. der Anfang des Frühlings, der jetzt um die Mitte des März fällt, nach und nach in die späteren Monate des Jahrs, in den April, Mai u. s. w. fallen müfste, so hat man, um beiden Forderungen zu genügen, die *Einschaltungen* eingeführt. Julius Cäsar hat das erste Beispiel davon gegeben, indem er je drei auf einander folgende Jahre zu 365 und das nächstfolgende oder vierte zu 366 Tagen annahm, so dafs jedes durch die Zahl 4 ohne Rest theilbare Jahr unserer Zeitrechnung ein solches *Schaltjahr* von 366 Tagen ist, während die drei anderen *gemeinen* Jahre nur 365 Tage enthalten. Durch diese Einschaltung ist demnach die Länge des Jahrs auf $365\frac{1}{4} = 365{,}25$ Tagen festgesetzt worden, um 0,0077458 zu grofs. Diese Differenz macht aber in 300 Jahren nahe 3 Tage oder in 3000 Jahren schon einen vollen Monat, um den die Jahreszeiten wieder verrückt werden, so dafs daher durch diese Anordnung dem Uebel nur sehr unvollständig abgeholfen worden ist. Diesen Fehler zu verbessern, wurde im J. 1582 die bekannte Kalenderreform vorgenommen. Man hat nämlich in diesem Jahre 10 ganze Tage, um die man wegen jenes Fehlers bereits zu viel zählte, weggenommen, indem man nach dem 4. October dieses Jahres nicht den 5ten, sondern sofort den 15ten zählte, und überdiefs noch die Anordnung gemacht, dafs seit diesem Jahre alle durch 4 theilbare Jahre wieder Schaltjahre seyn sollten, wie zuvor, mit Ausnahme aller derjenigen Säcularjahre (deren zwei letzte Ziffern 00 sind), die nicht durch 400 ohne Rest theilbar sind. So sind also die Jahre 1600, 2000, 2400 u. s. w. Schaltjahre von 366 Tagen, die Jahre 1700, 1800, 1900, 2100 u. s. w. aber sind nur gemeine Jahre von 365 Tagen. Da man sonach aus jeden vier Jahrhunderten der von Julius Cäsar eingeführten Rechnung wieder 3 Tage weggenommen hat, so ist dadurch die Länge des bürgerlichen Jahrs seit dem Jahre 1582 auf $365\frac{97}{400} = 365{,}2425$ Tage gebracht worden. Auch dieses *Gregorianische* Jahr, wie es vom Papst Gregor XIII. heifst, unter dessen Auspicien diese Reform eingeführt wurde, ist noch um 0,0002458 Tage zu grofs, und man hätte diesen übrigens nur kleinen Fehler leicht verbessern können, wenn man noch alle 4000 Jahre einen Tag unterdrückt hätte, wo-

durch die Länge des Jahrs auf $365\frac{969}{4000} = 365{,}24225$ Tage gebracht worden wäre. Drücken wir nun die Epochen irgend eines Jahres, z. B. von 1838, durch J^{1838} aus, so wird man aus der Epoche für den Anfang des gegenwärtigen Jahrhunderts oder aus J^{1800} alle anderen auf folgende Art finden.

Für die folgenden:

$J^{1900} = J^{1800} + 36524\,a$

$J^{2000} = J^{1900} + 36525\,a$

$J^{2100} = J^{2000} + 36524\,a$

Für die vorhergehenden:

$J^{1700} = J^{1800} - 36524\,a$

$J^{1600} = J^{1700} - 36524\,a$

$J^{1500} = J^{1600} - 36515\,a$

$J^{1400} = J^{1500} - 36525\,a$

$J^{1300} = J^{1400} - 36525\,a$ u. s. w.

Kennt man ebenso die Epochen der Säcularjahre, so findet man daraus die Epochen der zwischenliegenden Jahre sofort durch folgende Ausdrücke:

$$J^{1743} = J^{1700} + 43\,(365\,a) + 10\,a, \text{ weil } \frac{43}{4} = 10 + \ldots$$

$$J^{1876} = J^{1800} + 76\,(365\,a) + 19\,a, \text{ weil } \frac{76}{4} = 19 \text{ u. s. w.}$$

Ist dann A die Epoche irgend eines *gemeinen* Jahres, so ist die Epoche des 0ten Januars dieses Jahres (d. h. des 31sten Decembers des vorhergehenden Jahres) gleich $A + 0 . a = A$, und ebenso ist die Epoche des

0 Febr. (31. Januar)	=	A + 31 a
0 März (28. Febr.)	=	A + 59 a
0 April (31. März)	=	A + 90 a
0 Mai (30. April)	=	A + 120 a
0 Juni (31. Mai)	=	A + 151 a
0 Juli (30. Juni)	=	A + 181 a
0 Aug. (31. Juli)	=	A + 212 a
0 Sept. (31. Aug.)	=	A + 243 a
0 Octobr. (30. Sept.)	=	A + 273 a
0 Nov. (31. Oct.)	=	A + 304 a
0 Dec. (30. Nov.)	=	A + 334 a.

Ist aber das Jahr ein Schaltjahr, so ist die Epoche des 0 Januars gleich A — a oder alle Epochen der Tage der beiden

ersten Monate, Januar und Februar, sind in Schaltjahren um ein a kleiner, als in dem gemeinen Jahre, und da zu Ende des Februars das Schaltjahr einen Tag mehr hat, als das gemeine, so hebt sich dadurch jener Unterschied wieder auf oder die Epochen sind in den zehn letzten Monaten bei gemeinen und bei Schaltjahren dieselben. Nach den neuesten Sonnentafeln von Zach und Delambre ist die Epoche der Sonne für das Jahr 1800 oder die mittlere Länge l der Sonne für den 0 Januar 1800 im Augenblicke des mittleren Mittags in Paris

$$l = 279° \, 53' \, 59'',3 = 279°,899804$$

und die mittlere tropische Bewegung der Sonne an einem mittleren Tage

$$a = \frac{360}{365,2422542} = 0°,98564722.$$

Damit ist es nun leicht, die Einrichtung der astronomischen Tafeln für die mittleren Orte der Planeten zu erkennen oder selbst solche Tafeln zu construiren. Um davon hier einen kurzen Abrifs zu geben, wollen wir die mittlere Länge der Sonne von dem gegenwärtigen Jahre 1837 auf zwölf folgende Jahre mittheilen, wie sie für den Meridian von Wien statt hat, welche Stadt um $0^h \, 56' \, 10''$ östlich von der königl. Sternwarte in Paris liegt.

Tafeln der Sonne.

Jahre	mittlere Länge	Monate	mittl. Länge	Tage	mittl. Länge	St.	mittl. Länge	Minut.	mittl. Länge
1837	279°,897	0 Febr.	30°,555	1	0°,986	1	0°,041	1	0°,001
38	279,658	0 März	58,153	2	1,971	2	0,082	2	0,001
39	279,419	0 April	88,708	3	2,966	3	0,123	3	0,002
40	280,166	0 Mai	118,278	4	3,943	4	0,164	4	0,003
41	279,927	0 Juni	148,833	5	4,928	5	0,205	5	0,003
42	279,688	0 Juli	178,402	6	5,914	6	0,246	6	0,004
43	279,450	0 Aug.	208,957	7	6,900	7	0,287	7	0,005
44	280,197	0 Sept.	239,512	8	7,885	8	0,329	8	0,006
45	279,958	0 Oct.	269,082	9	8,871	9	0,370	9	0,006
46	279,719	0 Nov.	299,637	10	9,857	10	0,411	10	0,007
47	279,481	0 Dec.	329,206	20	19,713	20	0,821	30	0,020
1848	280,228			30	20,699			50	0,034

Mittelst einer solchen Tafel wird man nun, ohne auf die vorhergehenden Multiplicationen mit grofsen Zahlen einzugehn, auf eine ebenso einfache als bequeme Weise die mittlere Länge der Sonne für jede gegebene Zeit finden können. Man bemerke noch, dafs man für Schaltjahre in der Columne der Tage, in den beiden ersten Monaten des Jahrs, einen Tag weniger nehmen soll, als angegeben wird. Sucht man z. B. die Länge der Sonne für das Jahr 1842 den 23sten August $14^h\ 5'\ 30''$ mittlerer Par. Zeit oder um $2^h\ 5'\ 30''$ nach Mitternacht, so hat man, da Paris um $0^h\ 56'\ 10''$ westlich von Wien liegt, für dieselbe Epoche, in mittlerer Wiener Zeit ausgedrückt, den 23. August $15^h\ 1'\ 40''$. Damit giebt aber die vorhergehende Tafel

1842 . . .	279°,688
0 August	208,957
23 Tage . . .	22,679
15 Stunden . .	0,616
1,7 Min. . . .	0,001
	511,941
	360
gesuchte Länge ☉ . . .	151°,941.

Man suche ebenso die Länge der mittleren Sonne für das Jahr 1844 am 8. Februar $3^h\ 12'\ 20''$ mittl. Berliner Zeit oder, da Berlin $0^h\ 11'\ 56''$ westlich liegt, für $3^h\ 24'\ 16''$ mittlerer Wien. Zeit. Die Tafel giebt, da 1844 ein Schaltjahr ist, also hier für den 7ten Febr. gesucht werden soll,

1844 . . .	280°,197
0 Febr. . . .	30,555
7 Tage . . .	6,900
3 Stunden . .	0,123
24,3 Min. . . .	0,017
gesuchte Länge ☉ . . .	317°,792.

Wie man dann aus dieser mittlern Länge der Sonne oder eines Planeten den wahren Ort derselben in der Bahn suchen soll, ist in dem Artikel *„mittlerer Planet"* erklärt worden. Wie man aber, ebenfalls ohne weitere Rechnung, durch blofse Hülfe von Tafeln, aus dem mittleren Orte nicht blofs den wahren heliocentrischen, sondern auch den wahren geocentrischen

Ort dieser Himmelskörper finden kann, findet man in Littrow's Calendariographie. Wien 1828.

D. Abhängigkeit der Umlaufszeiten der Planeten von den grofsen Axen ihrer Bahnen.

Nach dem bekannten dritten Gesetze Kepler's verhalten sich die Quadrate der (siderischen) Umlaufszeiten der Planeten, wie die Würfel der grofsen Axen ihrer Bahnen. Nach den Beobachtungen hat man für die Erde die siderische Umlaufszeit $T = 365{,}256384$ und für Mars $T' = 686{,}979579$ Tage. Ist also a die halbe grofse Axe der Erdbahn und a' der Marsbahn, so hat man in Folge jenes Gesetzes

$$\frac{a'^3}{a^3} = \frac{T'^2}{T^2},$$

oder, wenn man statt T und T' die obigen Zahlen substituirt,

$$\frac{a'}{a} = \sqrt[3]{\left(\frac{T'}{T}\right)^2} = 1{,}523693,$$

oder endlich, wenn man die halbe grofse Axe a der Erdbahn, nach dem astronomischen Gebrauche, als Einheit annimmt,

$$a' = 1{,}523693.$$

Auf diese Weise findet man also die grofsen Axen der Planetenbahnen, wenn die Umlaufszeiten derselben durch unmittelbare Beobachtungen gegeben sind. Die halbe grofse Axe der Erdbahn aber findet man, wie in dem Art. *Venus* gezeigt wird, durch die Beobachtung der Vorübergänge dieses Planeten vor der Sonnenscheibe.

Nach diesem dritten Gesetze Kepler's ist also das Verhältnifs des Würfels der grofsen Halbaxe zum Quadrat der Umlaufszeit für alle Planeten unseres Sonnensystems eine constante Gröfse. Allein nach dem bekannten zweiten Gesetze dieses grofsen Astronomen sind die von dem Radius Vector des Planeten um die Sonne beschriebenen Flächen den Zeiten proportional, so dafs also auch das Verhältnifs dieser Fläche zur Zeit, in welcher sie beschrieben wird, für jeden Planeten eine constante Gröfse ist. Dieses hat schon mehrere nicht genug umsichtige Leser auf den Zweifel geführt, dafs

diese zwei Gesetze mit einander im Widerspruche seyen. Sie schlossen nämlich so. Ist a und b die halbe grofse und kleine Axe und F die Fläche der ganzen Ellipse, so wie T die Umlaufszeit des Planeten in dieser elliptischen Bahn, so hat man nach dem zweiten Gesetze KEPLER's

$$\frac{F}{T} = M,$$

wo M eine constante Gröfse bezeichnet. Es ist aber $F = \pi a b$ oder, wenn man die Bahn kreisförmig annimmt, $F = a^2 \pi$, also auch die vorige Gleichung, wenn $\pi = 3{,}14159\ldots$ ist,

$$\frac{a^2 \pi}{T} = M \text{ oder } \frac{a^2}{T} = \frac{M}{\pi}$$

und dieses widerspricht allerdings dem dritten Gesetze, nach welchem $\frac{a^3}{T^2}$ und nicht $\frac{a^2}{T}$ eine constante Gröfse seyn soll.

Allein der Irrthum in diesem Schlusse liegt in der ersten Gleichung

$$\frac{F}{T} = M,$$

in welcher stillschweigend angenommen worden ist, dafs die Gröfse M eine für *alle* Planeten constante und identische Gröfse seyn soll, was keineswegs der Fall ist. Diese Gröfse M ist nämlich nur für alle Puncte der Bahn eines und desselben Planeten constant, aber sie variirt von einem Planeten zum andern, während im Gegentheile die Gröfse $\frac{a^3}{T^2}$ in der That für *alle* Planeten und Kometen unseres Sonnensystems eine und dieselbe unveränderliche Gröfse bezeichnet. Jene erste Gleichung mufs nämlich so ausgedrückt werden

$$\frac{F}{T} = \tfrac{1}{2}\mu . \sqrt{p},$$

wo μ eine für alle Planeten constante Gröfse und p den halben Parameter jeder einzelnen Planetenbahn bezeichnet. Substituirt man in dieser Gleichung statt F den Werth

$$F = \pi a b = \pi a^{\frac{3}{2}} . \sqrt{p},$$

so erhält man sofort

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mu^2}{4\pi^2},$$

wie es dem dritten Gesetze KEPLER's gemäfs ist.

Ist nämlich überhaupt f die Fläche des elliptischen Sectors, dessen Scheitel im Brennpuncte der Ellipse ist, und t die Zeit, während welcher der Radius Vector des Planeten diese Fläche zurücklegt, so hat man

$$\frac{f}{t} = \frac{1}{2}\mu . \sqrt{p} \ldots \quad (I)$$

also auch für die Fläche F der ganzen Ellipse, wo t in die Umlaufszeit T übergeht,

$$\frac{F}{T} = \frac{1}{2}\mu . \sqrt{p},$$

oder, da

$$F = \pi a^{\frac{3}{2}} \sqrt{p} \text{ ist,}$$

$$\frac{\pi a^{\frac{3}{2}} \sqrt{p}}{T} = \frac{1}{2}\mu \sqrt{p} \text{ oder } \frac{a^3}{T^2} = \left(\frac{\mu}{2\pi}\right)^2 \ldots \quad (II)$$

oder endlich

$$\mu = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{T} \ldots \quad (III)$$

wo die vorletzte dieser Gleichungen oder wo die Gleichung (II) das dritte Gesetz KEPLER's und wo die Gleichung (III) den Werth der erwähnten Constante μ giebt. Die Gleichung (I) nämlich regulirt die Bewegung jedes einzelnen Planeten in seiner elliptischen Bahn, ohne Rücksicht auf die andern; die Gleichung (II) aber ist das Band, welches die Bewegungen aller Planeten und Kometen unter einander verbindet; die Gleichung (III) endlich giebt, wenn man in ihr die Werthe von a und T irgend eines Planeten unseres Sonnensystems substituirt, diejenige Constante μ, die diesem Systeme eigenthümlich ist und durch die es sich, in Beziehung auf die in diesem Systeme herrschende Centralkraft, von allen andern Systemen unterscheidet. Diese Gröfse μ kann daher als die *Charakteristik* unseres Sonnensystems betrachtet werden. Für die Erde z. B. ist die siderische Umlaufszeit T = 365,256384 und die halbe grofse Axe der Bahn a = 1; also ist auch nach der Gleichung (III)

$$\mu = \frac{2\pi}{T} = \frac{6{,}2831853}{365{,}256384} = 0{,}0172021$$

in Theilen des Halbmessers, oder in Secunden ausgedrückt

$$\frac{\mu}{\text{Sin. } 1''} = 3548'',19.$$

E. Betrachtungen über diese Charakteristik des Sonnensystems.

Diese Gröfse $\mu = 0{,}0172021$ ist es also, wodurch unser Sonnensystem sich von allen übrigen Systemen des Weltenraums unterscheidet, in welchem ebenfalls mehrere Körper, wie hier die Planeten, um einen Centralpunct, wie hier die Sonne, sich bewegen. Das Verhältnifs der Fläche f zu der Zeit t besteht nämlich, wie die obige Gleichung

$$\frac{f}{t} = \frac{1}{2}\mu . \sqrt{p}$$

zeigt, aus zwei Gliedern $\frac{1}{2}\mu$ und $\sqrt{p}$. Von diesen Gliedern ist das letzte $\sqrt{p}$ von dem Parameter (von der Gröfse) der Planeten- oder Kometenbahn abhängig und daher von einer Bahn zur andern, in demselben Systeme, veränderlich, während das andere Glied $\frac{1}{2}\mu$ für alle Körper desselben Systems dieselbe constante Gröfse bleibt. Diese Gröfse μ bezieht sich also nicht mehr auf die Körper, welche die Sonne umkreisen, sondern sie bezieht sich nur auf diese Sonne selbst, als auf den Centralkörper des ganzen Systems; sie bezieht sich auf die eigentliche Kraft dieses Centralkörpers, die derselbe auf alle Planeten und Kometen, die zu ihm gehören, ausübt, oder endlich mit andern Worten, da die absolute Kraft eines Körpers nur durch seine *Masse* bestimmt wird, so bezieht sich die Gröfse μ auf die *Masse der Sonne.* Wenn man daher von unserem Systeme zu einem anderen, wenn man von unserer Sonne zu einer anderen übergeht, um welche sich wieder andere Körper, übrigens nach denselben Gesetzen, bewegen, so wird auch diese Gröfse μ einen anderen Werth erhalten. Dieses wird z. B. der Fall bei allen Doppelsternen seyn, von deren mehreren wir bereits die elliptischen Bahnen des einen dieser Sterne um den anderen beobachtet und der Rechnung unterworfen haben. Allein auch schon in diesem

unseren eigenen Sonnensysteme können wir davon mehrere Beispiele anführen. *Jupiter* z. B. ist so weit von der Sonne und von allen übrigen Planeten entfernt und seine Masse ist so beträchtlich, dafs er mit seinen vier Monden gleichsam ein eigenes, wenn gleich untergeordnetes System in unserem Weltenraume bildet, daher auch dieses System seine eigene Charakteristik haben wird. Dasselbe gilt auch von unserer Erde, die mit ihrem Monde ein abgesondertes System bildet. Um die Charakteristik dieser verschiedenen Systeme zu finden, werden wir die obige Gleichung (III)

$$\mu = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{T}$$

wieder vornehmen. Setzt man $a = 1$ und $T = 365{,}256384$ Tage für die Erde, so erhält man, wie wir oben gesehn haben, $\mu = 0{,}0172021$ und diese Gröfse μ ist, wie für sich klar, in Theilen des Halbmessers der Erdbahn ausgedrückt. Will man sie aber in geographischen Meilen ausdrücken, so wird man a gleich 20665840 setzen, denn dieses ist die Anzahl der Meilen, welche die halbe grofse Axe der Erdbahn enthält. Läfst man dann T, wie zuvor, so erhält man

$$\mu = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{T} = 1616075550 \text{ Meilen.}$$

Für den Mond unserer Erde aber ist $a = 51850$ Meilen und die siderische Umlaufszeit $T = 27{,}321661$ Tage, also ist auch für dieses irdische System

$$\mu' = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{T} = 2715160 \text{ Meilen.}$$

Für den vierten Satelliten Jupiters endlich ist $a = 245400$ Meilen und $T = 16{,}68902$ Tage, also auch

$$\mu' = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{T} = 45768000 \text{ Meilen.}$$

Wollte man aber in diesen Bestimmungen der Gröfse μ die Umlaufszeit T nicht, wie oben, in mittleren Sonnentagen, sondern in Zeitsecunden ausdrücken, so würde man nur die obigen μ und μ' durch 24×60^2 oder durch 86400 dividiren. Auf diese Weise wird z. B. für die Erde das obige $\mu = 0{,}0172021$ übergehn in

$$\mu = 0{,}0000001991 \text{ Halbmesser der Erdbahn}$$

und ebenso wird das vorhergehende $\mu' = 1616075550$ übergehn in

$$\mu' = 18705 \text{ geogr. Meilen.}$$

Um die Bedeutung dieser wichtigen Gröſse μ näher kennen zu lernen, wollen wir die zwei Gleichungen näher betrachten, die wir oben[1] für die Bewegung der Planeten und Kometen um die Sonne gegeben haben. Diese Gleichungen sind, wenn man daselbst μ^2 statt μ setzt,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\mu^2}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = 0 \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\mu^2}{r^2} \cdot \frac{y}{r} = 0 \end{aligned}\right\}$$

wo $\frac{\mu^2}{r^2}$ die Kraft der Sonne in der Richtung des Radius Vector r des Planeten bezeichnet. Da aber diese Kraft nach dem von NEWTON entdeckten Gesetze der Schwere gleich der Masse dividirt durch das Quadrat der Entfernung r des anziehenden Körpers ist, so bezeichnet μ^2 die *Masse der Sonne.* Da also die in der Entfernung r von der Sonne statt habende Anziehung der Sonne $\frac{\mu^2}{r^2}$ ist, so wird man, zur näheren Bestimmung dieser Kraft, vor Allem eine Zeiteinheit und eine Raumeinheit festsetzen müssen. Jene ist für unser Sonnensystem der mittlere Sonnentag und diese ist die halbe groſse Axe der Erdbahn. In Beziehung auf diese beiden Einheiten ist also

$$\mu = 0{,}0172021 \text{ und } \mu^2 = 0{,}0002959.$$

Diese Zahlen aber sind so zu verstehn. Wenn die Sonne auf einen ruhenden materiellen Punct, dessen Entfernung von der Sonne gleich r ist, während eines mittleren Tags fortwährend einwirkt (und zwar immer mit derselben Kraft, so daſs also die relative Entfernung beider Körper sich nicht änderte), so wird die Sonne am Ende dieses Tages dem materiellen Puncte eine Geschwindigkeit ertheilt haben, mit welcher er, wenn er

1 S. Art. *Mechanik.* Bd. VI. S. 1569. Nr. III.

jetzt sich ganz allein selbst überlassen bliebe, in der Zeiteinheit, d. h. in einem mittleren Tage, um die Länge $\mu^2 = 0{,}0002959$ Halbmesser der Erdbahn, sich fortbewegen würde. Durch die Schwere der Erde aber erhält bekanntlich jeder Körper auf der Oberfläche derselben im freien Falle während der ersten Secunde die Geschwindigkeit von 30,1028 Par. Fuſs, also auch die Geschwindigkeit von

$$\frac{30{,}1028}{22830} \text{ geogr. Meilen,}$$

oder endlich, da 15 geographische Meilen auf einem Grad des Aequators gehn, die Geschwindigkeit von

$$\frac{30{,}1028}{22830} \cdot \frac{2\pi}{5400} = 0{,}00000153428 \text{ Erdhalbmessern,}$$

welche letzte Zahl wir g nennen wollen. Drückt man nun die Gröſse $\mu^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$ ebenfalls im Erdhalbmessern aus, so wird man, da die Sonnenparallaxe gleich 8,6 Secunden beträgt, statt a die Gröſse $\frac{1}{\text{Sin. } 8'',6}$ setzen, so daſs man daher für die Kraft der Sonne den Ausdruck hat

$$\mu^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{g T^2} = \frac{4\pi^2}{g T^2 \text{ Sin.}^3 8'',6},$$

wenn die Kraft der Erde gleich der Einheit vorausgesetzt wird. Um diesen Ausdruck in Zahlen darzustellen, hat man

$$\begin{aligned}
\text{Log. } 4\pi^2 &= 1{,}5963598 \\
\text{Log. } \frac{1}{\text{Sin.}^3 8'',6} &= 3{,}1397798 \\
&\overline{4{,}7361396} \\
\text{Log. } T^2 &= 4{,}9982230 \\
&\overline{9{,}7379166} \\
\text{Log. } g &= 4{,}1859663 \\
\text{Log. } \mu^2 &= 5{,}5520103 \\
\mu^2 &= 356460
\end{aligned}$$

oder die *Kraft* der Sonne ist 356460mal gröſser, als die Kraft der Erde, und dasselbe Verhältniſs muſs daher auch zwischen den *Massen* dieser beiden Himmelskörper bestehn. Die Gröſse μ^2 ist also die Masse der Sonne, wenn die der Erde als Einheit angenommen wird.

Um dasselbe Resultat noch auf einem anderen Wege zu erhalten, so ist der Bogen, welchen die Erde in ihrer mittleren Bewegung um die Sonne während einer Secunde mittlerer Zeit beschreibt, gleich

$$\frac{2\pi}{T}$$

und der Sinus versus dieses Bogens ist

$$2\,a\,\mathrm{Sin.}^2\,\tfrac{1}{2}.\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi^2 a}{T^2};$$

dieser letzte Ausdruck ist zugleich die Gröfse (in Theilen des Halbmessers a der Erdbahn ausgedrückt), um welche die Erde in ihrer jährlichen Bewegung während einer Zeitsecunde gegen die Sonne fällt oder $\frac{2\pi^2 a}{T^2}$. ist die Anziehung der Sonne in der Entfernung a von ihrem Mittelpuncte. Diejenige Gröfse aber, um welche die Körper auf der Oberfläche der Erde während einer Zeitsecunde gegen den Mittelpunct der Erde fallen, ist

$$\tfrac{1}{2}g = 15{,}0514 \text{ Par. Fufs.}$$

Also ist auch $\frac{\frac{1}{2}g}{a^2}$ der Raum, um welchen die Körper in der Entfernung von a durch die Anziehung der Erde in einer Secunde gegen die Erde fallen, oder $\frac{\frac{1}{2}g}{a^2}$ ist die Anziehung der Erde in der Entfernung a von ihrem Mittelpuncte. Da aber, für dieselbe Entfernung, die Anziehungen zweier Körper sich wie ihre Massen verhalten, so hat man, wenn M die Masse der Sonne bezeichnet, die der Erde als Einheit angenommen,

$$M:1 = \frac{2\pi^2 a}{T^2} : \frac{\frac{1}{2}g}{a^2}$$

oder

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{g T^2},$$

also auch $M = \mu^2$, wie zuvor.

Ist überhaupt a die halbe grofse Axe einer Planetenbahn, die der Erdbahn als Einheit angenommen; ist ferner T die siderische Revolution jenes Planeten in Tagen und Θ die tägliche mittlere Bewegung desselben Planeten in Graden aus-

gedrückt, so hat man zwischen diesen Gröſsen folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{c} \Theta = \frac{360}{T} \\ \frac{a^{\frac{3}{2}}}{T} = \frac{\mu}{2\pi} = 0{,}0027378 \quad \text{und} \\ \Theta . a^{\frac{3}{2}} = \mu = 0{,}98560744 \end{array}\right\}$$

wo der letzte Werth von μ die tägliche mittlere Bewegung der Erde in Graden ausgedrückt ist. In der That hatten wir oben

$$\frac{\mu}{\text{Sin. } 1''} = 3548{,}19 \text{ Secunden}$$

und diese Zahl durch 3600 dividirt giebt 0,98560744 Grade. Die Differentiation dieser drei Gleichungen giebt

$$\partial \Theta = -360 \frac{\partial T}{T^2}; \ \partial T = 3T . \frac{\partial a}{2a}; \ \partial \Theta = -540 \frac{\partial a}{Ta}$$

oder auch, wenn man bloſs die Verhältnisse dieser Differentiation zu ihren ursprünglichen Werthen sucht,

$$\frac{\partial \Theta}{\Theta} = -\frac{\partial T}{T}; \ \frac{\partial T}{T} = \frac{3\partial a}{2a}; \ \frac{\partial \Theta}{\Theta} = -\frac{3\partial a}{2a},$$

welche Ausdrücke also ganz unabhängig von dem Werthe der Gröſse μ sind.

Der mannigfaltige Gebrauch dieser Ausdrücke zur Auflösung mehrerer Probleme ist für sich klar. Wenn man z. B. suchen wollte, wie viel das Jahr der Erde geändert werden würde, wenn die mittlere Distanz a der Erde um ihren achten Theil geändert würde, so wird man in der Gleichung

$$\frac{\partial T}{T} = \frac{3\partial a}{2a}$$

die Gröſse $a = 1$ und $\partial a = \frac{1}{8}$ setzen, wodurch man erhält

$$\frac{\partial T}{T} = \frac{3}{16} = 0{,}19 \text{ nahe genau,}$$

oder das Jahr der Erde würde um 0,19 seines Betrags, das

heifst, um 69 Tage kürzer seyn, als es jetzt ist. Man kann aber auch die Gleichung

$$\mu = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{T}$$

in Beziehung auf T und μ selbst differentiiren, indem man a constant annimmt, wodurch man erhält

$$\partial\mu = -\frac{\mu\,\partial T}{T} \text{ oder } \frac{\partial\mu}{\mu} = -\frac{\partial T}{T}.$$

Ist z. B. für die Erde T = 365,25638 und $\frac{\partial T}{T} = \frac{1}{12}$, so ist auch

$$\frac{\partial\mu}{\mu} = \frac{1}{12} = 0{,}08$$

und

$$\partial\mu = \frac{0{,}017202}{12} = 0{,}00143,$$

das heifst also: wenn die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne dieselbe bliebe, wenn aber ihre Umlaufszeit um ihren 12ten Theil oder um einen Monat kürzer wäre, als sie jetzt ist, so müfste auch die Masse oder die Dichtigkeit der Sonne um $\frac{8}{100}$ ihres Betrags gröfser seyn, als sie jetzt ist, oder auch umgekehrt, würde die Masse der Sonne, z. B. durch ihre Vereinigung mit andern auf sie stürzenden Weltkörpern, um $\frac{8}{100}$ gröfser, so würde dadurch das Jahr der Erde und das aller Planeten um den 12ten Theil ihrer gegenwärtigen Länge kleiner werden. Bemerken wir noch zum Schlusse dieses Abschnitts, dafs das erwähnte dritte Gesetz Kepler's, wodurch das Verhältnifs der Halbmesser der Bahnen zu den Umlaufszeiten bestimmt wird, in seiner ganzen Strenge nur dann wahr ist, wenn man die Massen der um die Sonne sich bewegenden Körper gegen die Masse der Sonne als ganz unbedeutend vernachlässigen kann. Wenn man aber auf diese Massen auch Rücksicht nimmt, so wird man statt der obigen Gleichung (III)

$$\mu = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{T},$$

wo μ^2, wie wir gesehn haben, die Masse der Sonne ausdrückt, den folgenden Ausdruck setzen:

$$\sqrt{M+m} = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{T} \quad \therefore \quad \text{(IV)}$$

wo M die Masse der Sonne und m die Masse desjenigen Planeten bezeichnet, dessen Umlaufszeit T ist und zu welchem die halbe grofse Axe a der Bahn gehört, so dafs also die Gleichung (III) nur dann der Wahrheit vollkommen gemäfs ist, wenn man die Masse m eines jeden Planeten gegen die Masse M der Sonne als gänzlich verschwindend betrachten kann.

Ebenso wird man, wenn wieder m die Masse eines Planeten und m' die seines Satelliten bezeichnet, die Gleichung haben

$$\sqrt{m+m'} = \frac{2\pi . a'^{\frac{3}{2}}}{T'},$$

wo wieder a' die halbe grofse Axe der Bahn und T' die siderische Umlaufszeit des Satelliten um seinen Hauptplaneten bezeichnet. Die Division der beiden letzten Gleichungen giebt

$$\frac{M+m}{m+m'} = \left(\frac{a}{a'}\right)^3 . \left(\frac{T'}{T}\right)^2 \quad \therefore \quad \text{(V)}$$

und diese Gleichung (V) ist es, die man eigentlich statt der Gleichung (III) substituiren mufs. Vernachlässigt man in dem letzten Ausdrucke die gegen die Einheit sehr kleine Gröfse $\frac{m'}{M+m}$, so erhält man

$$\frac{m}{M} = \frac{A}{1-A},$$

wo der Kürze wegen

$$A = \left(\frac{a'}{a}\right)^3 . \left(\frac{T'}{T}\right)^2$$

gesetzt worden ist. Für Jupiter z. B. ist $a = 5{,}20278$ Halbmesser der Erdbahn, oder $a = 5{,}20278 \times 20665800$ geogr. Meilen, und $T = 4332{,}5848$ Tage. Für den vierten Satelliten dieses Planeten aber ist $a' = 245400$ Meilen und $T' = 16{,}6890$ Tage. Dieses giebt

$$\text{Log.} \left(\frac{a'}{a}\right)^3 = 0{,}0751610 - 8$$

und

$$\text{Log.} \left(\frac{T}{T'}\right)^2 = 4{,}8286336,$$

also auch

$$A = 0{,}0008013$$

und

$$\frac{m}{M} = \frac{A}{1 - A} = 0{,}0008019 = \frac{1}{1247}$$

oder die Masse Jupiters ist der 1247ste Theil der Sonnenmasse. Dabei mufs bemerkt werden, dafs die oben angenommene grofse Axe a' der Satellitenbahn zu klein angenommen, daher auch der Werth von $\frac{m}{M}$ zu klein erhalten worden ist. Newton[1] hat diese grofse Axe aus Pound's, seines Zeitgenossen, Beobachtungen fehlerhaft genommen und sonderbarer Weise haben die Nachfolger dieses grofsen Astronomen sich bei diesem Resultate beruhigt, ohne weitere unmittelbare Beobachtungen darüber anzustellen. Laplace hat in seiner Méc. céleste diese Masse Jupiters auf dem oben angeführten Wege gleich $m = \frac{1}{1054}$, also nur wenig gröfser, als Newton, der sie gleich $\frac{1}{1067}$ setzte, angenommen und diese Bestimmung für sehr genau angesehn. Allein erst in den letzten Jahren fand Nicolai, dafs die Störungen der Juno durch Jupiter ein sehr genaues Mittel geben, die Masse dieses letzten Planeten zu bestimmen, und er fand auf diesem Wege $m = \frac{1}{1054}$, wenn die Masse M der Sonne gleich der Einheit gesetzt wird. Bald darauf berechnete auch Encke die Störungen der Vesta durch Jupiter und fand $m = \frac{1}{1050}$, so wie er auch aus den Perturbationen des nach ihm benannten Kometen $m = \frac{1}{1054}$, wie oben Nicolai, abgeleitet hatte. Der Unterschied der von Newton angenommenen und der neueren Masse oder der Unterschied der beiden Gröfsen $\frac{1}{1067}$ und $\frac{1}{1050}$ beträgt nahe den 60sten Theil des Ganzen, und die Astronomen konnten sich

1 Principia Lib. III.

lange nicht erklären, warum eine so wichtige Gröfse, wie Jupiters Masse für die Störungen unseres Planetensystems ist, auf zwei verschiedenen Wegen so wenig übereinstimmend gefunden wurde, bis endlich AIRY darauf verfiel, die grofse Axe der Bahn des vierten Satelliten noch einmal und zwar mit aller Umsicht zu messen, wo er denn fand, dafs POUND's Bestimmungen, auf welche NEWTON seine Rechnungen gründete und denen alle seine Nachfolger ohne Grund vertrauten, fehlerhaft gewesen sind. In der That fand AIRY aus seinen Beobachtungen die Masse Jupiters $m = \frac{1}{1049}$, und dasselbe Resultat erhielt auch SANTINI aus seinen Messungen der gröfsten Elongation dieses Satelliten von seinem Hauptplaneten[1]. Kennt man aber die Masse m eines Planeten und seine mittlere Entfernung a von der Sonne, so wie seinen wahren Halbmesser R, so erhält man auch seinen scheinbaren Halbmesser ϱ, wie er aus dem Mittelpuncte der Sonne in der Entfernung a gesehn wird, seine Dichtigkeit d und die Fallhöhe g der Körper auf seiner Oberfläche in der ersten Zeitsecunde durch die Gleichungen

$$\text{Sin.}\,\varrho = \frac{R}{a},$$

$$\frac{d}{d'} = \frac{m}{m'} \cdot \left(\frac{R'}{R}\right)^3,$$

$$\frac{g}{g'} = \frac{m}{m'} \cdot \left(\frac{R'}{R}\right)^2,$$

wo m', R', d' und g' dieselben Bedeutungen für einen andern Planeten haben. Bezeichnet man ebenso durch O und O' die Oberflächen und durch V und V' die Volumina oder die körperlichen Inhalte der beiden Planeten, so hat man

$$\frac{O}{O'} = \left(\frac{R}{R'}\right)^2 \text{ und } \frac{V}{V'} = \left(\frac{R}{R'}\right)^3.$$

Gehören z. B. die Gröfsen a', R' und $\text{Sin.}\,\varrho' = \frac{R'}{a'}$ u. s. w. für die Erde und a, R, ϱ ... für Jupiter, so hat man die Masse der Erde

---

1 Memorie della Società Italiana delle Scienze in Modena. T. XXI. Astron. Nachrichten N. 210.

$$m' = \frac{1}{356460} \text{ der Sonnenmasse},$$

für den wahren Halbmesser der Erde

$$R' = \frac{5400}{2\pi} = 859{,}4366 \text{ geogr. Meilen},$$

und endlich für die Horizontalparallaxe der Sonne $\varrho' = 8'',6$. Ist aber R der Halbmesser einer Kugel, so ist die Oberfläche derselben $O = 4 R^2 \pi$ und das Volumen $V = \frac{4}{3} R^3 \pi$, also ist auch für die Erde

$$O' = 9281916 \text{ Quadratmeilen}$$

und

$$V' = 2659073100 \text{ Kubikmeilen}.$$

Für Jupiter aber ist nach der alten Bestimmung Newton's $m = \frac{1}{1067}$ und die halbe grofse Axe a seiner Bahn gleich 5,202791 Halbmesser der Erdbahn oder

$$a = 5{,}202791 \times \frac{5400}{2\pi \text{ Sin. } 8'',6} \text{ Meilen}.$$

Ferner ist für Jupiter $\varrho = 18'',37$, also auch der wahre Halbmesser dieses Planeten

$$R = a \text{ Sin. } \varrho = 9551{,}27 \text{ Meilen}.$$

Für die Oberfläche desselben erhält man

$$\frac{O}{O'} = 123{,}508$$

oder

$$O = 1146 \text{ Millionen Quadratmeilen}$$

und für das Volumen dieses Planeten

$$\frac{V}{V'} = 1372{,}592$$

oder

$$V = 3649820 \text{ Mill. Kubikmeilen}.$$

Das Verhältnifs der Schweren auf der Oberfläche Jupiters und der Erde ist aber

$$\frac{g}{g'} = \frac{m}{m'} \left(\frac{R'}{R}\right)^2 = 2{,}705$$

oder, da für die Erde $g' = 15{,}0514$ Par. Fufs ist, für Jupiter

$$g = 40{,}7125 \text{ Par. Fufs},$$

das heifst: die Körper fallen auf der Oberfläche Jupiters in der ersten unserer Zeitsecunden durch 40,7125 Fufs, wenn man auf die durch die schnelle Rotation dieses Planeten entstehende Centrifugalkraft keine Rücksicht nimmt. Das Verhältnifs der Dichtigkeiten der Massen dieser zwei Planeten endlich ist

$$\frac{d}{d'} = \frac{m}{m'} \left(\frac{R'}{R}\right)^3 = 0{,}2434.$$

Gehören aber die Gröfsen m′, R′, d′, g′ . . . für die Erde und m, R, d, g . . . für die Sonne, so ist

$$\frac{m}{m'} = 356460 \text{ und } \frac{R'}{R} = \frac{1}{113},$$

also auch, mit Hülfe der oben angeführten Gleichungen,

$$\frac{d}{d'} = 0{,}25; \frac{g}{g'} = 27{,}92 \text{ und } g = 420 \text{ Fufs}$$

oder die Erde ist viermal dichter, als die Sonne, und die Körper fallen auf der Oberfläche der Sonne in der ersten Secunde durch 420 Par. Fufs. Dabei wird es im hohen Grade interessant bleiben, dafs es dem menschlichen Geiste gelungen ist, von jenen durch so grofse Räume von uns getrennten Himmelskörpern nicht nur ihre Gröfse und Entfernung, sondern auch die mannigfaltigen Bewegungen derselben und sogar die Schweren auf ihrer Oberfläche und die gröfsere oder kleinere Dichtigkeit des inneren Gewebes zu bestimmen, aus welchem diese Körper bestehn.

F. Säculare Bewegung des Monds.

Nach dem Vorhergehenden sind die siderischen Umlaufszeiten aller Planeten um die Sonne, so wie der Satelliten um ihre Hauptplaneten, für alle Zeiten constante oder unveränderliche Gröfsen. Allein von diesem allgemeinen Gesetze scheint der Mond unserer Erde eine merkwürdige Ausnahme zu machen, da seine siderische Umlaufszeit um die Erde, allen guten Beobachtungen der alten und neuen Zeiten zufolge, immer kürzer wird. Diese Ausnahme, wenn sie in der That existirt, ist aber für die Erdbewohner und vielleicht für die ganze Erde selbst von der gröfsten Wichtigkeit. Denn wenn

die Umlaufszeit eines Himmelskörpers mit der Zeit abnimmt, so mufs auch, dem dritten Gesetze KEPLER's zufolge, die mittlere Entfernung desselben von seinem Centralkörper abnehmen oder der Mond wird in diesem Falle die Erde in immer engeren Bahnen umkreisen und endlich auf sie stürzen müssen. Welche Folgen dieses für uns haben würde, ist leicht zu übersehn.

HALLEY hatte zuerst bemerkt und DUNTHORN nebst TOBIAS MAYER haben später durch eine sehr sorgfältige Untersuchung über allen Zweifel erhoben, dafs die mittlere Bewegung des Monds seit den ältesten bis auf unsere Zeiten mit jedem Jahrhundert immer schneller wird. Sie fanden nämlich, dafs die Beobachtungen nur dann mit den Berechnungen des Mondes übereinstimmen, wenn man der wahren, heute statt habenden, täglichen mittleren Bewegung an jedem folgenden Tage 0″,00030683, also in einem Julianischen Jahre von 365¼ Tagen den Bogen 0″,11207 und daher in einem Jahrhunderte (von 36525 Tagen) den Bogen 11″,207 hinzusetzt. Welches ist aber die Ursache dieser höchst sonderbaren Veränderung der mittleren Bewegung, also auch der Umlaufszeit des Mondes, da doch die Umlaufszeiten aller andern Körper unsers Sonnensystems vollkommen constant und unveränderlich sind? Soll sich diese vielleicht nur scheinbare Anomalie nicht auch aus dem allgemeinen Gesetze der Schwere erklären lassen, da uns doch diese Erklärung mit allen andern Ungleichheiten des Monds bereits so gut gelungen ist? Diese Frage hat die Geometer lange Zeit sehr gequält. Einige suchten den Grund dieser Erscheinung in der Wirkung der Sonne auf die Mondbahn, andere in jener der Planeten, wieder andere in der nicht genau kugelförmigen Gestalt der Erde und des Mondes, in einer Störung durch Kometen oder in dem Widerstande des Aethers, der, wenn er überhaupt existirt, die mittlere Bewegung des Monds, aber ebenso auch aller übrigen Planeten, in der That beschleunigen müfste[1]. Noch andere wollten die Ursache dieser Abweichung in der Zeit suchen, welche die Kraft der Anziehung braucht, um von der Sonne bis zu den Planeten zu gelangen. Allein alle diese Meinungen wurden bald ungenügend gefunden und das Räthsel, an dessen Auflösung

1 Vergl. Art. *Widerstand.*

sich so viele scharfsinnige Männer abgemüht hatten, blieb in seiner früheren Dunkelheit. Indefs ist die Uebereinstimmung aller anderen so mannigfaltigen und verwickelten Erscheinungen der Himmelskörper mit der von Newton entdeckten Theorie der allgemeinen Schwere so grofs und so bewunderungswürdig, dafs man nicht ohne lebhaftes Bedauern in diesem einzelnen Falle eine unerklärliche Ausnahme von jenem allgemeinen Gesetze erblicken konnte.

Von dieser Betrachtung bewogen untersuchte Laplace die ganze Theorie der Mondbewegung noch einmal mit der gespanntesten Aufmerksamkeit, und ihm gelang es endlich auch, die so tief verborgene und so lange vergeblich gesuchte Ursache jener Anomalie glücklich zu entdecken. Es ist bereits oben[1] die von Laplace gegebene Erklärung dieser Erscheinung mitgetheilt und daselbst gezeigt worden, dafs ihre Ursache in der Veränderlichkeit der Excentricität der Erdbahn liegt. Wir begnügen uns daher, hier nur noch dasjenige in Kürze nachzutragen, was an dem angeführten Orte übergangen werden mufste.

Man sieht schon ohne alle Rechnung, dafs die Sonne, je näher sie im Allgemeinen der Erdbahn ist, desto mehr auf die Erde wirken müsse. Eine solche Annäherung der Sonne wird demnach auch die Mondbahn erweitern oder die Umlaufszeit dieses Satelliten vergröfsern und umgekehrt. So ist im Januar die Sonne am nächsten bei der Erde, also auch bei dem Monde, und im Julius ist sie wieder von diesen beiden Weltkörpern am meisten entfernt. In der That ist auch die wahre Umlaufszeit des Monds im Anfange eines jeden unserer Jahre um beinahe 35 Zeitminuten gröfser als in der Mitte des Jahrs. Allein diese Unregelmäfsigkeiten stellen sich mit jedem Umlaufe der Erde, mit jedem Jahre wieder her und sind daher nur periodisch, sodafs sie im Laufe eines jeden Jahrs gleichsam wieder verschwinden, ohne sich je mit der Zeit anzuhäufen. Allein durch die erwähnte Abnahme der Excentricität der Erdbahn geht die Erde, also auch der Mond, von der Sonne immer weiter weg, die Mondbahn wird also auch, nach dem Vorhergehenden, immer kleiner oder enger und die Umlaufszeit des

1 S. Art. *Mond.* Bd. VI. S. 2368.

Monds in dieser seiner Bahn mufs daher auch immer kürzer werden, und dieses zwar so lange, als die Excentricität der Erdbahn in fortwährender Abnahme begriffen ist. Nun nimmt zwar diese Excentricität nicht immer ab, sondern es wird auch einmal eine Zeit kommen, wo sie wieder zunimmt. Allein diese Zeit ist so weit von uns entfernt und jene Abnahme dauert schon so viele Jahrtausende, dafs alle unsere Beobachtungen, auch die der Griechen und Chaldäer, noch in die Periode dieser Abnahme fallen und dafs nur die Theorie, indem sie den Beobachtungen so weit vorauseilt, uns von diesem Wechsel der Ab- und Zunahme der Excentricität der Erdbahn zu belehren im Stande ist. Nach dieser Theorie war nämlich die Excentricität der Erdbahn um das Jahr 11450 vor dem Anfange unserer Zeitrechnung in ihrem gröfsten Werthe und gleich 0,01965 der halben grofsen Axe der Erdbahn. Von jener Zeit nimmt sie durch volle 36860 Jahre immer ab und wird erst um das Jahr 25400 nach Christus ihren kleinsten Werth 0,00393 erreichen, um dann allmälig und in einer nahe ebenso langen Periode wieder zuzunehmen. In unseren Tagen ist diese Excentricität gleich 0,01679. In dieser grofsen Periode von 36860 Jahren oder von mehr als 36 Jahrtausenden schwankt die Excentricität jener Bahn zwischen den engen Grenzen 0,020 und 0,004, gleich einem grofsen Pendel, sehr langsam auf und nieder. In dieselbe Periode sind also auch die oben[1] erwähnten säcularen Bewegungen der *Knoten* und der *Apsiden* der Mondbahn eingeschlossen, da sie, wie dort gezeigt wurde, aus derselben Quelle entspringen. Die Beobachtungen der kommenden Zeiten werden uns übrigens diese drei Bewegungen noch genauer kennen lehren, wenn sie sich in der Folge der Jahrhunderte mehr angehäuft und wenn wir einmal die Theorie des Monds durch die Analyse noch mehr ausgebildet haben werden.

Um noch zu zeigen, wie man zu dieser Kenntnifs der Säculargleichung der mittleren Mondbewegung gekommen ist, nehmen wir an, dafs man aus den Beobachtungen von der Zeit 1700 die Revolution des Monds auf das Genaueste bestimmt habe, so dafs also diese Revolution allen Beobach-

---

1 S. Art. *Mond.* Bd. VI. S. 2376.

tungen, die um den Anfang des 18. Jahrhunderts angestellt wurden, genau entspreche. Wenn man aber dann mit derselben Bestimmung die Beobachtungen im Anfange des gegenwärtigen 19. Jahrhunderts verglich, so fand man, dafs für diese letzte Zeit die *mittlere Länge* (nicht die Geschwindigkeit) des Mondes sich um 11",2 oder um 0°,003111 zu klein zeigte und dafs man daher am Ende des 18. Jahrhunderts, für dessen Anfang man die obige Revolution bestimmt hat, noch diese Gröfse 0°,003111 zur berechneten mittleren Länge hinzu addiren mufs, um sie mit den Beobachtungen am Ende dieses Jahrhunderts übereinstimmend zu machen. Ehe man die Ursache dieser Erscheinung aufsuchen konnte, mufste man sich begnügen, sie einstweilen durch eine Formel den Beobachtungen gemäfs darzustellen. Man nahm daher die Hypothese an, dafs der Mond keine *constante* mittlere Geschwindigkeit habe, wie dieses bei den Planeten allerdings der Fall ist, sondern dafs seine Geschwindigkeit mit der Zeit gleichförmig wachse, etwa wie dasselbe auch mit der Geschwindigkeit derjenigen Körper geschieht, die auf der Oberfläche unserer Erde frei fallen. Bezeichnet man nun durch c die constante mittlere Geschwindigkeit des Monds, die nämlich ohne jene Anomalie statt haben würde, und ist t die Anzahl der Jahrhunderte, die seit dem Jahre 1700 verflossen sind, so wie s der Bogen, den der Mond in seiner Bahn durch die mittlere Bewegung zurücklegt, so ist $\frac{\partial s}{\partial t}$ der allgemeine Ausdruck der Geschwindigkeit, und man wird daher die Gleichung haben

$$\frac{\partial s}{\partial t} = c + \alpha . t,$$

wo α eine Constante ist, die nun, so wie die Gröfse c, durch die Beobachtungen bestimmt werden soll.

Das Integral dieser Gleichung ist

$$s = ct + \tfrac{1}{2}\alpha . t^2,$$

wo also ct der Weg ist, welchen der Mond in t Jahrhunderten mit seiner für das Jahr 1700 bestimmten Umlaufszeit zurücklegen würde, und wo daher

$$x = \tfrac{1}{2}\alpha . t^2$$

die Correction dieses Weges oder derjenige Bogen ist, den

man zu der, durch jene constante Umlaufszeit gefundenen mittleren Länge des Monds nach t Jahrhunderten noch hinzufügen mufs, um die mit diesen späteren Beobachtungen des Monds übereinstimmende Länge dieses Satelliten zu erhalten. Für t = 1 ist nach den Mondstafeln, die LALANDE in seiner Astronomie aufgenommen hat, die Gröfse $\frac{1}{2}\alpha = 0^\circ{,}003111$, also ist auch die gesuchte Correction

$$x = 0^\circ{,}003111\, t^2,$$

und da diese Gleichung nur das Quadrat von t enthält, so ist sie sowohl vor als auch nach der Epoche von 1700 immer *additiv*, obschon die Gröfse t selbst, ihrer Natur nach, *vor* dem Jahre 1700 negativ genommen werden mufs. Dafs nämlich für spätere Jahre als 1700 die Gröfse t, also auch die Correction x positiv seyn mufs, ist für sich klar. Für frühere Jahre aber läfst sich dieses auf folgende einfache Weise erklären. Gesetzt, man sucht mit jener für 1700 bestimmten Revolution die mittlere Länge des Monds rückwärts für das Jahr 1600, so wird man also zuerst von der für 1700 gegebenen Epoche die Bewegung des Monds für ein ganzes Jahrhundert subtrahiren. Allein damit hat man offenbar den Werth jener Correction zu viel subtrahirt, weil die Bewegung für 1700 schneller ist, als die für 1600, daher man also auch hier jene Correction wieder addiren mufs.

Setzt man also, wie zuvor,

$$x = 0^0{,}003111\, t^2$$

oder in Secunden ausgedrückt

$$x = 11''{,}2\, t^2,$$

so erhält man

für 1700 . . . . $t = 0$ und die Correction $x = 0''{,}0$
für 1750 und 1650 $t = \pm \frac{1}{2}$ — — — $x = 2''{,}8$
für 1800 und 1600 $t = \pm 1$ — — — $x = 11''{,}2$ u.s.w.

In den erwähnten Mondstafeln von LALANDE ist die mittlere Länge des Monds für den Anfang des Jahrs 1700 im Pariser Mittag

$$A = 40^\circ\ 55'\ 56''{,}1$$

und die tropische Bewegung des Monds in einem gemeinen Jahre von 365 Tagen

$$B = 129^\circ\ 23\ \ 5''{,}2$$

angenommen werden. Allein diese letzte Bewegung B ist nur für die Epoche des Jahrs 1700 richtig und muſs daher für jede andere Zeit verbessert werden. Sucht man z. B. aus diesen Tafeln des Monds die Länge dieses Satelliten für das Jahr 1760, so hat man

Epoche für 1700	40°	55′	56″,1
Bew. für 60 Jahre	40	43	55,2
Länge für 1760	81	39	51,3
Säcul. Bewegung x =		+	4,0
corrigirte Länge für 1760 . .	81	39	55,3

weil nämlich hier $t = \frac{60}{100}$, also $t^2 = \frac{36}{100} = 0{,}36$, also auch $x = 11'',2\,t^2 = 4'',0$ ist. Ebenso hat man, wenn man aus diesen Tafeln die mittlere Länge des Monds für den Anfang des Jahrs 1200 nach Chr. G. sucht,

Epoche für 1700	40°	55′	56″,1
Bew. für 500 Jahre . . . —	99	26	0,0
Länge für 1200	301	29	56,1
Beweg. für 11 Tage . . +	144	56	24,9
	86	26	21,0
Säcul. Bewegung . . x = . . . +		4	40,0
corrigirte Länge für 1200 .	86°	31′	1″,0

wie in den Tafeln selbst angegeben ist, indem in dem letzten Beispiele $t = -5$, also auch $x = 11'',2\,t^2 = 280'',0 = 0°\ 4'\ 40'',0$ ist.

Noch ist es interessant zu sehn, wie viel durch diese säculare Bewegung des Monds die Umlaufszeit und die mittlere Entfernung des Monds von der Erde geändert werde. Die säculare Bewegung beträgt nach dem Vorhergehenden 0°,003111 in 100 Jahren, also auch in einem Tage

$$\partial\,\Theta = \frac{0°,003111}{36525} = 0°,0000000 8523$$

und dieses ist die Correction der mittleren täglichen Bewegung des Monds. Ist ferner T die Umlaufszeit des Monds in Tagen und a die halbe groſse Axe der Mondbahn, so erhalten wir, wenn wir die im vorhergehenden Abschnitte (E)

dieses Artikels bereits aufgestellten Gleichungen wieder vornehmen,

$$\left.\begin{array}{l}\partial T = -T \cdot \frac{\partial \Theta}{\Theta} \\ \text{und} \\ \frac{\partial a}{a} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{\partial \Theta}{\Theta}\end{array}\right\} .$$

Aber nach den bereits angeführten Tafeln von Lalande ist

$$\Theta = 13^{\circ},1763966$$

und daher auch

$$T = \frac{360}{\Theta} = 27{,}321582 \text{ Tage},$$

und endlich

$$\partial \Theta = 0^{\circ},00000008523.$$

Substituirt man diese Werthe von T und $\partial \Theta$ in den vorhergehenden Tafeln, so erhält man

$$\partial T = -0{,}0000001767$$

und

$$\frac{\partial a}{a} = -0{,}000000004312,$$

so daſs also Θ wächst, während T und a abnehmen.

G. Säculare Bewegung Jupiters und Saturns.

Auch diesen beiden gröſsten Planeten unseres Sonnensystems hat man noch zu Ende des vorhergehenden Jahrhunderts eine ähnliche Veränderung ihrer mittleren Bewegung, wie dem Monde, zugeschrieben. Schon Halley, Newton's Zeitgenosse, hatte bemerkt, daſs sich die mittlere Bewegung Saturns immer verzögert, während die Jupiters im Gegentheile sich beschleunigt. Die Astronomen führten deswegen auch in den Tafeln dieser beiden Planeten zwei ähnliche Correctionen, wie oben für den Mond, ein, nämlich

$$-83'',5\,t^2 \text{ für Saturn}$$

und

$$+34'',4\,t^2 \text{ für Jupiter},$$

wo wieder t die Anzahl der Jahrhunderte seit 1700 bezeichnet.

Die Auffindung der Ursache dieser Erscheinung aber fiel ihnen nicht minder schwer, als die so eben betrachtete ähnliche Unregelmäfsigkeit in der Mondbewegung. Wie es bei Untersuchungen solcher Art, die ins Tiefe gehn, zu geschehn pflegt, so fand man auch hier zwar nicht eben sogleich das Gesuchte, aber dafür etwas Anderes, was noch viel interessanter war und was dann später, wenn gleich auf Umwegen, auch wieder zu dem so lange Gesuchten zurückführte. Man fand nämlich, in Folge der über diesen Gegenstand angestellten analytischen Untersuchungen, dafs die grofse Axe der Bahnen eines jeden Planeten, also auch die siderische Umlaufszeit desselben, für alle Zeiten constant und unveränderlich seyn müsse oder dafs sie wenigstens nur periodische, keineswegs aber mit der Zeit fortschreitende Störungen erleiden könne[1]. Dieses Theorem war für die Erhaltung des Planetensystems, mit der es unmittelbar zusammenhängt, von den wichtigsten Folgen. Aber mit ihnen war auch zugleich bewiesen, dafs jene Aenderungen der mittleren Bewegung, die man bei dem Monde und bei Jupiter und Saturn beobachtet hatte, nur periodische Störungen seyn konnten, wenn gleich vielleicht die Dauer ihrer Perioden viele Jahrtausende umschliefsen mag. Beim Monde fand man die Ursache dieses Phänomens, wie so eben in dem vorhergehenden Abschnitte gezeigt worden ist, in der Abnahme der Excentricität der Erdbahn. Aber welches ist der Grund der ähnlichen Erscheinung für die zwei eben genannten grofsen Planeten unseres Systems?

Nachdem Laplace den Grund dieser Anomalieen in fremden Einwirkungen der Kometen, des Aethers u. s. w. auf unser Planetensystem lange vergebens gesucht hatte, verfiel er endlich auf die Idee, dafs er vielleicht nur eine einfache Folge der gegenseitigen Wechselwirkung dieser zwei Planeten auf einander seyn könnte, und die bereits oben[2] angeführte Gleichung zwischen T und r führte ihn auf die Ueberzeugung, dafs seine Vermuthung vollkommen gegründet sey. Um dieses näher, als in dem angeführten Artikel geschehn ist, anzuzeigen, wollen wir bemerken, dafs alle Aenderungen der Länge, welche zwei Planeten durch ihre gegenseitigen Wirkungen er-

---

1 S. Art. *Perturbationen*. Bd. VII. S. 444.

2 Ebend. Bd. VII. S. 445.

leiden können, wenn man auf die Neigungen und Excentricitäten ihrer Bahnen Rücksicht nimmt, die allgemeine Form

$$A \text{ Sin. } [(n' l' - n l) t + B]$$

haben, wo l und l' die täglichen Bewegungen der Längen, t die Anzahl der seit einer bestimmten Epoche verflossenen Tage und wo A und B zwei wenigstens für einen grofsen Zeitraum nahe constante Gröfsen bezeichnen, während endlich die Gröfsen n und n' nach der Ordnung gleich den natürlichen Zahlen 1, 2, 3 . . . gesetzt werden. Für unsere gegenwärtige Betrachtung ist vorzüglich die Gröfse A sehr wichtig, und es folgt aus der Theorie der Perturbationen, dafs in jeder dieser Störungsgleichungen die Gröfse A die Gestalt habe

$$A = \frac{M . \Theta^{n' - n}}{(n' l' - n l)^2 . t^2},$$

wo M eine constante Gröfse und Θ entweder die Excentricität oder die Neigung der einen der beiden Planetenbahnen gegen die andere bezeichnet. Da nun die Excentricität sowohl, als auch die Neigung der Bahnen bei allen älteren Planeten nur klein ist, so reicht es gewöhnlich schon hin, nur die ersten dieser Störungsgleichungen zu berechnen, indem man die Gröfsen n und n' nur gleich 1 oder 2 oder höchstens gleich 3 setzt, weil alle folgenden in die sehr kleine Gröfse Θ^4, Θ^5 . . . multiplicirt und daher nur von sehr geringem Werthe seyn werden. Dieser vortheilhafte Umstand macht es uns auch eigentlich nur möglich, die Störungen der Planeten zu berechnen, indem wir die hierher gehörenden sehr verwikkelten Ausdrücke in Reihen auflösen und von diesen, ihrer grofsen Convergenz wegen, nur die ersten Glieder berücksichtigen. Würden die Excentricitäten und Neigungen der Planetenbahnen sehr beträchtlich seyn, so würde jene Convergenz der Reihen nicht mehr statt haben und wir würden die Störungen der Planeten nicht mehr auch nur mit einiger Genauigkeit berechnen können. Allein die vorhergehende Schäzzung des Werthes von A würde nur sehr unvollkommen seyn, wenn man dabei, wie wir bisher gethan haben, nur auf den Zähler $\Theta^{n' - n}$ des in Rede stehenden Bruches Rücksicht nehmen wollte. Denn auch der Nenner

$$(n' l' - n l)^2 . t^2$$

ist veränderlich und er wird den Werth von A desto gröſser machen, je kleiner er selbst ist. Er wird aber desto kleiner seyn, je näher das Verhältniſs $\frac{l'}{l}$ dem veränderlichen Verhältnisse $\frac{n}{n'}$ kommt, welches letzte die verschiedensten Werthe $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}$ . . . annehmen kann, die zwischen den ersten natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4 statt haben. Diese Bemerkung, die man früher vernachlässigt und auf die zuerst Laplace aufmerksam gemacht hatte, war es, welche ihn endlich auf die Entdeckung des wahren Grundes jener sonderbaren Erscheinung zwischen Jupiter und Saturn leitete. So oft nämlich die mittleren täglichen Bewegungen l und l', also auch die Umlaufszeiten, zweier Planeten sich nahe wie zwei ganze Zahlen n und n' verhalten, so oft kann jener Werth von A sehr groſs und die daraus folgende Störung sehr bedeutend werden. Für Jupiter ist die mittlere Bewegung in 365,25 Tagen $l = 30^0{,}349$ und für Saturn $l' = 12{,}221$, also ist auch

$$\frac{l'}{l} = \frac{12{,}221}{30{,}349} = 0{,}4026,$$

also auch nahe genug

$$\frac{l'}{l} = \frac{2}{5},$$

so daſs alle jene Störungsglieder, in welchen $n = 2$ und $n' = 5$ sind, für diese zwei Planeten sehr beträchtlich werden und daher eine besondere Untersuchung verdienen. Laplace nahm diese Untersuchung vor und fand seine Erwartung vollkommen bestätigt. Das Resultat seiner Untersuchungen war, daſs in der Theorie Saturns eine groſse Ungleichheit enthalten ist, welche auf 2952 Secunden steigen kann und deren Periode nahe 930 Jahre beträgt, welche zur mittleren Bewegung dieses Planeten addirt werden muſs, um die der Wahrheit gemäſse Bewegung zu erhalten, und daſs die mittlere Bewegung Jupiters einer ähnlichen Ungleichheit von nahe derselben Periode unterworfen ist, die auf 1205 Secunden steigen kann und von der mittleren Bewegung dieses Planeten subtrahirt werden muſs. Im Jahre 1560 unserer Zeitrechnung waren diese beiden Störungen nahe gleich Null, und

sie werden auch wieder in allen den Jahren verschwinden, die 465 oder 2mal 465 oder 3mal 465 Jahre u. s. w. von jener Epoche 1560 vor- oder rückwärts entfernt sind. Die Periode dieser zwei Störungsgleichungen ist nämlich, nach dem Vorhergehenden, gleich der Zeit, in welcher der Sinus von $(5l'-2l)\,t = 0{,}407\,t$ alle möglichen Werthe durchgeht, d. h. in welcher der Winkel $0{,}407\,t$ sich von 0 bis zu 360 Graden ändert. Um diese Zeit zu finden, ist daher $0{,}407\,t = 360$ oder nahe $t = 900$ und genauer $t = 930$ Jahre.

Laplace knüpfte an diese schöne Entdeckung noch eine andere sehr sinnreiche Bemerkung, dafs man nämlich aus den mittleren Bewegungen, welche ein Volk für diese zwei Planeten gefunden hat, rückwärts auf die Zeit schliefsen kann, in welcher dasselbe diese Beobachtungen angestellt hat. Die Indier geben bekanntlich[1] ihren Planetentafeln ein sehr hohes Alter, das mehrere Jahrtausende über den Anfang unserer gegenwärtigen Zeitrechnung herausgeht. Wenn man aber diese ihre Tafeln näher untersucht, so findet man, dafs sie zu einer Zeit entworfen wurden, wo die mittlere Bewegung Saturns die langsamste und die Jupiters die schnellste war. Zwei Hauptepochen der indischen Chronologie erfüllen nahe diese Bedingung und von diesen Epochen fällt die eine in das Jahr 1490 nach Chr. und die andere 3100 Jahre vor Chr. Dafs der Umstand, nach welchem die mittlere Bewegung des ersten + der doppelten des dritten — der dreifachen des zweiten Satelliten Jupiters immer gleich Null ist, zu ähnlichen merkwürdigen Störungen dieser drei Monde Anlafs gegeben hat, ist schon oben[2] bemerkt worden. Weiter unten aber[3] werden wir sehn, dafs die Natur an diese *irrationalen Verhältnisse* der Umlaufszeiten der Planeten den gröfsten Theil ihrer Sorgfalt für die Erhaltung dieses Systems geknüpft habe, da ohne diese Verhältnisse eine längere Dauer desselben unmöglich gewesen wäre.

---

1 S. Art. *Vorrücken der Nachtgleichen.*
2 S. Art. *Trabant.*
3 S. Art. *Weltsystem.*

II. Heliocentrischer und geocentrischer Ort der Planeten.

Wir haben oben [Abschnitt (B) dieses Artikels] gezeigt, wie man aus zwei in der Zeit sehr verschiedenen Längen eines Planeten die Umlaufszeit desselben finden kann. Allein diese Längen müssen offenbar *heliocentrische* oder aus der Sonne gesehene Längen seyn und wir können nur *geocentrische* oder von der Erde aus gesehene Längen beobachten. Es ist daher noch die Frage zu beantworten, wie man aus den von uns beobachteten geocentrischen Oertern eines Planeten seine für dieselbe Zeit statt habenden heliocentrischen Oerter, und umgekehrt, ableiten kann, da das, was über diesen für die Astronomie höchst wichtigen Gegenstand im Artikel *Ort* gesagt wurde, als unvollständig und unzureichend angesehn werden mufs, obschon bereits in mehrern vorhergehenden Artikeln dieser zu vielen Untersuchungen sehr nothwendigen Verwandlungen der Planetenörter gedacht worden ist.

Sey L, P und R die von der Sonne gesehene Länge, die Distanz vom Pole der Ekliptik und der Radius Vector der Erde. Ebenso bezeichne l, p und r die *heliocentrische* Länge, die Poldistanz und den Radius Vector des Planeten, und für den *geocentrischen* Ort mögen endlich dieselben drei Gröfsen durch λ, π und ϱ ausgedrückt werden. Sey S der Mittelpunct der Sonne, T der Erde und P des Planeten. Man lege durch den Mittelpunct der Sonne drei feste, unter einander senkrechte gerade Linien X′SX und YSY′ in der Ebene des Papiers und ZSZ′ auf diese Ebene senkrecht, wo die mit einem Accent bezeichneten Hälften SX′, SY′, SZ′ die als negativ zu betrachtenden Theile dieser geraden Linien anzeigen sollen. Man fälle von dem Mittelpuncte T der Erde, so wie von dem Mittelpuncte P des Planeten die Lothe TB und Pb auf die Ebene XSY herab und ziehe in dieser Ebene von den Fufspuncten B und b dieser Lothe die senkrechten Linien BA und ba auf die feste Gerade SX. Dieses vorausgesetzt werden die drei rechtwinkligen, mit jenen drei festen Geraden parallelen Coordinaten der Erde gegen die Sonne seyn

Fig. 169.

$$SA = X, \quad AB = Y \text{ und } BT = Z,$$

und ebenso wird man für die analogen Coordinaten des Planeten gegen die Sonne haben

$$Sa = x, \; ab = y \text{ und } bP = z.$$

Zieht man dann durch die Puncte B und T die mit SX parallelen Linien Bc und Td, durch c die mit SZ oder bP parallele Linie cd, und endlich durch d die mit SY parallele Linie de, so wird man auch für die drei den vorigen analogen Coordinaten des Planeten gegen die Erde die Ausdrücke haben

$$Td = \xi, \quad de = v \text{ und } eP = \zeta,$$

so dafs also durch die drei letzten Coordinaten ξ, v, ζ der geocentrische Ort des Planeten, durch x, y, z der heliocentrische Ort des Planeten und durch X, Y, Z der heliocentrische Ort der Erde angegeben wird. Der bloſse Anblick der Figur zeigt aber, dafs zwischen diesen drei Coordinatensystemen die folgenden einfachen Gleichungen bestehn

$$\left.\begin{array}{l} \xi = x - X \\ v = y - Y \\ \zeta = z - Z \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (VI)$$

Um nun diese Coordinaten durch die oben eingeführten Gröſsen L, P, R u. s. w. auszudrücken, sey die durch die Sonne S in der Ebene der XY (welche wir für die Ebene der Ekliptik annehmen wollen) gezogene Gerade SN die Linie der Nachtgleichen, die mit der vorhin in derselben Ebene willkürlich gezognen festen Linie SX den Winkel NSX, den wir N nennen wollen, bildet. Dieses vorausgesetzt hat man für die geradlinigen Distanzen der drei Himmelskörper

$$ST = R, \; SP = r \text{ und } TP = \varrho.$$

Zieht man ferner in der Ebene der XY die geraden Linien SB, Sb und Te, so hat man für die drei oben genannten Längen

$$\begin{array}{l} L = ASB + N \\ l = aSb + N \\ \lambda = dTe + N \end{array}$$

und endlich für die drei Winkeldistanzen von dem in der festen Linie SZ liegenden Pole der Ekliptik

$$P = 90^\circ - BST$$
$$p = 90^\circ - bSP$$
$$\pi = 90^\circ - eTP,$$

so daſs man demnach hat

$$SB = R \text{ Sin. } P$$
$$Sb = r \text{ Sin. } p$$
$$Te = \varrho \text{ Sin. } \pi.$$

Es ist aber auch $SA = SB \text{ Cos. } ASB$, $Sa = Sb \text{ Cos. } aSb$ und $Td = Te \text{ Cos. } dTe$, oder, wenn man die so eben gegebenen Werthe von SB, Sb und Te, so wie von $ASB = L - N$, $aSb = l - N$ und $dTe = \lambda - N$ in den drei letzten Ausdrücken substituirt und wie zuvor $SA = X$, $Sa = x$ und $Td = \xi$ setzt,

$$X = R \text{ Sin. } P. \text{ Cos. } (L - N)$$
$$x = r \text{ Sin. } p \text{ Cos. } (l - N)$$
$$\xi = \varrho \text{ Sin. } \pi \text{ Cos. } (\lambda - N)$$

und ebenso erhält man auch

$$Y = R \text{ Sin. } P \text{ Sin. } (L - N)$$
$$y = r \text{ Sin. } p \text{ Sin. } (l - N)$$
$$v = \varrho \text{ Sin. } \pi \text{ Sin. } (\lambda - N)$$

und endlich

$$Z = R \text{ Cos. } P$$
$$z = r \text{ Cos. } p$$
$$\zeta = \varrho \text{ Cos. } \pi.$$

Substituirt man aber diese Coordinatenwerthe in den drei vorhergehenden Gleichungen (VI), so erhält man, wenn man der Kürze wegen $R' = R \text{ Sin. } P$, $r' = r \text{ Sin. } p$ und $\varrho' = \varrho \text{ Sin. } \pi$ setzt, die folgenden sehr einfachen Ausdrücke:

$$\left.\begin{array}{l} \varrho' \text{ Cos. } (\lambda - N) = r' \text{ Cos. } (l - N) - R' \text{ Cos. } (L - N) \\ \varrho' \text{ Sin. } (\lambda - N) = r' \text{ Sin. } (l - N) - R' \text{ Sin. } (L - N) \\ \varrho' \text{ Cotg. } \pi = r' \text{ Cotg. } p - R' \text{ Cotg. } P \end{array}\right\} \ldots \text{(VII)}$$

und diese Gleichungen enthalten die Auflösung unserer ersten Aufgabe, nämlich des Problems, aus dem heliocentrischen Orte eines Planeten den geocentrischen Ort desselben zu finden. Wenn man nämlich einen Planeten beobachtet hat, so wird man, für die Zeit dieser Beobachtung, aus den bekannten

Elementen der Erde und des Planeten oder aus den nach diesen Elementen verfertigten Tafeln die heliocentrische Länge L,λ, die Breite 90° — P, 90° — p und den Radius Vector R, r durch Rechnung bestimmen, wo dann alle die Gröfsen, die in den Gleichungen (VII) rechts vom Gleichheitszeichen stehn, bekannt sind und sonach die drei links stehenden Gröfsen λ, π und ϱ' oder $\varrho = \frac{\varrho'}{\text{Sin.}\,\pi}$ sofort aus jenen gefunden werden können. Dabei ist die Gröfse N ganz willkürlich und man kann sie z. B. so annehmen, dafs die Berechnung der Gröfsen λ, π und ϱ dadurch am meisten erleichtert wird. Für N = 0 hätte man z. B.

$$\varrho' \text{Cos.}\,\lambda = r' \text{Cos.}\,l - R' \text{Cos.}\,L$$
$$\varrho' \text{Sin.}\,\lambda = r' \text{Sin.}\,l - R' \text{Sin.}\,L$$
$$\varrho' \text{Cotg.}\,\pi = r' \text{Cotg.}\,p - R' \text{Cotg.}\,P,$$

so dafs man daher λ aus der Gleichung findet

$$\text{Tang.}\,\lambda = \frac{r' \text{Sin.}\,l - R' \text{Sin.}\,L}{r' \text{Cos.}\,l - R' \text{Cos.}\,L}.$$

Ist aber so λ gefunden, so hat man auch ϱ' aus jeder der zwei ersten und dann π aus der letzten Gleichung. Bequemer aber noch für die Rechnung wird man

$$N = \tfrac{1}{2}\,(l + L)$$

setzen, wodurch man sofort die für Logarithmen geeigneten Ausdrücke erhält:

$$\left.\begin{aligned}
\text{Tang.}\,[\lambda - \tfrac{1}{2}(l+L)] &= \frac{r' + R'}{r' - R'}\,\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}(l - L) \\
\varrho' &= (r' + R')\,.\,\frac{\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}(l - L)}{\text{Sin.}\,[\lambda - \tfrac{1}{2}(l + L)]} \\
\text{Cotg.}\,\pi &= \frac{r' \text{Cotg.}\,p - R' \text{Cotg.}\,P}{\varrho'}
\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (\text{VIII})$$

Beisp. Ist l = 258° 4′ 59″,0
p = 93° 43′ 38″,3 und
Log. r = 9,668747;

hat man ferner ebenso für den heliocentrischen Ort der Erde

L = 15° 59′ 35″,9
P = 90° und
Log. R = 9,9990770,

so geben die Gleichungen (VIII) für den gesuchten geocentrischen Ort des Planeten

$$\lambda = 214^\circ\ 41'\ 0'',3,$$
$$\pi = 91^\circ\ 21'\ 11'',9$$

und

$$\text{Log. } \varrho' = 0,1083364.$$

Wir wenden uns nun zu der zweiten unserer Aufgaben, nämlich aus dem gegebenen oder beobachteten *geocentrischen* Orte eines Planeten (nebst dem aus der Theorie der Sonne immer bekannten heliocentrischen Orte der Erde für die Zeit dieser Beobachtung) den entsprechenden *heliocentrischen* Ort des Planeten durch Rechnung abzuleiten. Zu der Auflösung dieser Aufgabe könnte man wieder die vorigen Gleichungen (VIII) benutzen, wenn man sie auf folgende Weise stellt:

$$r \operatorname{Sin.} p \operatorname{Cos.} l = R \operatorname{Sin.} P \operatorname{Cos.} L + \varrho \operatorname{Sin.} \pi \operatorname{Cos.} \lambda$$
$$r \operatorname{Sin.} p \operatorname{Sin.} l = R \operatorname{Sin.} P \operatorname{Sin.} L + \varrho \operatorname{Sin.} \pi \operatorname{Sin.} \lambda$$
$$r \operatorname{Cos.} p = R \operatorname{Cos.} P + \varrho \operatorname{Cos.} \pi.$$

Allein da man mit unsern Instrumenten nur unmittelbar die Gröfsen λ und π, nicht aber auch die Gröfse ϱ beobachten kann, so läfst sich unsere Aufgabe durch diese Gleichungen nicht unmittelbar auflösen. Wollte man aber aus der bekannten Theorie des Planeten auch noch eine der drei Gröfsen r, p oder l als gegeben annehmen, so wäre die Auflösung allerdings möglich. Wäre z. B. nebst den beiden beobachteten Gröfsen λ und π auch noch der Radius Vector r des Planeten bekannt und überdiefs der Ort der Erde gegeben, so würde man aus den letzten drei Gleichungen die drei unbekannten Gröfsen l, p und ϱ auf folgende Weise finden. Quadrirt man nämlich jene drei Gleichungen, so wird die Summe dieser Quadrate sofort den Ausdruck geben:

$$r^2 = R^2 + \varrho^2 + 2 R \varrho \operatorname{Cos.} \psi,$$

wo der Kürze wegen

$$\operatorname{Cos.} \psi = \operatorname{Sin.} P \operatorname{Sin.} \pi \operatorname{Cos.} (L - \lambda) + \operatorname{Cos.} P \operatorname{Cos.} \pi$$

gesetzt worden ist. Man sieht, dafs die Hülfsgröfse ψ in der Figur gleich dem äufsern Winkel T des Dreiecks S T P ist. Da sonach die Gröfse ψ vollkommen bekannt ist, so giebt die vorhergehende für ϱ quadratische Gleichung, wenn man sie in Beziehung auf diese Gröfse auflöst,

$$\varrho = - R \, Cos. \psi + \sqrt{r^2 - R^2 Sin.^2 \psi}.$$

Ist aber so die Gröfse ϱ bekannt, so findet man auch p und l durch die folgenden Ausdrücke:

$$Cos.\ p = \frac{R \, Cos. P + \varrho \, Cos. \pi}{r},$$

$$Sin.\ l = \frac{R \, Sin. P \, Sin. L + \varrho \, Sin. \pi \, Sin. \lambda}{r \, Sin. p}$$

oder

$$Cos.\ l = \frac{R \, Sin. P \, Cos. L + \varrho \, Sin. \pi \, Cos. \lambda}{r \, Sin. p}.$$

Diese Auflösung findet ihre unmittelbare Anwendung, wenn man die von der Oberfläche der Erde beobachteten *Sonnenflecken* auf ihren vom Mittelpuncte der Sonne gesehenen Ort reduciren will. Dann ist nämlich sehr nahe $\varrho = R$, also eine bekannte Gröfse, und überdiefs $P = 90^\circ$, da die Erde immer in der Ebene der Ekliptik ist, wenn man hier die stets nur sehr kleinen Störungen derselben vernachlässigt. Dann hat man

$$Cos.\ p = \frac{R}{r} \, Cos. \pi$$

und

$$Sin. (l - \lambda) = \frac{R \, Sin. (L - \lambda)}{r \, Sin. p}$$

oder auch

$$Sin. (l - L) = \frac{R \, Sin. \pi \, Sin. (\lambda - L)}{r \, Sin. p}.$$

Allein da es aus guten Gründen aufser dem astronomischen Gebrauche ist, die Gröfse r bei der Auflösung dieses Problems, der Verwandlung des geocentrischen Orts eines Planeten in seinen heliocentrischen, als gegeben vorauszusetzen, so hat man zu diesem Zwecke einen andern Weg eingeschlagen. Man setzt nämlich bei dieser Auflösung die *Lage der Bahn* des Planeten oder die Neigung n derselben gegen die Ekliptik und die Länge k des aufsteigenden Knotens der Bahn in der Ekliptik als bekannte Gröfsen voraus. Diesem gemäfs wird man also in den Gleichungen (VII) zuerst die Gröfse N gleich k setzen. Nennt man dann u das *Argument der Breite* oder die wahre Entfernung des Pla-

neten in seiner Bahn von dem aufsteigenden Knoten, so hat man

$$\begin{aligned}\text{Sin. p Cos.}(l-k) &= \text{Cos. u}\\ \text{Sin. p Sin.}(l-k) &= \text{Sin. u Cos. n}\\ \text{Cos. p} &= \text{Sin. u Sin. n},\end{aligned}$$

und sonach gehn die Gleichungen (VII) in folgende über:

$$\left.\begin{aligned}\text{r Cos. u} - \text{R Cos.}(L-k) &= \varrho\,\text{Sin.}\,\pi\,\text{Cos.}(\lambda-k)\\ \text{r Sin. u Cos. n} - \text{R Sin.}(L-k) &= \varrho\,\text{Sin.}\,\pi\,\text{Sin.}(\lambda-k)\\ \text{r Sin u Sin. n} &= \varrho\,\text{Cos.}\,\pi\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (IX)$$

Die Division der beiden letzten dieser drei Gleichungen giebt

$$\frac{\text{r Sin. u Cos. n} - \text{R Sin.}(L-k)}{\text{r Sin. u Sin. n}} = \text{Tang.}\,\pi\,\text{Sin.}(\lambda-k),$$

also auch

$$\text{r Sin. u} = \frac{\text{R Sin.}(L-k)}{\text{Cos. n} - \text{Sin. n Tang.}\,\pi\,\text{Sin.}(\lambda-k)}\ \ldots\ (A)$$

Ebenso giebt aber auch die Division der ersten und letzten der Gleichungen (IX)

$$\frac{\text{r Cos. u} - \text{R Cos.}(L-k)}{\text{r Sin. u Sin. n}} = \text{Tang.}\,\pi\,\text{Cos.}(\lambda-k),$$

oder, wenn man den Werth von r. Sin. u aus (A) substituirt,

$$\text{r Cos. u} = \frac{\text{R}\,[\text{Sin. n Tg.}\,\pi\,\text{Sin.}(L-\lambda) + \text{Cos. n Cos.}(L-k)]}{\text{Cos. n} - \text{Sin. n Tang.}\,\pi\,\text{Sin.}(\lambda-k)}\ \ldots\ (B)$$

und die beiden Gleichungen (A) und (B) geben daher die zwei gesuchten Gröfsen r und u, aus welchen man wieder l und p durch die folgenden Ausdrücke ableiten kann:

$$\begin{aligned}\text{Tang.}(l-k) &= \text{Cos. n Tang. u}\\ \text{Cotg. p} &= \text{Tang. n Sin.}(l-k)\end{aligned}$$

oder

$$\text{Cos. p} = \text{Sin. n Sin. u}$$

$$\text{Sin. p} = \frac{\text{Cos. u}}{\text{Cos.}(l-k)}.$$

Um die Berechnung der zwei Gleichungen (A) und (B) durch Logarithmen zu erleichtern, kann man die beiden Hülfsgröfsen M und N einführen, so dafs man hat

$$\text{Tang. } M = \frac{\text{Cos.}(L - k)\,\text{Cotg.}\,\pi}{\text{Sin.}\,(L - \lambda)}$$

und

$$\text{Tang. } N = \frac{\text{Cotg.}\,\pi}{\text{Sin.}\,(\lambda - k)},$$

wo man dann sofort die gesuchten Gröfsen u, r und ϱ durch folgende Gleichungen erhält:

$$\text{Tang. } u = \frac{\text{Sin. } M\,\text{Tang.}\,(L - k)}{\text{Sin.}\,(M + n)}$$

$$r = \frac{R\,\text{Sin. } N\,\text{Sin.}\,(L - k)}{\text{Sin.}\,(N - n)\,\text{Sin.}\,u}$$

$$\varrho = \frac{R\,\text{Sin.}N\,\text{Sin.}(L - k)\,\text{Sin.}\,n}{\text{Cos.}\pi\,\text{Sin.}(N - n)} = \frac{r\,\text{Sin.}\,u\,\text{Sin.}\,n}{\text{Cos.}\,\pi}.$$

Beisp. Ist für einen Planeten $\lambda = 80^0$, $\pi = 80^0$, $n = 5^0$ und $k = 15^0$ und setzt man für den entsprechenden Sonnenort $L = 60^0$ und $R = 1$, so geben die vorhergehenden Ausdrücke für den gesuchten heliocentrischen Ort des Planeten

$$u = 52^0\ 52'\ 12'',4,$$
$$\text{Log.}\,r = 0{,}208925$$

und

$$\text{Log.}\,\varrho = 9{,}811156.$$

Noch wollen wir bemerken, dafs man zwischen diesen Gröfsen L, l, λ und R', r', ϱ' oder den Projectionen von R, r, ϱ auf die Ekliptik folgende allgemeine Ausdrücke hat:

$$\left.\begin{aligned} R'\,\text{Sin.}\,(l - L) &= \varrho'\,\text{Sin.}\,(\lambda - l) \\ R'\,\text{Sin.}\,(\lambda - L) &= r'\,\text{Sin.}\,(\lambda - l) \\ \varrho'\,\text{Sin.}\,(\lambda - L) &= r'\,\text{Sin.}\,(l - L) \end{aligned}\right\}$$

und ebenso

$$\left.\begin{aligned} R'\,\text{Cos.}\,(l - L) + \varrho'\,\text{Cos.}\,(\lambda - l) &= r' \\ r'\,\text{Cos.}\,(\lambda - l) - R'\text{Cos.}\,(\lambda - L) &= \varrho' \\ r'\,\text{Cos.}\,(l - L) - \varrho'\,\text{Cos.}\,(\lambda - L) &= R' \end{aligned}\right\}.$$

Man pflegt aber in dem ebenen Dreiecke, welches von den drei Seiten R', r' und ϱ' gebildet wird, den Winkel an der Sonne die *Commutation*, den an dem Planeten die *jährliche Parallaxe* und endlich den an der Erde die *Elongation* zu

nennen, so dafs man also für diese drei Winkel die Ausdrücke hat:

Commutation . . . . . $= l - L$
Jährliche Parallaxe . . $= \lambda - l$
Elongation . . . . . . $= 180^\circ - (\lambda - L)$.

I. Verzeichnifs der Umlaufszeiten der Körper unseres Sonnensystems.

Zum Beschlusse dieses Artikels stellen wir die Umlaufszeiten der Planeten und Satelliten um die Sonne und die Rotationszeiten derselben um ihre eigenen Axen in eine tabellarische Uebersicht zusammen.

Umlaufszeiten der Planeten.

	Siderische Tage	Tropische Tage	Synodische Tage
Mercur	87,96928	87,96846	115,88
Venus	224,70078	224,69543	583,92
Erde	365,25637	365,24222	— —
Mars	686,97964	686,92971	779,98
Vesta	1325,4850	1325,2980	504,21
Juno	1593,0670	1592,7970	473,92
Ceres	1684,7350	1684,4340	466,38
Pallas	1686,3050	1686,0030	466,26
Jupiter	4332,58480	4330,5932	398,90
Saturn	10759,21981	10746,93761	378,10
Uranus	30686,8205	30586,90839	369,67

Umdrehungszeiten der Planeten um ihre Axen in mittleren Sonnentagen der Erde.

	Tage
Mercur	1,0035
Venus	0,9729
Erde	0,9973
Mars	1,0259
Jupiter	0,4135
Saturn	0,4370
Uranus	— —
Sonne	25,5000.

Die Rotationszeiten der vier neuen Planeten sind noch unbekannt. Von denen der älteren Planeten ist die Rotationszeit der Venus noch am wenigsten bekannt, da einige Astronomen dieselbe zu 0 Tag 23^h 21′ oder 0,9729 Tag, wie oben, andere aber sogar zu $24\frac{1}{3}$ Tagen angenommen haben.

Umlaufszeit des Monds.

	Tage					
Siderische Revolution	27,321661	= 27 T.	7^h	43′	11″,5
Tropische	27,321582	= 27	7	43	4,7
Synodische	29,530589	= 29	12	44	2,9
Anomalistische	27,554600	= 27	13	18	37,4
Drachenmonat	27,21222	= 27	5	5	36,0,

wo die siderische Revolution die Umlaufszeit des Monds in Beziehung auf die Fixsterne, die tropische in Beziehung auf die Nachtgleichen, die synodische in Beziehung auf die Sonne, die anomalistische in Beziehung auf die grofse Axe der Mondbahn und der Drachenmonat endlich die Umlaufszeit in Beziehung auf die Knoten der Mondbahn in der Ekliptik bezeichnet. Diese grofse Axe der Mondbahn und auch die Knoten dieser Bahn sind selbst wieder am Himmel beweglich. Die tropische Umlaufszeit der grofsen Axe oder der Apsiden beträgt 3232,57534 Tage oder 8 Julianische Jahre 310 Tage 13^h 48′ 29″ und die Richtung dieser Bewegung ist direct oder von West nach Ost. Die tropische Umlaufszeit der Knotenlinie aber beträgt 6793,39108 Tage oder 18 Julian. Jahre 218 Tage 21^h 23′ 9″ und die Richtung dieser Bewegung ist rückläufig oder von Ost gen West. Die synodische Umlaufszeit der Knotenlinie endlich ist 346,61985 Tage oder 346 Tage 14^h 52′ 35″.

Die Umdrehungszeit des Monds um seine Axe ist genau der mittleren Umlaufszeit des Monds um die Erde gleich, also auch gleich 27,321661 Tagen in Beziehung auf die Fixsterne.

Satelliten Jupiters.

Siderische Revolution.

	Tage
I . . .	1,76914
II . . .	3,55118
III . . .	7,15455
IV . . .	16,63877.

Satelliten Saturns.

Siderische Revolution.

	Tage
I . . .	0,94271
II . . .	1,37024
III . . .	1,88780
IV . . .	2,73948
V . . .	4,51749
VI . . .	15,94530
VII . . .	79,32960.

Satelliten des Uranus.

Siderische Revolution.

	Tage
I . . .	5,893
II . . .	8,707
III . . .	10,961
IV . . .	13,456
V . . .	38,075
VI . . .	107,694.

Von diesen sechs durch den ältern Herschel mehr geahnten oder nur eben erblickten, als in der That beobachteten Monden ist bloſs der II. und IV. von dem jüngern Herschel wieder gesehn worden, so daſs die Existenz der vier andern noch zweifelhaft genannt werden kann.

Umlaufszeiten der Kometen.

Von den wahrscheinlich sehr zahlreichen Kometen, welche unsere Sonne umschwärmen, kennen wir bisjetzt nur vier, deren Umlaufszeit wir mit einiger Genauigkeit anzugeben im Stande sind. Diese sind I. der *Halley'sche*, der 1682, 1759 und 1835 erschien und der nahe alle 76 Jahre seine Bahn um die

Sonne vollendet. II. Der im J. 1815 von Olbers entdeckte Komet, dessen Umlaufszeit 74 Jahre beträgt. III. Der von Pons im J. 1818 entdeckte und von Encke als ein Komet von sehr kurzer Periode erkannte und berechnete Komet hat eine Umlaufszeit von 3,31 Jahren oder 3 Jahren 113 Tagen. IV. Endlich der von Biela im J. 1826 entdeckte Komet hat eine Umlaufszeit von 6,74 Jahren oder von 6 Jahren 270 Tagen. Der erste oder Halley'sche Komet bewegt sich retrograd, die drei andern aber direct, wie die Planeten und alle Satelliten, die sich ebenfalls direct oder von West nach Ost bewegen, mit Ausnahme der Satelliten des Uranus, die sich in einer gegen die Ekliptik sehr stark geneigten Bahn (deren Neigung nahe 79 Grade beträgt) retrograd oder von Ost nach West bewegen. Wir werden weiter unten[1] Gelegenheit haben, die Ursache dieser allgemeinen Erscheinung und vielleicht selbst die der erwähnten Ausnahme bei den Uranusmonden näher kennen zu lernen.

L.

Umschattige.

Periscii; Perisciens; *Periscii.*

Diejenigen Bewohner der Erde, deren Schatten nach allen Puncten des Horizonts fällt, während z. B. in unseren Gegenden der Schatten der Menschen, Bäume, Thürme u. s. w. nie nach Süden fallen kann, weil für uns die Sonne das ganze Jahr hindurch nie auf die Nordseite des Zeniths treten, also auch der der Sonne gegenüberstehende Schatten aller Gegenstände nie nach Süden fallen kann. Jene Umschattigen sind nämlich die Bewohner der beiden kalten Zonen, für welche bekanntlich die Sonne mehrere Tage im Jahre gar nicht untergeht, sondern alle 24 Stunden einen in allen seinen Theilen sichtbaren ganzen Kreis über dem Horizonte beschreibt, was dann auch von dem Schatten gelten mufs, den die von der Sonne beschienenen Gegenstände hinter sich werfen. Die Bewohner der Pole, die ein volles halbes Jahr hindurch Tag und ebenso lange Nacht haben, sind also auch ein halbes Jahr durch um-

---

1 S. Art. *Weltsystem.*

schattig; die Bewohner der Grenzen der kalten Zone aber oder die Bewohner der beiden Polarkreise, für welche die Sonne, in ihrem höchsten Sommer, nur einen einzigen Tag nicht auf- oder auch nicht untergeht, sind daher auch nur einen Tag im Jahre Umschattige zu nennen. Schon STRABO[1] hat auf diese Lage des Schattens eine Eintheilung der Bewohner der Erde zu gründen gesucht, aber zweckmäfsiger, als die Neueren, blofs den *mittägigen* Schatten dabei berücksichtigt. Nach ihm giebt es *vier* Abtheilungen. I. Die *Umschattigen*, *Περίσκιοι*, in der kalten Zone, deren Schatten, da sie keinen eigentlichen Mittag haben, während 24 Stunden alle Puncte des Horizonts durchläuft. II. Die *Einschattigen*, *Ἑτερόσκιοι*, in den gemäfsigten Zonen, deren mittägiger Schatten immer nur nach einer Himmelsgegend hin gerichtet ist, in der nördl. gemäfsigten Zone nämlich nach Norden und in der südl. gemäfsigten Zone nach Süden. III. Die *Zweischattigen*, *Ἀμφίσκιοι*, in der heifsen Zone, deren mittägiger Schatten einen Theil des Jahrs hindurch nach Norden und den andern Theil nach Süden gerichtet ist, da ihnen die Sonne in jener Zeit gegen Süden und in dieser gegen Norden steht. Endlich IV. die *Unschattigen*, *Ἄσκιοι*, ebenfalls in der heifsen Zone, die nämlich einen Tag im Jahre zu Mittag gar keinen Schatten werfen, da ihnen in diesem Mittag die Sonne im Zenith steht. Eigentlich wurden die Letzten oder die *Ἄσκιοι* von VARENIUS, der die Eintheilung des STRABO zu verbessern suchte, eingeführt und statt derjenigen der III. Classe substituirt, weil nämlich die Bewohner der beiden Wendekreise, die er doch auch mit zur heifsen Zone rechnen wollte, nicht mehr Zweischattige, aber wohl noch Unschattige genannt werden können. Diese griechischen Worte kommen übrigens von *σκια Umbra*, und von *περὶ circum*, *ἕτερος alter*, *ἀμφὶ utrinque*, und der griechischen Vorsetzsylbe *α* her, die unserem *un* entspricht, wie in *βροτὸς* sterblich und *ἄβροτος* unsterblich. Darauf beziehn sich viele Stellen der alten Dichter, die, im Gegensatze mit den meisten neueren, nicht blofs von Wein und Liebe, sondern auch von den Erscheinungen am Himmel zu singen verstanden. So sagt LUCAN[2], dafs die Araber, als sie

---

1 Geograph. Lib. II.
2 Pharsal. Lib. III. v. 247.

auf ihrem Heereszuge die heiſse Zone erreichten, sich verwunderten, den mittägigen Schatten nicht mehr zu ihrer linken Hand zu sehn, wenn sie, beim Gebete, ihr Gesicht nach Osten kehrten.

Ignotum vobis, Arabes, venistis in orbem,
Umbras mirati nemorum non ire sinistras.

Von der Stadt Syene in Aegypten, die nahe unter dem nördlichen Wendekreise liegt, sagt derselbe Dichter in den Worten

Umbras nusquam flectente Syene,

daſs sie, am Tage des Solstitiums, gar keinen Schatten mehr hätte, weil ihr dann die Sonne im Zenith stehe.

L.

Undulation.

Undulationstheorie (des Schalls und des Lichts), Wellentheorie; *Théorie de l'ondulation;* Theory of Undulation, Undulatory theory.

Die Theorie des Schalles hat man, der Natur der Sache gemäſs, von jeher, die Theorie des Lichts und seiner Bewegungen aber erst in den neueren Zeiten auf die Wellenbewegung gegründet. Zwar haben schon Descartes, Huyghens und Euler die Phänomene des Lichts aus der Wellenbewegung abzuleiten gesucht, aber die für ihre Zeiten sehr preiswürdigen Bemühungen dieser Männer wurden aus Vorliebe für eine andere, vorzüglich durch das Ansehn Newton's festgehaltene Hypothese der Vergessenheit übergeben, bis endlich erst in unseren Tagen die Undulationstheorie des Lichtes, vorzüglich durch Young, Fresnel, Cauchy, Poisson, Arago und Fraunhofer, wieder in ihre Rechte eingesetzt und zugleich mit einer bewunderungswerthen Schnelligkeit ausgebildet worden ist. Ueber die Vorzüge, welche diesen beiden Hypothesen zukommen, ist bereits oben[1] gesprochen worden, daher wir uns hier nicht weiter dabei aufhalten und sogleich

---

1 S. Art. *Licht.* Bd. VI. S. 309 ff.

zu unserem Gegenstande, der Auseinandersetzung der Wellentheorie, übergehn[1].

Eine sehr groſse Anzahl von Erscheinungen in der Natur leitet uns auf die ungemein wahrscheinliche Annahme, daſs alle Körper derselben, die festen, flüssigen und luftförmigen, aus sehr kleinen Elementen bestehn, die durch anziehende und abstoſsende Kräfte auf einander wirken und sich, im Zustande des Gleichgewichts, in bestimmten Entfernungen von einander halten. Wenn dieses Gleichgewicht auch nur für einen Augenblick, z. B. durch den Stoſs eines fremden Körpers, gestört wird, so sieht man sofort mehrere dynamische Erscheinungen an dem gestörten Körper hervortreten, die eine Weile fortdauern und erst dann verschwinden, wenn der Körper sein voriges Gleichgewicht wieder angenommen hat. Als erste und unmittelbare Folge jener störenden Einwirkung entsteht eine Bewegung, eine Annäherung oder Entfernung jener Elemente und, wenn die äuſsere Störung aufhört, ein Bestreben dieser Elemente, ihre früher behaupteten Stellungen wieder einzunehmen, indem sie um diese Stellungen Schwingungen machen, die meistens isochron sind, deren Amplitüde aber immer kleiner wird, bis sie endlich ganz verschwinden und der Körper wieder zum Gleichgewicht, zur Ruhe aller

1 Die vorzüglichsten, bei dieser Darstellung benutzten Schriften sind: Young Course of lectures etc. Lond. 1807. II Vol. 4. Encycl. Britan. Art. *Chromatics.* Fresnel, sur la lumière. Supplément au traité de Chimie de Thomson. Par. 1822. Mém. de l'Acad. T. V. et VII. Annales de Ch. et de Ph. XV et XVII. Poggendorff's Annalen. Th. III. V. XII. XVII. XXI. XXII. XXIII und XXX. Cauchy, Mem. de l'Acad. T. IX et X. Memoire sur la dispersion de la lumière. Prag. 1836. Exercice V. Brewster, Phil. Transact. 1818, 1829, 1830. Airy, on the undulatory theory of optics in s. Mathem. Tracts. Cambridge Transact. IV. Poisson, Mém. de l'Acad. T. VIII. X. Ann. de Ch. et de Ph. T. XXII. Ampère, Ann. de Ch. et de Ph. T. XXX. XXXIX. LVII. Weber, Wellenlehre auf Experimente gegründet. Leipz. 1825. Fraunhofer in Schumacher's astron. Abhandlungen; desselben neue Modificationen des Lichts und G. LXXIV. u. s. w. Herschel, Encycl. Metropol. Art. Light. Deutsch von Schmidt. Stuttg. 1831 und franz. von Verhulst mit Quetelet's Supplément. Paris 1829. Hamilton, Theory of systems of rays. Transact. of Irish Acad. 1828. Vol. XV. Kunzek, die Lehre von dem Lichte. Lemberg 1836. Schwerd, die Beugungserscheinungen. Mannheim 1835.

seiner Theile zurückkehrt. Wenn diese Schwingungen der die Körper umgebenden Luft und durch diese dem Ohre mitgetheilt werden, so entsteht, wie wir allgemein annehmen, ein uns hörbares *Geräusch*, ein *Schall* oder ein *Ton*, und wenn diese Schwingungen der Elemente der Körper einem anderen, viel feineren und elastischeren Mittel, dem Aether, und durch ihn dem Auge mitgetheilt werden, so entsteht, wie man in der Undulationstheorie annimmt, das, was wir durch *Licht* und *Farbe* bezeichnen. Schon diese genetische Erklärung des Tons und des Lichts zeugt von dem innigen Zusammenhange der beiden Erscheinungen, von denen wir die eine Gattung durch unser Gehör, die andere aber durch den Sinn unsers Gesichts auffassen. Nicht weniger innig sind auch ihre wissenschaftlichen Darstellungen verbunden, von welchen die eine durch die andere unterstützt und ergänzt wird, daher es zweckmäfsig erscheint, sie hier beide im Zusammenhange vorzutragen, mit Uebergehung oder, wo nöthig, nur mit leiser Berührung desjenigen, was über die Schallwellen bereits oben[1] gesagt worden ist.

A. Undulation des Schalles.

1) Entstehung und Eintheilung der Wellen.

Wenn ein fester elastischer Körper, der mit einem andern, flüssigen oder luftförmigen, aber ebenfalls elastischen Medium in Verbindung ist, in schnelle Schwingungen versetzt wird, so theilt er dem Medium diese Schwingungen mit und versetzt dadurch das Medium in eine eigene Art von Bewegung seiner Theile, die eine *wellenförmige Bewegung* genannt wird. Jedermann kennt diese wellenförmige Bewegung, die auf der Oberfläche eines ruhig stehenden Wassers entsteht, wenn man einen Punct desselben z. B. mit einem Stabe erschüttert. Es bilden sich kreisförmige Wellen auf der Oberfläche des Wassers um diesen Punct, die sich mit grofser Schnelligkeit um denselben fortpflanzen[2].

---

1 S. Art. *Schall*. Bd. VIII. S. 178 ff.

2 Weniger sind vielleicht manchen Lesern die *Eigenschaften* dieser Wellen bekannt. Am einfachsten treten dieselben hervor, wenn

Zuerst wollen wir uns eine deutliche Idee von der Bewegung der Elemente der Flüssigkeit bei der Entstehung dieser Wellen zu machen suchen. Es stelle die Linie (α) die Lage dieser Elemente im ruhenden Zustande des Körpers vor. Diese Lage gehe, durch die Einwirkung irgend einer Störung, zur Zeit T in die Stellung (β); zur Zeit $T + \frac{\tau}{4}$ in die Stellung (γ); zur Zeit $T + \frac{2\tau}{4}$ in (δ); zur Zeit $T + \frac{3\tau}{4}$ in (ε) und zur Zeit $T + \tau$ in die Stellung (ζ) über, welche letzte wieder mit der ersten (β) zur Zeit T dieselbe seyn soll. Diese Elemente stehn also, der Zeichnung gemäfs, zur Zeit T am

Fig. 170.

---

die Wellen nicht z. B. durch das heftige Fallen oder Werfen eines Steines in das Wasser, sondern durch das sanfte Aufheben eines in dem Wasser versenkten Körpers über den Wasserspiegel entstehn. Nach Poisson's schöner Analyse werden nämlich in diesem Falle zwei Gattungen von Wellen gebildet. Beide entstehn gleich anfangs und zwar zu derselben Zeit in unendlicher Anzahl. Die ersten pflanzen sich mit einer gleichförmig beschleunigten Geschwindigkeit fort, wie bei dem freien Falle der Körper; die Distanz zweier nächsten Wellengipfel ist dem Quadrat der Zeit proportional, und die Höhe dieser Gipfel nimmt im verkehrten Verhältnisse dieser Quadrate der Zeit ab, wenn die Flüssigkeit in einem Canale von bestimmter Breite enthalten ist, oder im verkehrten Verhältnisse der vierten Potenzen der Zeit, wenn die Flüssigkeit unbegrenzt und ganz frei ist. Diese erste Gattung von Wellen ist weniger auffallend oder bemerkbar, weil ihre Gipfel so schnell abnehmen. Die der zweiten Gattung aber pflanzen sich gleichförmig mit einer Geschwindigkeit fort, die der Quadratwurzel des Durchmessers des eingetauchten Körpers proportional ist; die Höhen dieser zweiten Wellen nehmen ab, in geschlossenen Canälen, wie verkehrt die Quadratwurzel der Zeit, und im freien Wasser, wie verkehrt die Zeit selbst, und diese zweite Wellengattung ist viel leichter zu bemerken, als die erste, besonders in der Nähe des eingetauchten Körpers. Beide Arten von Wellen pflanzen sich übrigens von der Oberfläche des Wassers bis in eine sehr grofse Tiefe unter derselben fort. Wenn die Wasserwellen einem festen Widerstande begegnen, so werden sie dadurch unterbrochen; der von dem Widerstande getroffene Theil der Welle wird auf sich selbst zurückreflectirt, und der übrige Theil der Welle stellt sich, hinter dem Widerstande, wieder vollkommen her. Erregt man auf der Oberfläche eines ruhigen Wassers, in mehreren Puncten desselben, verschiedene Wellen, so kreuzen und decken sich die so von jedem Erschütterungspuncte ausgehenden Wellen und legen sich über einander, ohne sich in ihrem Gange oder in ihrer Gestalt im Allgemeinen zu stören.

dichtesten bei a, a' und a'' beisammen. Nehmen wir an, dafs wir unsere Aufmerksamkeit einer dieser Verdichtungsgruppen, z. B. derjenigen vorzüglich zuwenden, deren Mittelpunct a' ist. Zur Zeit $T + \frac{\tau}{4}$ ist dieser Verdichtungsmittelpunct bereits von den Elementen a' zu denen bei d' übergangen, und dieses zwar nicht sowohl blofs durch eine fortschreitende Bewegung aller Elemente in der Richtung a'd', sondern auch besonders durch eine solche *Differenz der Bewegungen* dieser Elemente, dafs die um a' nicht mehr so nahe an einander stehn, als zuvor, und dafs ebenso die um d' jetzt näher bei einander stehn, als zuvor. Zur Zeit $T + \frac{2\tau}{4}$ ist der Verdichtungsmittelpunct nach g' vorgeschritten, also eben dorthin, wo zur Zeit T die geringste Verdichtung statt hatte. Zur Zeit $T + \frac{3\tau}{4}$ ist dieser Verdichtungsmittelpunct in k' und zur Zeit $T + \tau$ endlich wieder in a'', so dafs also am Ende der Periode τ die sämmtlichen Elemente des Körpers gegen einander, in Beziehung auf ihre Verdichtung, dieselbe Stellung haben, wie im Anfange dieser Periode, wo nämlich bei a'' ebenfalls eine gröfste Verdichtung, ein Verdichtungsmittelpunct statt gehabt hat. Nach dieser Zeit $T + \tau$ gehn die aufgezählten Erscheinungen ganz auf dieselbe Weise und in derselben Ordnung wieder weiter, wie sie gleich nach der ersten Zeit T gegangen sind, und was wir so eben von dem Mittelpuncte a' der gröfsten Dichtigkeit gesagt haben, gilt ebenso auch von jedem andern Puncte b', c', d', .. der ganzen Reihe.

Wenn man die erwähnten Bewegungen im Ganzen überblickt, so sieht man verschiedene Verdichtungen der einzelnen Theile des Körpers (oder verschiedene Näherungen und Trennungen der einzelnen Elemente), die periodisch, gleichförmig und continuirlich von der linken zur rechten Seite in der ganzen Reihe dieser Elemente fortschreiten. Man erhält ein Bild von diesen Bewegungen, wenn man eine an ihren beiden Enden gespannte Darm- oder Metallsaite, ihrer Länge nach, mit einem an Kolophon (Geigenharz) abgeriebenen Tuche schnell streicht. Der dadurch entstehende *Ton* ist die Folge jener abwechselnden Verdichtungen der Elemente, aus welchen die Saite besteht. Wenn man ein bestimmtes dieser

Elemente betrachtet und in seiner Bewegung verfolgt, so bemerkt man, dafs dasselbe eine reciproke oder eine *schwingende* Bewegung hat, indem dasselbe bald rechts, bald wieder links von seinem ursprünglichen Stande der Ruhe oder des Gleichgewichtes sich befindet. So geht z. B. das Element a in der Zeit von T bis $T + \frac{\tau}{4}$ rechts, dann wieder in der Zeit von $T + \frac{2\tau}{4}$ bis $T + \frac{3\tau}{4}$ links, so dafs es zur Zeit $T + \frac{2\tau}{4}$ seine gröfste rechte und zur Zeit $T + \tau$ seine gröfste linke Ausweichung (Amplitüde) hat und dann von dieser letzten Zeit wieder rechts geht u. s. w. Ebenso hat das Element d zur Zeit T seine gröfste linke, zur Zeit $T + \frac{2\tau}{4}$ seine gröfste rechte, zur Zeit $T + \tau$ aber wieder seine gröfste linke Ausweichung u. s. w.

Man sieht aus dieser Darstellung, dafs das Intervall zwischen zwei homologen, mit demselben Buchstaben bezeichneten Elementen (wie z. B. das Intervall $a a'$ oder $a' a''$ . . zur Zeit T oder das Intervall $d d'$ oder $d' d''$ . . zur Zeit $T + \frac{\tau}{4}$ u. s. w.) ganz unabhängig ist von der Gröfse der Schwingung (Amplitüde) jedes einzelnen Elementes. Denn wenn auch z. B. jedes dieser Elemente nur halb so grofse oder wenn es auch doppelt so grofse Schwingungen zu beiden Seiten seines Orts des Gleichgewichts machte, als wir oben angenommen haben, immer würde doch der Mittelpunct der gröfsten Verdichtung zur Zeit T in den Puncten a, a', a'' . . verbleiben u. s. w., und nur der Unterschied würde statt haben, dafs die Elemente bei a, a', a'' . ., wo sie vorhin am dichtesten standen, oder bei g, g', g'' . ., wo sie vorhin am wenigsten dicht standen, jetzt eine andere Dichtigkeit als zuvor, aber immer wieder ihre gröfste oder kleinste Dichtigkeit haben würden, wie sie dieselbe auch zuvor in den Puncten a, a', a'' . . . und g, g', g'' . . gehabt haben. Eine solche Zusammenstellung der Elemente eines Körpers, wie sie von a bis l oder von a' bis l' oder von a'' bis l'' in den bezeichneten Reihen (β), (γ), (δ) . . statt hat, wird eine *Welle* genannt, und das Intervall zwischen je zwei nächsten homologen Elementen $a a'$ oder $a' a''$ oder $a'' a'''$ . . . heifst die

Länge der Welle, welche Länge wir in der Folge immer durch λ bezeichnen wollen.

I. Es kann aber aufser dieser gegenseitigen Zusammen- und Auseinanderrückung der Elemente auch andere, ebenfalls periodische Bewegungen derselben geben, die ganz dieselben Erscheinungen zeigen, wie die bisher aufgeführten. Nehmen wir z. B. an, dafs diese Elemente, wenn sie sich aus dem Stande des Gleichgewichts, wie sie in (α) der Zeichnung dargestellt werden, entfernen, bald über, bald wieder unter die gerade Linie a a″, die sie im Gleichgewichte eingenommen haben, treten. Das erste Element a ist hier im Anfang der Zeit T in seiner mittlern, zur Zeit $T + \frac{\tau}{4}$ in seiner höchsten, zur Zeit $T + \frac{2\tau}{4}$ wieder in seiner mittlern, zur Zeit $T + \frac{3\tau}{4}$ aber in seiner kleinsten Höhe, bis es, wie alle seine folgenden Elemente, am Ende der Zeit $T + \tau$ wieder seine erste Lage zur Zeit T einnimmt. Ebenso ist die gröfste Erhöhung der Elemente zur Zeit T in k, zur Zeit $T + \frac{\tau}{4}$ in a′, zur Zeit $T + \frac{2\tau}{4}$ in d′ u. s. w. In der ersten unserer Darstellungen hatten die Elemente eine schwingende Bewegung, die ganz in der Richtung der Gleichgewichtslinie a a″ lag, in welcher man auch die Länge der aufeinanderfolgenden Wellen zählte, und dabei nahmen die gegenseitigen Entfernungen der Elemente (oder die Dichtigkeiten des Körpers in seinen einzelnen Puncten) abwechselnd ab und zu. In der gegenwärtigen Darstellung aber, wo die Wellen ebenfalls, wie zuvor, von der Linken zur Rechten in der Gleichgewichtslinie a a″ fortschreiten, haben die schwingenden Bewegungen der einzelnen Elemente in einer auf diese Gleichgewichtslinie *senkrechten* Richtung statt, ohne dafs dabei die Distanzen dieser Elemente (oder die Dichtigkeit des Körpers) eine wesentliche Veränderung erfahren. Auch hier wird wieder jede periodische Zusammenstellung dieser Elemente von a bis a′, oder von a′ bis a″ u. s. w. eine *Welle* genannt und das Intervall a a′ oder a′ a″. . heifst wieder die *Länge der Wellen*. Man erhält ein Bild von diesen Bewegungen, wenn man eine ge-

Fig. 171.

spannte Saite seitwärts aus der Lage ihres Gleichgewichts bringt, indem man sie mit dem Finger kneipt oder mit einem Violinbogen streicht. Der dadurch entstehende Ton ist die Folge jener periodischen Ausweichungen der Elemente, jener *Schwingungen der Saite*, die auch dem Auge dadurch sichtbar werden, daſs die Saite während ihrer Schwingungen in der Mitte viel dicker erscheint, als an ihren Endpuncten.

II. Jene ersten Bewegungen der Elemente werden, da sie in der Richtung der Länge der Saiten vor sich gehn, *Längen*- oder *Longitudinalschwingungen* genannt, während diese zweiten, wo die Elemente eine auf die Länge der Saite senkrechte Bewegung haben, *Seiten*- oder *Transversalschwingungen* heiſsen.

III. Es lassen sich aber auch noch mehrere andere Schwingungen angeben, wie z. B. eine aus den beiden vorhergehenden zusammengesetzte oder eine, in welcher sich die Elemente nicht bloſs, wie in der zweiten Darstellung, über und unter die Gleichgewichtslinie in einer und derselben Ebene, sondern wo sie sich, wie bei den sogenannten *drehenden Schwingungen*, schraubenförmig, also in verschiedenen Ebenen bewegen u. s. w. Aber die beiden ersten sind die einfachsten und daher auch diejenigen, aus welchen die meisten andern zusammengesetzt werden können.

IV. Man kann diese Schwingungen durch Drähte, durch starre Stäbe oder auch durch dünne Platten von Glas oder Metall (überhaupt durch elastische Körper jeder Art) darstellen, die in einem oder auch in mehreren ihrer Puncte aufgelegt oder befestigt sind und dann an ihren freien Theilen in eine schwingende Bewegung versetzt werden. Bedeckt man diese Körper vorher mit feinem Sand oder Staub, so werden die Schwingungen derselben dem Auge sichtbar, wie oben[1] gezeigt worden ist. Ja nicht bloſs in diesen festen, sondern auch in tropfbaren und luftförmigen elastischen Körpern lassen sich diese Schwingungen erzeugen, wenn man sie mit jenen schwingenden Saiten oder Platten in Verbindung bringt, wo dann die Schwingungen der letztern der Luft mitgetheilt und in ihr fortgepflanzt werden.

---

1 S. Art. *Schall* a. a. O.

V. Ist dieser Luftraum, in dessen einem Puncte die vibrirende Erschütterung vor sich geht, nach allen Seiten frei und unbegrenzt, so werden sieh diese Schwingungen der Luft, von jenem Puncte aus, ebenfalls nach allen Seiten ausdehnen und die Wellen, die wir bisher, gleichsam in ihren Elementen, nur als Linien betrachtet haben, werden die Gestalt von *Kugelflächen* annehmen, deren Halbmesser immer gröſser wird, je weiter sich diese Kugelflächen von jenem ersten Puncte, ihrem gemeinschaftlichen Mittelpuncte, entfernen, wo dann endlich diese *sphärischen Wellen* in einzelnen kleinen Theilen derselben als *ebene Wellen* betrachtet werden können. Da diese sphärischen Wellen in freien tropfbaren oder luftförmigen Medien nach der Richtung der Halbmesser dieser Kugelschaalen im Raume fortschreiten oder sich von ihrem gemeinschaftlichen Mittelpuncte entfernen, so wird dieser Halbmesser auch die *Richtung* der sphärischen Welle genannt.

VI. Um sich diese *ebenen Wellen*, von welchen wir in der Folge öfter sprechen werden, deutlicher vorzustellen, kann man sich das elastische Medium, in welchem die Schwingungen vor sich gehn, in parallele, unendlich nahe stehende Ebenen getheilt denken, die alle senkrecht auf der Richtung stehn, in welcher sich die Wellen fortpflanzen. Wenn nun z. B. je hundert oder je tausend dieser Ebenen in eine solche vibrirende Bewegung gesetzt werden, daſs sie auf jener ersten Richtungslinie nach einem bestimmten Gesetze vor- und rückwärts gehn und dabei an gewissen Stellen sich abwechselnd nähern und trennen (verdichten und verdünnen), wie wir dieses z. B. oben bei einzelnen Puncten gesehn haben, so wird dadurch das Medium in *ebene Longitudinalschwingungen* versetzt werden. Wenn aber wieder je tausend dieser Ebenen zwar unter sich und von dem Mittelpuncte der sphärischen Welle immer dieselbe Entfernung behalten, aber von dem auf ihnen senkrechten Halbmesser der Welle nach bestimmten Gesetzen zu beiden Seiten dieses Halbmessers hin und her ausweichen, so wird dadurch das Medium eine den oben (II) angeführten *Transversalschwingungen* analoge Vibration annehmen. Wir werden bald sehn, daſs jene Schwingungen dem Tone oder Schalle und daſs diese vorzugsweise dem Lichte angehören.

Fig. 170.

VII. Nehmen wir nun alles Vorhergehende zusammen,

so können wir uns die *Welle* vorstellen als eine in einer gegebenen Richtung *fortschreitende Bewegung* einer bestimmten relativen Anordnung der Elemente eines elastischen Körpers, bei welcher jedes dieser Elemente in einer *schwingenden* (auf- und abgehenden) Bewegung begriffen ist. Um sich diese doppelte Bewegung zu versinnlichen, kann man annehmen, daſs z. B. bei den transversalen Schwingungen die Figur AmCnB in einem mit Luft erfüllten Cylinder nach der Richtung der Axe ACB dieses Cylinders parallel mit sich selbst fortschreitet, und daſs jede unendlich dünne Luftschicht sich dann zu bewegen anfängt, wenn der erste Endpunct B der Curve diese Schicht eben erreicht; daſs dann dieser Punct B der Schicht nach und nach durch alle Puncte dieser beweglichen Curve AmCnB geht, ohne dabei die durch B auf die Gerade AB gezogene senkrechte Gerade zu verlassen, und daſs endlich, wenn der letzte Endpunct A der Curve in B ankommt, auch der Punct B der Schicht wieder seinen früheren Ort einnimmt, um daselbst in Ruhe zu bleiben oder vielmehr (wenn die Schwingungen fortgesetzt werden, also auch die Curve aus mehreren der AmCnB ähnlichen Theilen besteht) seine so eben dargestellte Bewegung mehrmals periodisch zu wiederholen.

Fig. 172.

VIII. Bemerken wir noch, daſs man die einzelnen Theile einer Welle, z. B. von a bis d oder von d bis g, von g bis k u. s. w., die *Phasen* der ganzen Welle a bis m zu nennen pflegt. Man sagt: die Elemente einer Welle sind in *derselben Phase*, wenn *ihre Stellung und ihre Richtung* in der Welle dieselbe ist. So sind d und d′ oder h und h′ in derselben Phase; aber b und f sind es nicht, weil wohl ihre Stellung, aber nicht ihre Richtung der Bewegung dieselbe ist, und ebenso sind auch f und h nicht in derselben Phase, weil von diesen beiden Puncten wohl die Richtung der Bewegung, aber nicht die Stellung dieselbe ist. Man sieht, daſs alle Elemente dann in *derselben Lage* sind, wenn die Distanz dieser Elemente ein 1-, 2-, 3faches der Länge λ der ganzen Welle ist, und ebenso sind je zwei Elemente in *entgegengesetzten Phasen*, wenn ihre Distanz $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$ . . der Länge λ der Welle beträgt, wie dieses z. B. bei den Puncten a, g oder d, k oder d, k′ u. s. w. der Fall ist.

Fig. 170. u. 171.

2) Nähere Erklärung der Welle, Länge und Fortpflanzungsgeschwindigkeit derselben.

Wenn die Elemente eines elastischen Körpers, z. B. einer Metallplatte, aus der Lage ihres Gleichgewichts gebracht, d. h. wenn diese Elemente einander näher oder ferner gerückt werden (was z. B. geschehn kann, wenn die an einem ihrer Enden befestigte Platte an dem anderen Ende durch irgend eine Kraft gebogen wird), und wenn dann diese Kraft plötzlich aufhört zu wirken, so wird die Elasticität der Platte dieselbe wieder zu der ursprünglichen Lage ihres Gleichgewichts zurückführen und die Vibration der Platte wird beginnen. Ist sie auf diese Weise in der vorigen Lage ihres Gleichgewichts angekommen, so wird sie, ganz wie bei der bekannten Bewegung eines Pendels[1], eine Geschwindigkeit erhalten haben, die

---

1 Es wird nicht unangemessen seyn, hier die vorzüglichsten Ausdrücke der einfachen Pendelbewegung zur Uebersicht kurz zusammenzustellen. Es bezeichne in einer leicht zu entwerfenden Figur O den Mittelpunct eines Kreisbogens A B, dessen Halbmesser $OA = OB = \lambda$ die Länge des einfachen Pendels bezeichnet. Sey C der mittlere Punct des Bogens A B und M irgend ein Punct des Bogens zwischen A und C. Man denke sich den Halbmesser O C vertical oder in der Richtung der Schwere g (wo g = 9,809 Meter) und setze den Winkel $COM = \Theta$ und $COA = \alpha$, wo also α den anfänglichen Werth von Θ für den Anfang der Zeit t bezeichnet.

Diefs vorausgesetzt hat man für die Winkelgeschwindigkeit $\frac{\partial \Theta}{\partial t}$ des Pendels, vorausgesetzt, dafs α nur einen kleinen Winkel bezeichnet,

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = -\alpha \sqrt{\frac{g}{\lambda}} . \mathrm{Sin.}\, t \sqrt{\frac{g}{\lambda}},$$

also auch für die wahre Geschwindigkeit v des Endpunctes M des Pendels in seinem Kreisbogen A C B

$$v = \frac{\lambda \partial \Theta}{\partial t} = -\alpha \sqrt{g\lambda} . \mathrm{Sin.}\, t \sqrt{\frac{g}{\lambda}}$$

und daher auch für den Bogen $AM = s$, da $v = \frac{\partial s}{\partial t}$ ist,

$$s = \alpha \lambda . \left[1 - \mathrm{Cos.}\, t \sqrt{\frac{g}{\lambda}}\right].$$

Bezeichnet man den *ganzen Schwung* dieses Pendels durch die Summe des Hingangs desselben durch den Bogen A C B und des darauf folgenden Hergangs durch den Bogen B C A, so wird man für die Dauer

eine Folge ihrer bisherigen Bewegung ist, mit welcher sie sich auf die andere Seite ihrer Gleichgewichtslage begeben und auf dieser andern Seite so weit fortschreiten wird, bis ihre Geschwindigkeit in Folge der auf sie einwirkenden Hindernisse wieder vernichtet ist. In dieser Lage, wo sie die erste Hälfte ihre Oscillation vollendet hat, wird sie durch die Elasticität ihrer Elemente wieder zu der frühern Lage des Gleichgewichts zurückgebogen und durch die in dieser Lage erhaltene Geschwindigkeit wieder, wie zuvor, auf die andere Seite des Gleichgewichts geführt, bis sie den vorhergehenden Bogen wieder rückwärts zurückgelegt haben und in dem ursprünglichen Puncte ihrer Bewegung angekommen seyn wird, wo sie dann ihre erste *ganze Oscillation* vollendet hat. Da aber hier die Elasticität wieder, wie im Anfange jener Periode, auf sie einwirkt, so wird die Platte, gleich dem oben erwähnten Pendel, die so eben beschriebene Bewegung wieder anfangen und auch, obschon in immer kleiner werdenden Amplitüden des Bogens, so lange fortsetzen, bis sie endlich die frühere Lage ihres Gleichgewichts nicht mehr verläſst und in derselben zur Ruhe kommt. Wenn also ein elastischer Körper durch die augenblickliche Einwirkung einer Kraft seine Gestalt oder seine Lage geändert hat, so sucht er dieselbe wieder einzunehmen, indem er um seine frühere Lage des Gleichgewichts zu beiden Seiten derselben periodische Schwingungen macht, deren Oscillationen allmälig abnehmem, während die Zeiten dieser Schwingungen, wie bei der Pendelbewegung, doch immer dieselben bleiben.

I. Es wird erlaubt seyn, zum besseren Verständniſs des Folgenden schon hier den einfachsten Ausdruck zu anticipi-

---

des Schwungs, in welcher also das Pendel wieder in seine frühere Lage zurückkommt, oder für die ganze Periode, in welcher die Pendelbewegung alle ihre Veränderungen durchläuft, den Ausdruck haben

$$t\sqrt{\frac{g}{l}} = 2\pi,$$

wo π dis Ludolphische Zahl bezeichnet, so daſs daher die *Dauer* T *des Schwungs* seyn wird

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

ren, den man, wie wir später (§. 14 und 15) sehn werden, für diese Oscillationen der elastischen Körper aufgestellt hat. Bezeichnet nämlich M einen Punct der Welle CmCnB, zu welchem die auf die Abscissenaxe ACB senkrechte Ordinate PM gehört, so ist diese Ordinate

Fig. 172.

$$P'M' = -B \operatorname{Cos.} \frac{2\pi t}{\tau}$$

und die Geschwindigkeit v des Punctes M ist

$$v = A \operatorname{Sin.} \frac{2\pi t}{\tau},$$

wo t die von dem Anfange der Bewegung an verflossene Zeit und τ die Zeit der Bewegung des Punctes M durch den Bogen AmCnB einer ganzen Welle bezeichnet. Die Gröfsen A und B sind Constanten, von welchen die erste B die gröfste Ausweichung des Punctes M von der Abscissenaxe (oder die sogenannte *Oscillations-Amplitüde*) und die zweite A das Maximum der Geschwindigkeit (oder die sogenannte *Vibrations-Intensität*) des Punctes M bezeichnet. Der Winkel $\frac{2\pi t}{\tau}$ ist die *Oscillationsphase* und die Gröfse $\frac{t}{\tau}$ drückt die Anzahl der vollständigen Oscillationen aus, die seit dem Anfange der Bewegung verflossen sind. Während der ersten Oscillation ist t kleiner als τ; während der zweiten liegt t zwischen τ und 2τ; während der dritten zwischen 2τ und 3τ u. s. w. Man bemerkt von selbst die Analogie dieser beiden Ausdrücke mit den oben[1] für die Pendelbewegung gegebenen. Auch sieht man, dafs die *Phasen*, die um eine gerade Anzahl von halben Peripherieen π verschieden sind, gleich oder dieselben sind (§. 1. VIII), während diejenigen, bei denen diese Anzahl ungerade ist, entgegengesetzte Phasen sind. So sind, wenn n eine ganze Zahl bezeichnet,

$$\frac{2\pi t}{\tau} \text{ und } \frac{2\pi t}{\tau} \pm 2n\pi \text{ \textit{dieselben}}$$

und

$$\frac{2\pi t}{\tau} \text{ und } \frac{2\pi t}{\tau} \pm (2n+1)\pi \text{ \textit{entgegengesetzte} Phasen.}$$

II. Dieselben Gleichungen zeigen ferner, dafs die Ge-

1 S. Art. *Umdrehung.*

schwindigkeiten den Sinus, die Amplitüden aber den Cosinus der Phasen proportionirt sind, daſs die Geschwindigkeiten in den beiden ersten Quadranten positiv und in den beiden letzten negativ sind, und daſs endlich die Amplitüden (oder die Excursionen) im 1sten und 4ten Quadranten negativ, im 2ten und 3ten Quadranten aber positiv sind.

III. Die gröſsten Geschwindigkeiten in m und n entsprechen den kleinsten Amplitüden in m′ und n′ und die kleinsten Geschwindigkeiten in A, C und B entsprechen den gröſsten Amplitüden in A′, C′ und B′. Die gröſste (positive und negative) Amplitüde ist in A′ und C′, oder im Anfang A und in der Mitte C jeder Periode, wo die Geschwindigkeit Null ist. Die gröſste (positive und negative) Geschwindigkeit aber ist in m und n, nämlich in den Gleichgewichtslagen m′ und n′. Im Anfange der Welle, in A, ist die Geschwindigkeit Null und die Amplitüde hat in A′ ihren gröſsten negativen Werth. Wenn aber die Geschwindigkeit in m ihr positives Maximum erreicht, so ist die Amplitüde in m′ gleich Null u. s. w.

IV. Nach dem Vorhergehenden bezeichnet die Gröſse $\frac{t}{\tau}$ die Anzahl der vollständigen Oscillationen (oder Wellenlängen), die seit dem Anfange der Bewegung des elastischen Körpers, der dadurch z. B. die Luft in ähnliche vibrirende Bewegungen versetzt, verflossen sind. Ist aber x die Entfernung eines dieser vibrirenden Lufttheilchen von jenem erregenden Körper, also auch, wenn wieder λ die Länge einer Luftwelle bezeichnet, $\frac{x}{\lambda}$ die Anzahl der Wellenlängen, die zwischen jenem erregenden Körper und dem Lufttheilchen enthalten sind, so wird die Gröſse $\left(\frac{t}{\tau}-\frac{x}{\lambda}\right)$ die Anzahl der Oscillationen bezeichnen, die verflossen sind, seitdem der Schall von dem erregenden Körper ausgegangen ist. Hat man also für die Oscillationsgeschwindigkeit des erregenden Körpers, wie zuvor, den Ausdruck

$$v = A \operatorname{Sin.} \frac{2\pi t}{\tau},$$

so wird man für die des Lufttheilchens haben

$$v = A \operatorname{Sin.} 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{x}{\lambda}\right),$$

wenn die Vibrationsintensität A dieselbe bleibt. Geht endlich von demselben erregenden Körper noch eine andere Welle aus, die hinter der gegenwärtigen um den Weg C oder um $\frac{C}{\lambda}$ Wellenlängen vor oder zurück ist, so wird man für die Oscillationsgeschwindigkeit des von dieser Welle erregten Lufttheilchens haben

$$v = A \,\text{Sin.}\, 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda} \pm \frac{C}{\lambda}\right).$$

Wir werden aber sogleich (in VI) sehn, dafs das Verhältnifs der beiden Gröfsen λ und τ ein constantes ist, so dafs, wenn man $\frac{\lambda}{\tau} = a$ setzt, die letzte Gleichung übergeht in

$$v = A \,\text{Sin.}\, \frac{2\pi}{\lambda} (at - x \pm C),$$

und ganz ebenso erhält man auch für die Amplitüde den Ausdruck

$$P'M' = -B \,\text{Cos.}\, \frac{2\pi}{\lambda} (at - x \pm C),$$

und diese zwei Gleichungen sind es, die uns im Folgenden vom gröfsten Nutzen seyn werden. Ihre Ableitung aus den ersten Gründen der Bewegung werden wir später (§. 14 u. f.) geben.

V. Was im Anfange dieses §. von der ganzen elastischen Platte gesagt worden ist, wird im Allgemeinen auch von jedem einzelnen Elemente derselben gelten. Auch die Schwingungen dieser Elemente, z. B. unendlich dünner Streifen der Platte, werden, wie jene des Pendels, alle in gleichen Zeiten vor sich gehn oder sie werden *isochron* seyn, obgleich die Amplitüde dieser Schwingungen (durch die Steifheit des Metalls, durch die Reibung, durch den Widerstand der Luft u. s. w.) mit der Zeit immer kleiner werden mufs, wie dieses auch durch Rechnung bestätigt wird und den darüber angestellten Experimenten vollkommen gemäfs ist. Hier bemerken wir nur noch, dafs, wenn diese Schwingungen andauern und dadurch ein bestimmtes Resultat (z. B. einen mit andern vergleichbaren Ton, nicht blofs ein unarticulirtes Geräusch) her-

vorbringen sollen, die Schwingungen aller einzelnen Elemente des tönenden Körpers in derselben Zeit vollendet werden oder *synchron* seyn müssen, was nur bei solchen Körpern statt hat, die in Beziehung auf die Elasticität ihrer Theile regelmäſsig und homogen gebildet sind.

Nehmen wir nun an, daſs eine solche Platte vor der Oeffnung einer mit Luft gefüllten Röhre (wie in der vorhergehenden Figur) ihre Schwingungen mache und daſs diese Schwingungen in der Richtung der Axe ACB dieser cylindrischen Röhre vor sich gehn. Bei jeder Schwingung der Platte wird die ihr nächste Luftschicht in der Röhre eine Verdichtung und bei der nächstfolgenden Schwingung wieder eine Verdünnung erfahren, und jede dieser Verdichtungen und Verdünnungen der ersten Luftschicht wird sich der zweiten Schicht, durch diese der dritten mittheilen u. s. w. Wenn aber eine in Ruhe begriffene elastische Kugel von einer anderen gleich groſsen elastischen Kugel gestoſsen wird, so erhält dadurch die erste die Geschwindigkeit der zweiten, während die zweite selbst in Ruhe tritt. Also würde auch jede dieser in dem Cylinder enthaltenen elastischen Luftschichten, sobald sie ihre von der vorhergehenden Schicht erhaltene Bewegung der nächstfolgenden mitgetheilt hat, in Ruhe zurücktreten, wenn sie nicht von einer neuen Einwirkung der vorhergehenden wiederholt in Bewegung gesetzt würde. Daraus folgt, daſs jede dieser Luftschichten durch die ihr vorhergehende alle Schwingungen der Platte nach der Reihe mitgetheilt erhält und zwar in derselben Ordnung, mit derselben Intensität und auch in gleichen Zeiten, da die Schwingungen der Platte selbst nach dem Vorhergehenden isochron sind. Jede dieser Luftschichten wird sich daher ganz so, wie die Platte selbst, bewegen, und die Formeln, die etwa für die Bewegung der Platte gefunden werden können, werden sofort auch für die Bewegung der Luftschichten gelten, denen jene Schwingungen der Platte mitgetheilt sind.

VI. Die Geschwindigkeit, mit welcher die einzelnen Elemente einer Welle während der Dauer einer Schwingung sich bewegen, ist verschieden nach den Orten, welche das Element zu verschiedenen Zeiten in seiner Welle einnimmt. Bewegt sich das Element, wie in der letzten Figur, in der

Curve AmCnB, so ist die Geschwindigkeit des Elements, nach der Richtung der Geraden ACB gezählt, in den Puncten A, C und B gleich Null, während sie in den in der Mitte von jenen liegenden Puncten m und n ihre gröfsten Werthe hat. Nicht so verhält es sich aber mit derjenigen Geschwindigkeit, mit welcher diese Wellen selbst in dem elastischen Medium, z. B. in der Luft, fortgepflanzt werden. Diese *Fortpflanzungsgeschwindigkeit*, die wir hier und künftig durch a bezeichnen wollen, ist unabhängig von jener Geschwindigkeit der einzelnen Elemente, so wie auch von der Gestalt und von der Amplitüde der Schwingungen, welche diese Elemente machen, sondern sie hängt allein von der Elasticität e und der Dichtigkeit d des fortpflanzenden Mittels ab. Schon NEWTON fand für diese Geschwindigkeit a den Ausdruck

$$a = \sqrt{\frac{e}{d}}.$$

So lange also in einem bestimmten Raume die Elasticität und die Dichte der Luft unveränderlich ist oder sehr nahe als unveränderlich angenommen werden kann, so lange ist auch in dieser Luft die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen oder so lange ist auch die *Geschwindigkeit des Schalles* constant. In der atmosphärischen Luft, an der Oberfläche der Erde, beträgt diese Geschwindigkeit des Schalls ungefähr 337,5 Meter in einer Secunde; im Oxygengas nur 317, im Hydrogengas aber 1270 M. Schneller noch pflanzt sich der Schall in festen Körpern fort, im Silber z. B. durch 3037, im Messing durch 3610, im Kupfer durch 4050 Meter, und in einigen Holzarten beträgt diese Geschwindigkeit sogar 5000 bis 6000 Meter in einer Secunde[1].

---

1 Wenn die Temperatur der Luft dieselbe bleibt, so wird die Dichtigkeit der Luft dem auf derselben lastenden Drucke (der Barometerhöhe) proportional seyn. Da aber nach dem bekannten Mariotte'schen Gesetze die Elasticitat der Luft, bei gleicher Temperatur, ihrer Dichte proportional ist, so wird durch den Barometerstand die Geschwindigkeit des Schalls nicht geändert. Das Thermometer aber hat auf diese Geschwindigkeit Einflufs. Aendert sich nämlich die Temperatur der Luft um t Grade C., so wird ein gegebenes Volumen A (für 0° Therm.) sich ausdehnen und in das Volumen $a = A + mt.A$ übergehn, wo m ein constanter Factor ist, der die Aenderung des Volumen Luft für einen Grad des Thermometers bezeichnet. Da nun

Da aber nach dem Vorhergehenden jede Welle in derselben Zeit zurückgelegt wird, in welcher der schwingende Körper, der diese Wellen in der Luft erzeugt, eine ganze Schwingung vollendet, so hat man, wenn τ die Zeit einer ganzen Schwingung des tönenden Körpers bezeichnet, für die Länge λ der Welle den Ausdruck

$$\lambda = a\tau,$$

wo also für die Luft a = 337,5 Meter = 1038,97 Par. Fufs ist.

In der That, nach der in §. 1. gegebenen Darstellung hat jedes Element des vibrirenden Körpers seine Schwingung in der Zeit τ vollendet, so dafs es am Ende der Zeit $T + \tau$ wieder dieselbe Lage, wie am Ende der Zeit T einnimmt. Aber in derselben Zwischenzeit τ ist auch die Luftwelle durch ihre ganze Länge λ gegangen, und da, für jede gleichförmige Bewegung, der durchlaufene Raum gleich dem Producte der Zeit τ in die Geschwindigkeit (das heifst, in den während einer Secunde durchlaufenen Raum) ist, so ist auch $\lambda = a\tau$, wie zuvor.

VII. Um die Längen dieser Wellen in der Luft einiger-

---

bei gleichen Massen sich die Dichten verhalten, wie verkehrt die Volumina, so ist, wenn D die ursprüngliche und d die veränderte Dichte der Luft ist,

$$\frac{d}{D} = \frac{A}{a} \text{ oder } d = \frac{D}{1 + mt},$$

wo $m = \frac{1}{266,67} = 0,00375$ ist. Demnach erhält man für den corrigirten Ausdruck der Geschwindigkeit des Schalls in der Luft

$$a = 337,5 \sqrt{1 + mt}.$$

Bemerken wir noch, dafs die durch Newton's Theorie aufgestellte Formel $a = \sqrt{\frac{e}{d}(1 + mt)}$, da sie mit den Beobachtungen nicht genau übereinstimmte, durch Laplace eine wesentliche Verbesserung erhalten hat, nach welcher sie folgende ist:

$$a = \sqrt{\frac{e}{d}(1 + mt) \cdot \frac{c'}{c}},$$

wo c die specifische Wärme der Luft für einen constanten Druck und c' dieselbe für ein constantes Volumen bezeichnet. Vergl. Art. *Schall* S. 413, wo die Geschwindigkeiten des Schalles bei verschiedenen Temperaturen genauer angegeben sind.

maſsen kennen zu lernen, bemerken wir, daſs schallende Körper, wenn sie uns noch hörbar werden sollen, nicht weniger als 32 und nicht mehr als 8200 Schwingungen in einer Secunde machen dürfen, wo dann in jenem Falle die tiefsten und in diesem die höchsten uns noch hörbaren Töne entstehn. Substituirt man also in der Formel

$$\lambda = 1038{,}97\,\tau$$

für τ die Zahlen $\frac{1}{32}$ und $\frac{1}{8200}$, so erhält man für die Länge des

tiefsten Tons $\lambda = 32{,}3$ Par. Fuſs

und für die des höchsten $\lambda = 0{,}126$ Fuſs oder nahe 1,5 Zoll. Hundert Schwingungen in einer Secunde geben die Länge der Welle 10,4 Fuſs. Im Wasser, wo diese Wellen dem Auge am besten sichtbar werden, sind dieselben über viermal länger. Da nämlich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit a im Wasser nahe 4400 Fuſs in einer Secunde beträgt, so hat man

$$\lambda = 4400\,\tau,$$

so daſs man also für

$$\tau = \frac{1}{32} \text{ erhält } \lambda = 137 \text{ Fuſs}$$

$$\tau = \frac{1}{100} \;\ldots\; \lambda = 44{,}0 \text{ —}$$

$$\tau = \frac{1}{8200} \;\ldots\; \lambda = 0{,}54 \text{ —}$$

VIII. Die ersten entscheidenden Beobachtungen über die Geschwindigkeit des Schalls in der Luft wurden von den Mitgliedern der Par. Akademie im J. 1738 zwischen Montlhéry und Montmartre in einer Distanz von 29000 Meter angestellt. An den beiden Enden dieser Basis waren Kanonen aufgestellt, deren Blitz und Schall aus mehrern Zwischenpuncten beobachtet wurden. Die Beobachter fanden auf diese Weise nicht nur die Gröſse dieser Geschwindigkeit, sondern auch die Gleichförmigkeit derselben für alle Entfernungen von dem schallenden Körper und seine Unabhängigkeit von der Witterung, so wie von dem Zustande des Barometers. Für die Temperatur der Luft fanden sie die oben angeführte Correction $(1 + m\,t)$, und ebenso bestätigte sich der Einfluſs des Windes auf den Werth von a. Ist nämlich φ der Winkel, den die

Richtung des Windes mit jener des Schalls macht, und bezeichnet A die Geschwindigkeit des Windes, so muſs man zu der beobachteten Geschwindigkeit des Schalls noch die Gröſse A Cos. φ addiren oder von ihr subtrahiren, wenn der Wind dieselbe oder eine mit dem Schalle entgegengesetzte Richtung hat. Ueber die Fortpflanzung des Schalls in *festen Körpern* hat besonders Biot im Groſsen an den Röhren der Wasserleitungen in Paris und über die im *Wasser* haben Sturm und Colladon am Genfersee Versuche angestellt[1].

IX. Poisson hat durch Analyse einen sehr einfachen Ausdruck gefunden zwischen der Anzahl n der Längenschwingungen einer dünnen und schmalen Platte während einer Secunde und der Geschwindigkeit a der Fortpflanzung dieser Schwingungen im Innern der Platte. Bezeichnet nämlich l die Länge dieser Platte, so ist

$$a = \frac{2l}{n},$$

und da man die Gröſsen n und l durch unmittelbare Messung finden kann, so erhält man dadurch den gesuchten Werth von a. Laplace hat noch einen allgemeinen Ausdruck gefunden, der die Fortpflanzungsgeschwindigkeit a für alle feste und flüssige Körper giebt. Bezeichnet nämlich g = 9,809 Meter die Intensität der Schwere und ε diejenige Gröſse, um welche sich eine aus der Masse des Körpers gebildete Säule, deren Höhe die Einheit des Längenmaſses ist, unter dem Einfluſs eines dem Gewicht dieser Säule gleichen Zugs oder Drucks verlängert oder verkürzt, so hat man

$$a = \sqrt{\frac{g}{\varepsilon}}.$$

Für Wasser z. B. hat man $\varepsilon = 0{,}0000048$, also auch $\frac{g}{\varepsilon} = 2043540$, wovon die Quadratwurzel nahe gleich 1430 Met. = 4400 Par. Fuſs ist, wie zuvor.

X. Wenn man nahe unter der Oberfläche eines ruhigen Wassers eine dahin gebrachte Glocke in Bewegung setzt (läutet),

---

1 Vergl. Art. *Schall*. Bd. VIII. S. 390, wo alle diese Gegenstände ausführlich erörtert sind.

so hört das Ohr aufser dem Wasser den Schall sehr gut, so lange es der Glocke selbst noch nahe steht; aber der Schall nimmt schnell ab, wenn sich das Ohr parallel zur Oberfläche des Wassers von der Glocke entfernt, und in der Distanz von 250 Meter hört man aufser dem Wasser die Glocke nicht mehr, obschon ein Ohr in derselben Distanz, aber *unter* dem Wasserspiegel, sie noch recht gut hören würde. Die Erklärung dieser Erscheinung liegt darin, dafs die Schallstrahlen, welche von der Glocke kommen und die untere Fläche des Wasserspiegels treffen, von dieser Fläche desto stärker zurückgeworfen werden, je kleiner der Winkel ist, den diese Strahlen mit dem Wasserspiegel bilden, und dafs sie *alle* zurückgeworfen werden, wenn dieser mit der Entfernung von der Glocke natürlich abnehmende Winkel eine gewisse Grenze erreicht hat. Wir werden später eine ganz analoge Erscheinung auch bei den *Lichtwellen* finden.

XI. Noch wollen wir eine andere Eigenschaft der unter dem Wasser tönenden Körper erwähnen. Der Ton einer schwingenden, untergetauchten Glocke ist kurz und an seinem Ende scharf abgeschnitten, nicht nachdröhnend, wie in der Luft. Man glaubte die Ursache dieser Erscheinung in der gröfsern Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalls im Wasser suchen zu müssen, allein diese Geschwindigkeit kann keinen Einflufs auf die *Dauer* des Tons haben. Die Dauer eines Tons ist die Zeit, die zwischen der Ankunft der ersten und der letzten Welle der Luft in unserm Gehöre vorübergeht. Da aber alle Wellen von gleicher Länge λ sind, so ist diese Zeit gleich der Anzahl n der Wellen, multiplicirt durch λ und dividirt durch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit a, oder diese Dauer ist

$$\Theta = \frac{n\lambda}{a}.$$

Aber da nach dem Vorhergehenden $\lambda = a\tau$ ist, so hat man auch

$$\Theta = n\tau,$$

das heifst: die Dauer des Tons in irgend einer elastischen Flüssigkeit ist gleich der Dauer aller Schwingungen des in dieser Flüssigkeit vibrirenden Körpers. Dasselbe folgt auch noch einfacher daraus, dafs die erste und die letzte Welle

eines Tons dieselbe Zeit gebrauchen, um von dem schallenden Körper bis zu unserm Ohre zu gelangen, und daſs also auch die Zwischenzeit ihrer Ankunft bei dem Ohre gleich seyn muſs der Zwischenzeit ihres Abgangs von dem schallenden Körper. Jene plötzliche Abnahme des Tons scheint vielmehr aus der schnelleren Schwächung der Vibrationen des schallenden Körpers selbst zu entspringen, die aus der gröſsern Dichte des Mittels (des Wassers, im Gegensatze mit der Luft) folgt, in welchem jene Vibrationen statt haben. Sturm und Colladon haben auch die Bemerkung gemacht, daſs irgend eine Agitation des Wassers auf seiner Oberfläche keinen Einfluſs, weder auf die Geschwindigkeit, noch auf die Intensität des Tons, hat, wenn derselbe unter dem Wasser entstanden ist, daſs aber diese Intensität sehr merklich geschwächt werde, wenn man z. B. eine Tafel von Holz oder dergleichen zwischen den Beobachter über und die Glocke unter dem Wasser stellt, was bekanntlich in der freien Luft nicht statt hat.

3) Transversal-Schwingungen.

Wir gehn nun nach diesen vorläufigen allgemeinen Betrachtungen zu der näheren Beschreibung der verschiedenen Schwingungsarten über, indem wir uns wieder auf das bereits im Art. *Schall* Gesagte beziehn. Eine homogene, cylindrische Saite von Metall habe die Länge l, den Radius r ihres auf diese Länge kreisförmigen Durchschnitts, das Gewicht p, und sie sey an dem einen Ende befestigt, während sie an dem andern mit dem Gewichte P belastet ist, welches Gewicht bei senkrecht hängenden Saiten unmittelbar an ihnen befestigt, bei horizontalen aber über eine Rolle geführt seyn mag. Wird diese Saite aus ihrer Lage des Gleichgewichts seitwärts entfernt und dann wieder sich selbst überlassen, so geräth sie in Transversalschwingungen der oben beschriebenen Art. Ist dann n die Anzahl dieser Schwingungen, die während einer Secunde statt haben, so erhält man, wie schon Newton gezeigt hat, den Werth von n durch die Gleichung

$$n = \sqrt{\frac{gP}{lp}},$$

wo wieder g = 9,809 Meter ist. Bezeichnet ferner d die Dichtigkeit der Masse, aus welcher die Saite besteht, so hat

man bekanntlich für das cylindrische Volumen $\pi r^2 l$, also auch für das Gewicht derselben $p = \pi r^2 l d$, wo $\pi = 3,14159..$ ist, so daſs man daher der obigen Gleichung auch die folgende Gestalt geben kann[1]:

$$n = \frac{1}{rl} \sqrt{\frac{gP}{\pi d}}.$$

Wir werden diese Formel weiter unten (§. 15. Anmerkung IV.) beweisen. Bei zwei Saiten von derselben Dichtigkeit verhalten sich also die Schwingungszahlen verkehrt, wie ihre Längen und wie ihre Durchmesser, und gerade wie die Quadratwurzeln ihrer Spannungen. Dieser aus der Theorie abgeleitete Ausdruck stimmt mit den Beobachtungen vollkommen überein, und wir bemerken nur noch, daſs der Ton, den diese und überhaupt alle Schwingungen hervorbringen, desto tiefer wird, je kleiner n ist, so daſs die höchsten Töne zu den gröſsten Werthen von n, d. h. zu den schnellsten Schwingungen gehören.

I. Jede solche gespannte Saite läſst sich (durch Unterlagen oder sogenannte *Stege*, wie bei der Violine) in 2, 3, 4.. gleiche Theile theilen, und dann ist auch die Anzahl der Schwingungen dieser Theile 2-, 3-, 4..mal gröſser, als bei der ganzen Saite, oder die Vibrationen dieser Theile sind 2-, 3-, 4..mal geschwinder als die der ganzen Saite. Ja diese verschiedenen partiellen Schwingungen können, und müssen sogar, alle unter einander zu gleicher Zeit statt haben, so daſs, auch ohne jene Unterlagen, die Schwingung der ganzen Saite immer von mehrern solcher Partialschwingungen begleitet ist, die alle coexistiren und sich jener Hauptschwingung anreihen oder unterordnen. Ein Bild von einem solchen Schwingungssysteme giebt die Zeichnung, wo die Hauptschwingung der Saite AB von zwei Partialschwingungen ihrer halben und zugleich von drei Partialschwingungen ihrer dritten Theile begleitet ist. Soll bei diesen und überhaupt bei allen Schwingungen elastischer Körper ein eigentlicher, mit andern scharf vergleichbarer *Ton* (nicht ein bloſses Geräusch) entstehn, so müssen alle diese Nebenschwingungen mit der Hauptschwingung *synchron* seyn, das heiſst, in der Zeit einer ganzen Schwingung der ganzen Saite muſs auch jeder der

Fig. 173.

1 Vergl. Art. *Schall.* Bd. VIII. S. 197.

erwähnten Theile derselben eine Anzahl von ganzen Schwingungen vollendet haben. Diejenigen Puncte einer Saite, die entweder durch künstliche Mittel (durch die erwähnten Stege u. s. w.) unbeweglich gemacht werden, oder die (wegen der Coincidenz des Anfangs- und Endpunctes zweier nächsten Partialschwingungen) schon von selbst in Beziehung auf diese Partialschwingungen unbeweglich sind, werden *Knoten* genannt. Man erkennt die letzte Gattung von Knoten bekanntlich durch aufgelegte leichte Papierstückchen.

II. Dasselbe gilt auch von den Transversalschwingungen der elastischen *Platten*. Wenn eine solche Platte an einem ihrer Enden befestigt und an dem andern aus der Lage ihres Gleichgewichts gebracht wird, so werden auch die einzelnen Elemente der Platte ihre Lage auf die sie zunächst umgebenden Elemente ändern, sie werden dichter an oder weiter von einander rücken, und wenn die Ursache dieser Störung aufhört, so wird die Elasticität der Platte wieder den frühern Zustand der Platte herzustellen suchen. Dann wird also jedes einzelne Element um seinen Ruhepunct aufeinanderfolgende kleine Schwingungen machen, die unter sich isochron sind, wie die des Pendels, und die ganze Platte selbst wird ähnliche Schwingungen machen, die aus jenen Pendelschwingungen der einzelnen Elemente zusammengesetzt und auch mit denselben isochron seyn werden, wenn die Hauptschwingungen der Platten überhaupt andauern und einen bestimmten *Ton* hervorbringen sollen. Bei langen und schmalen elastischen Platten, die an einem ihrer schmalen Enden fest sind, verhält sich die Anzahl der Schwingungen wie verkehrt das Quadrat der vibrirenden Länge. Uebrigens wird auch jede Schwingung der ganzen Platten von mehrern Partialschwingungen der einzelnen Theile derselben begleitet und man bemerkt die Grenzen dieser Theile oder die *Knotenlinien* der Platten, wenn man die letzteren, ehe man sie ihren Schwingungen überläfst, mit feinem Sande oder leichtem Staube bestreut.

III. Die Transversalschwingungen der elastischen *Stäbe* zeigen dieselben Erscheinungen der Partialschwingungen und der Knoten. Ist l die Länge, ϱ die Steifheit, δ die Dichte und e die Dicke des Stabs oder eines langen und schmalen Streifens, so ist die Anzahl N seiner Transversalschwingungen durch die Gleichung gegeben

$$N = \frac{ae}{l^2}\sqrt{\frac{g\varrho}{\delta}},$$

wo wieder g die Schwere und a eine für jeden Stab und für jedes besondere Knotenliniensystem constante Gröſse bezeichnet[1]. Bei Stäben aus demselben Metall, die bloſs durch ihre Länge und Dicke verschieden sind, ist also das Verhältniſs der Anzahl der Schwingungen wie ihre Dicke und verkehrt wie das Quadrat ihrer Länge, so daſs die Breite derselben, wenn sie überhaupt nur klein ist, keinen Einfluſs auf N hat. Bei gleicher Dicke geben die längern Stäbe ein kleineres N oder einen tiefern Ton und bei gleicher Länge geben die dickeren Stäbe ein gröſseres N oder einen höheren Ton.

4) Longitudinalschwingungen.

Diese Schwingungen entstehn, wie bereits erwähnt, wenn man eine gespannte Saite oder einen Stab seiner Länge nach mit einem andern Körper, z. B. mit einem mit Colophonium bestreuten Tuche streicht, und die Veränderungen, die dadurch in der Saite oder in dem Stabe erzeugt werden, bestehn aus periodisch abwechselnden Verdichtungen und Verdünnungen, aus gegenseitigen Annäherungen und Entfernungen der Elemente, aus welchen die Saite oder der Stab zusammengesetzt ist. Die Töne, welche durch die Längenschwingungen bei derselben Saite erzeugt werden, sind immer viel höher, als die der Transversalschwingungen. Die Fortpflanzung der Töne schallender Körper in der Luft geschieht nur durch solche Längenschwingungen, beruht also auf abwechselnden Verdünnungen und Verdichtungen der Luftschichten, daher denn auch für diese Luftwellen die Ordinaten PM der Curve AmCnB nicht sowohl die Höhe und Tiefe der Elemente über der Mittellinie ACB, als vielmehr die verschiedene Annäherung oder Entfernung dieser Elemente für verschiedene Puncte der Luftwelle anzeigen. Um uns davon noch auf eine andere Weise ein deutliches Bild zu machen, denken wir uns eine vibrirende Platte am Eingange a′b′ einer hohlen, cylindrischen, mit Luft gefüllten Röhre a′xyb′. Die in dieser Röhre enthaltene Luft kann man sich in unendlich viele, sehr dünne

Fig. 172.

Fig. 174.

1 Vergl. Art. *Schall.* Bd. VIII. S. 200.

und einander parallele Luftschichten getheilt vorstellen. Sey ab die anfängliche Lage oder die Gleichgewichtslage der elastischen Platte und seyen a′b′ und a″b″ die beiden äufsersten Grenzen ihrer Schwingungen. Wenn diese Platte in ihrer ersten Schwingung von a′b′ nach a″b″ geht, so wird in jedem Puncte dieses Weges die der Platte nächstliegende Luftschicht eine Verdichtung erleiden, sie wird sich, in Folge ihrer grofsen Compressibilität, schnell zusammenziehn, aber da durch ebendiese Zusammenziehung ihre Elasticität vermehrt ist, so wird sie auch gleich darauf durch die Wirkung dieser Elasticität ihren vorigen Raum wieder einnehmen und dadurch die nächstfolgende Luftschicht zusammendrücken. Diese zweite Schicht wird, nachdem sie der elastischen Kraft der ersten einen Augenblick nachgegeben, sich verdichtet und dadurch ihre eigne Elasticität vermehrt hat, ganz auf dieselbe Weise, wie zuvor die erste, auf die nächstfolgende dritte Schicht wirken u. s. w., so dafs also alle diese auf einander folgenden Schichten nach der Reihe eine Verdichtung und gleich darauf wieder einen Zurückgang auf ihren frühern Zustand erfahren, und Alles wird sich in dem Innern des Cylinders so verhalten, als ob eine unendlich dünne Luftschicht in dieser Röhre, parallel mit der Axe dieses Cylinders, sich bewegte und während dieser Bewegung abwechselnde Compressionen und Dilatationen erhielte. Geht dann die schwingende Platte, wenn sie ihre eine Grenze a″b″ erreicht hat, wieder zurück nach a′b′, so wird die ihr nächste Luftschicht eine Dilatation erhalten, die sich, ganz analog mit jenen Compressionen, den folgenden Luftschichten nach der Reihe mittheilt. Da aber das Gesagte nicht blofs von dem *ganzen* Wege a′a″ oder a″a′ der Platte, sondern auch von jedem einzelnen Puncte dieses Weges gilt, so werden eigentlich, während die Platte von a′ nach a″ vorwärts geht, eine unzählige Menge solcher Verdichtungen der Luftschichten und, während die Platte wieder von a″ nach a′ zurückgeht, ebenso viele Verdünnungen dieser Schichten erfolgen. Alle jene elementaren Verdichtungen zusammengenommen werden die eine Hälfte der *ganzen Welle* a″A geben, wenn jene elementaren Verdichtungen in der Luft sich von a″ bis A fortgepflanzt haben, in der Zeit, während die Platte von a′ bis a″ gegangen ist. Wenn dann die Platte wieder rückwärts von a″ bis a′ geht, so werden die aus diesem

Rückgange der Platte entspringenden Dilatationen der Luftschichten sich ebenfalls durch denselben Raum, wie vorhin die Condensationen, fortpflanzen, oder diese Dilatationen werden sich über denselben Weg a″A erstrecken und die zweite Hälfte der *ganzen Welle* geben, die jetzt den Raum a″A einnimmt, während die erste oder condensirte Hälfte mit der erhaltenen gleichförmigen Geschwindigkeit einen ebenso grofsen Weg von A bis x zurückgelegt hat, so dafs also die Länge der ganzen Welle a″x in ihrer Mitte A die condensirte Hälfte Ax von der dilatirten Hälfte a″A scheidet. Da die durch die elastische Platte bewegte Luftschicht in derselben Zeit τ durch den Weg $a'' x = \lambda$ gegangen ist, in welcher die Platte eine Schwingung zurückgelegt hat, so ist auch, wenn a die Geschwindigkeit der Fortpflanzung jener Condensationen und Dilatationen der Luftschichten bezeichnet, $\lambda = a\tau$, wie zuvor. Bei den Längenschwingungen bewegen sich also die Elemente einer Saite oder eines elastischen Stabes parallel mit der Länge dieser Körper, während sie sich bei den Transversalschwingungen in einer auf die Länge dieser Körper senkrechten Richtung auf und ab bewegen.

I. Wie vorhin den mit Luft gefüllten Cylinder, so kann man sich auch eine tönende Saite durch auf ihre Länge senkrecht geführte Schnitte in unendlich dünne Schichten getheilt vorstellen. Bei den Längenschwingungen dieser Saiten wird dann eine Reihe aufeinanderfolgender Elemente vor- und rückwärts, nach der Richtung der Länge der Saite, bewegt und diese Elemente selbst werden einander näher gebracht oder weiter von einander entfernt. Hört dann die Einwirkung, welche diese Bewegung der Elemente verursacht hat, auf, so führt die Elasticität der Saite sie alle wieder zu dem vorigen Zustande des Gleichgewichtes zurück, und wenn diese periodischen Näherungen und Entfernungen der Elemente unter sich regelmäfsig und isochron sind, so entsteht das, was wir *Ton* nennen, während ein unregelmäfsiges Bewegen derselben nur ein *Geräusch* erzeugen kann.

II. Die einfachste Art dieser Längenschwingungen ist in der Zeichnung dargestellt. Hier haben alle Elemente oder alle jene auf die Länge der Saite senkrechten Schichten derselben eine gemeinschaftliche Bewegung nach den beiden Endpuncten

Fig. 175.

A und B der Saite. Wenn sie von A nach B gehn, so hat in A Dilatation, in B aber Condensation statt, und umgekehrt, wenn die Bewegung der Schichten von B nach A gerichtet ist, so ist in B Dilatation und in A Condensation. In beiden Fällen ist an den beiden Endpuncten A und B der Saite die Geschwindigkeit der Elemente gleich Null, weil in diesen Endpuncten die directe Bewegung in die retrograde übergeht, und in der Mitte zwischen den beiden Endpuncten ist diese Geschwindigkeit am gröſsten, während in dieser Mitte die Condensation oder Dilatation der Elemente ihren mittlern Werth (des Gleichgewichts) hat. Eine zweite, schon zusammengesetztere Art ist in der folgenden Zeichnung dargestellt. Hier theilt sich die Saite in zwei Theile, in welchen die Bewegungen der Elemente eine entgegengesetzte Richtung haben. Der Trennungspunct N der beiden Theile hat gar keine Bewegung und bildet daher einen *Knoten* der Saite, aber in diesem Puncte N ist zugleich die Condensation, so wie die darauf folgende Dilatation am gröſsten. Andere Verbindungen von mehreren Knoten sieht man in den folgenden Zeichnungen dargestellt. Wenn eine solche Saite mit mehrern Knoten in Längenschwingungen versetzt wird, so entstehn in jedem zwischen zwei nächsten Knoten enthaltenen Theile der Saite Partialschwingungen, die sich der Schwingung der ganzen Saite coordiniren und mit der der letztern insofern isochron sind, als immer eine ganze Anzahl von Partialschwingungen auf eine Schwingung der ganzen Saite gehn muſs, wenn ein eigentlicher Ton entstehn soll.

Fig. 176.

Fig. 177. u. 178.

III. Aus der bloſsen Erklärung dieser beiden Arten von Schwingungen folgt schon, daſs die Elasticität der Saite auf die Längenschwingungen einen viel gröſsern Einfluſs haben muſs, als auf die Transversalschwingungen, da die Bewegung der Elemente nach der Richtung der Länge der Saite oder da ihre gegenseitigen Annäherungen und Entfernungen von einander gleichsam unmittelbar auf die Elasticität der Saite einwirken, während bei den Transversalschwingungen die Elemente einer jeden Welle gleichsam alle in derselben Zeit aus ihrer Gleichgewichtslage entfernt werden, ohne daſs dabei ihre Entfernungen unter einander eine beträchtliche Aenderung erleiden. Nennt man n' die Zahl der Längenschwingungen und n die Zahl der Transversalschwingungen einer und derselben

Saite in derselben Zeit, und heifst l die Länge der Saite und α die Verlängerung, welche diese Länge durch ihre Spannung (oder durch das zur Spannung an sie gehängte Gewicht) erleidet, so hat man nach Poisson's schöner Analyse, wie wir später streng beweisen werden (§. 15. Anmerk. IV.),

$$\frac{n'}{n} = \sqrt{\frac{l}{\alpha}}.$$

Dieser Ausdruck, den Poisson auf dem Wege der Theorie gefunden hat, wurde von Savart durch zahlreiche Versuche vollkommen bestätigt. Da übrigens α stets nur ein sehr kleiner Theil von der Länge l einer Saite ist, so sieht man, dafs n' viel gröfser als n seyn mufs oder dafs die Töne der Längenschwingungen viel höher als die der Transversalschwingungen sind, wie bereits oben gesagt worden ist. Dafs dünne Platten und Stäbe ebenfalls Längenschwingungen annehmen und dann ähnliche Knotenlinien, wie bei den Transversalschwingungen, zeigen können, ist bereits oben[1] gesagt worden. Auch bei diesen Stäben hat Poisson durch seine Analyse das Verhältnifs der Längenschwingungen n' zu den Transversalschwingungen n gegeben. Ist nämlich l die Länge des elastischen Stabes und e die Dicke desselben, so hat man für cylindrische Stäbe[2]

$$\frac{n}{n'} = 1,7806 \frac{e}{l}$$

und für Parallelepipeden oder sogenannte viereckige Stangen

$$\frac{n}{n'} = 2,0561 \frac{e}{l}.$$

Auch diese Formeln hat Savart durch seine Experimente bewährt gefunden. Dieses gab zugleich ein bequemes Mittel, die Geschwindigkeit der Fortpflanzung des Schalls in verschiedenen festen Körpern zu bestimmen. Nennt man a die Geschwindigkeit des Schalls in der Luft und m den bestimmten Ton einer Pfeife, deren Länge l ist, so hat man

$$a = ml.$$

Ist aber a' die Geschwindigkeit der Fortpflanzung des Schalls,

1 S. Art. *Schall.* Bd. VIII. S. 202.

2 Ebend. S. 213.

z. B. in einem Metalle, und ist m' der bestimmte Ton, den ein dünner Stab von diesem Metalle, dessen Länge l' ist, giebt, so hat man ebenso

$$a' = m' l',$$

also ist auch

$$\frac{a'}{a} = \frac{m' l'}{m l}.$$

So giebt z. B. ein Stab von Silber, dessen Länge 2 Fuſs ist, wenn er in seiner Mitte aufgehängt wird, den Ton $m' = re_6$ oder $m' = 36$, wie wir sogleich in §. 9. sehn werden. Eine an beiden Enden offene cylindrische Röhre als Pfeife von derselben Länge aber giebt den Ton $m = ut_3$ oder $m = 4$, also ist auch

$$\frac{a'}{a} = \frac{m'}{m} = \frac{36}{4} = 9$$

oder die Geschwindigkeit der Fortpflanzung des Schalls im Silber ist neunmal gröſser, als in der Luft, wie auch schon oben (§. 2.) gesagt worden ist. Uebrigens werden wir später sehn, daſs bei den Vibrationen der Saiten, Stäbe, Platten u. s. w. die Längen- und Transversalschwingungen und selbst meistens die drehenden Schwingungen *alle zu gleicher Zeit* bestehn und daſs sie von einander unabhängig sind, ohne daſs die eine von der andern gestört oder geändert wird, und daſs sie im Grunde alle *demselben Gesetze* folgen, welches letztere für diese verschiedenen Schwingungsarten bloſs von der Masse, der Dicke und von der Spannung der Saite u. s. w. modificirt wird. (Vergl. §. 14.)

5) Schwingungen der Körper von gegebener Gestalt.

Wenn man einen soliden Körper, z. B. eine dicke Metallplatte, eine Glocke u. s. w., in schwingende Bewegung setzt, so bemerkt man auf der Oberfläche derselben im Allgemeinen zwei Gattungen von Vibrationen; die einen gehn in einer zur Oberfläche des Körpers senkrechten Richtung vor sich, die andern haben in der diese Oberfläche tangirenden Ebene statt, die Richtungen dieser beiden Schwingungen sind also unter sich vertical. Man erkennt diese beiden Schwingungen

sehr leicht, wie bei den vibrirenden Platten, wenn man die Oberfläche der Körper mit einem feinen Staube bedeckt. Dann sieht man bei den ersten der erwähnten Schwingungen den Staub sich mehr oder weniger über die Oberfläche des Körpers erheben und auf derselben gleichsam springen oder tanzen, während er bei den zweiten Schwingungen sich zwar auch und oft sehr schnell bewegt, aber ohne dabei die Oberfläche des Körpers zu verlassen, auf welcher er nur hin und wieder zu gleiten scheint. Beide Bewegungen haben ihre eigenen Knotenlinien, die sich aber oft sehr unter einander mischen, so daſs sie schwer zu trennen sind. Wahrscheinlich giebt es auch noch mehrere andere Schwingungsarten, die zwischen jenen beiden in der Mitte liegen und daher eine mehr oder weniger gegen die tangirende Ebene des Körpers in jedem seiner Puncte geneigte Richtung haben. Vielleicht sind diese sogar in unendlicher Anzahl vorhanden, aber sie mögen nicht sowohl der Oberfläche, als vielmehr den inneren Theilen der Körper angehören.

6) Sphärische Wellen.

Wenn man von den Wellen einer vibrirenden Saite oder einer in einer Röhre eingeschlossenen Luftschicht zu denjenigen Wellen übergeht, die in einem nach allen Seiten unbegrenzten Luftraume durch die Erschütterung irgend eines mittlern Puncts dieses Raumes entstehn, so kann man sich diesen Punct als eine kleine Kugel vorstellen, die abwechselnd schnelle Condensationen und Dilatationen nach allen ihren Richtungen erhält und die daher auch diese Bewegungen nach allen Richtungen von ihrem Mittelpuncte aus fortpflanzt. Die Geschwindigkeit dieser Fortpflanzung bleibt in allen Entfernungen von dem Mittelpuncte der Kugel dieselbe, so lange die Elasticität der die Kugel umgebenden Luft dieselbe bleibt; auch die Länge λ jeder solchen sphärischen Welle (die jetzt die Gestalt einer Kugelschale annimmt) bleibt dieselbe, nur wird die *Amplitüde* dieser Welle immer abnehmen, d. h. die gröſsten Ordinaten PM, die zu den Puncten m und n gehören, werden immer kleiner werden, je weiter die Welle fortschreitet oder je gröſser der Halbmesser jener Kugelschale wird. Diese Ordinaten drücken aber die verschiedene Geschwindigkeit der einzelnen Elemente einer Welle aus (die man daher

Fig. 172.

von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der ganzen Welle immer wohl zu unterscheiden hat), und es ist klar, daſs diese Geschwindigkeit der einzelnen Elemente abnehmen muſs, wenn sich die Kraft, welche die Vibration der Luft hervorbringt, über eine immer gröſsere Luftkugel, also über eine gröſsere Masse verbreitet, welche jene Kraft in Bewegung setzen soll.

7) Intensität des Schalles.

Von dieser Amplitüde (oder Höhe) der Welle hängt aber die Stärke (oder *Intensität*) des Tons ab, und diese Intensität verhält sich im freien Luftraume, wie verkehrt das Quadrat der Entfernung von dem schallenden Körper, also wie verkehrt das Quadrat des Halbmessers jeder Kugelschale, wenn sie dem Organ unsers Gehörs begegnet. Nicht so ist es, wenn der Schall durch die Luft in cylindrischen Röhren oder durch feste Körper fortgepflanzt wird. Hier bleibt die Intensität des Schalles, also auch die Amplitüde der Luftwelle *constant*, weil die Luftschichten in der Röhre immer dieselbe Gröſse haben, nicht aber, wie bei jenen concentrischen Kugelschalen, an Masse so schnell anwachsen, wie dieses Alles auch den darüber angestellten Experimenten vollkommen gemäſs ist.

8) Dauer, Klang und Accent des Tons.

Die *Dauer* eines Tons, d. h. die Zeit, während welcher er das Gehör afficirt, hängt von der Dauer der Vibrationen des tönenden Körpers ab. Wenn ein Schlag auf einen elastischen Stab diesen sehr lange Zeit hindurch in Schwingungen erhält, so wird auch die Dauer des durch den Stab hervorgebrachten Tons sehr lang seyn, so wie auch diese Dauer sogleich unterbrochen und aufgehoben wird, wenn man durch Berührung des Stabes mit der Hand oder mit einem weichen Tuche die Schwingungen desselben zerstört. Durch *Klang* (*timbre*) eines Tons wird von uns der Unterschied bezeichnet, den wir bemerken, wenn *derselbe* Ton durch verschiedene Instrumente erzeugt wird. So ist z. B. der Ton a der dritten Saite der Violine für unser Gehör ein ganz anderer, als derselbe Ton a, wenn er durch die Flöte oder durch das Fortepiano hervorgebracht wird, obschon die Höhe aller dieser Töne genau dieselbe bleibt. Die Ursache dieses Unterschieds ist

wahrscheinlich in den secundären Schwingungen zu suchen, welche jeden Hauptton begleiten. Noch weniger bekannt sind uns die Ursachen des *Accents* der Töne, die der menschlichen Stimme bei der Rede und dem Gesang eigenthümlich sind und die wohl in der Organisation unserer Stimmwerkzeuge liegen mögen.

9) Höhe der Töne.

Der Ton ist desto höher, je gröfser die Anzahl der Schwingungen ist, die der tönende Körper in einer bestimmten Zeit zurücklegt. Es ist bereits oben gesagt worden, dafs die schallenden Körper, wenn sie uns noch hörbar seyn sollen, nicht weniger als 32 und nicht mehr als 8200 Schwingungen in einer Secunde machen dürfen. Jener tiefste Ton ist derjenige, der von der gröfsten Orgelpfeife, deren Länge $\lambda = 32$ Fufs ist, hervorgebracht wird, wie man findet, wenn man in der Gleichung des §. 2

$$\lambda = 1038{,}97\,\tau$$

die Gröfse $\tau = \frac{1}{32}$ Sec. setzt; für $\tau = \frac{1}{64}$ erhält man $\lambda = 16$ Fufs, für $\tau = \frac{1}{128}$ ist $\lambda = 8$ Fufs nahe u. s. w., und so ist die Tafel entstanden, die bereits oben[1] mitgetheilt worden ist. Es sey uns erlaubt, die dort erwähnte Tonleiter hier zur kurzen Uebersicht noch einmal aufzustellen.

Namen der Töne	ut	re	mi	fa	sol	la	si	ut_2 ..
Bezeichnung der Töne	c	d	e	f	g	a	h	c_2 ..
Verhältnifs der Saitenlänge	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$ ..
Verhältnifs der Schwingungszahlen	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2 ..

Für die nächst höheren Octaven sind die Bezeichnungen dieser Töne in derselben Ordnung c_2, d_2, e_2 und für die dritte c_3, d_3, e_3 u. s. w. Um aber die Verhältnisse der Schwingungszahlen N zu finden, die zu diesen höhern Tönen gehören, hat man allgemein für die n^{te} Octave, wenn A die Schwingungszahl der vorigen Tafel bezeichnet,

$$N = A \,.\, 2^{n-1}.$$

---

1 S. Art. *Schall.* Bd. VIII. S. 293.

So erhält man

$$\begin{aligned} &sol_2 \text{ oder } g_2 = \tfrac{3}{2}.2 = 3 \\ &mi_3 \text{ oder } e_3 = \tfrac{5}{4}.2^2 = 5 \\ &si_4 \text{ oder } h_4 = \tfrac{15}{8}.2^3 = 15 \\ &fa_5 \text{ oder } f_5 = \tfrac{4}{3}.2^4 = 21{,}333 \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Ist aber umgekehrt die Zahl N gegeben, und sucht man die Bezeichnung des Tons, der zu dieser Zahl gehört, so dividirt man diese Zahl n mal durch 2, bis man zu einer der sieben Zahlen der letzten Reihe in der vorhergehenden Tafel gelangt, und dann ist die gesuchte Bezeichnung gleich A_{n+1}.

Ist z. B. die Zahl $N = 36$ gegeben, so hat man die folgenden Halbirungen

$$18;\ 9;\ \tfrac{9}{2};\ \tfrac{9}{4};\ \tfrac{9}{8},$$

also $n = 5$ Divisionen, so dafs also

$$36 = re_6 = d_6 \text{ ist.}$$

Ebenso giebt die Zahl 20 vier Halbirungen

$$10;\ 5;\ \tfrac{5}{2};\ \tfrac{5}{4},$$

so dafs also $20 = mi_5 = e_5$ ist, und ebenso ist $12 = sol_4 = g_4$ und $15 = si_4 = h_4$ u. s. w.

Sucht man dann die Zahl der Schwingungen dieser Töne in einer Secunde, so darf man nur ihre Zahl N durch 32 oder durch die Schwingungszahl des tiefsten Tons multipliciren. So giebt

$sol_2 = g_2$ . . . 3mal 32 oder 96 Schwingungen
$mi_3 = e_3$ . . . 5mal 32 oder 160 — —
$si_4 = h_4$ . . . 15mal 32 oder 480 — — u. s. w.

10) Coincidenz der Töne.

Zu dem, was bereits[1] über die Coincidenz der Töne bemerkt worden ist, kann hier noch analog mit dem, was künftig von der Interferenz des Lichts gesagt werden soll, beigefügt werden, dafs die Coincidenz zweier Töne von verschiedener Höhe nicht nur, wenn beide Töne länger dauern, zu Zeiten eine Schwächung der Intensität, sondern auch einen neuen hervorbringen kann, der viel tiefer ist, als jeder der

1 S. Art. *Schall.* Bd. VIII. S. 302. 315.

beiden einfachen. Schon der berühmte Musiker TARTINI hatte bemerkt, dafs der Ton sol_4 mit 384 Schwingungen in einer Secunde, wenn er mit dem Ton ut_5 mit 512 Schwingungen in einer Secunde zusammenfällt, den viel tiefern Ton ut_3 von 256 Schwingungen erzeugt. Die Schwingungen jener beiden Töne verhalten sich wie 384 zu 512 oder wie 3 zu 4, woraus daher folgt, dafs der erste sol_4 drei Schläge macht in derselben Zeit, in welcher der andere ut_5 vier Schläge vollendet, und dafs daher der 0., 3., 6., 9te.. Schlag des ersten zusammenfällt mit dem 0., 4., 8., 12ten.. des zweiten Tons. Die Doppelschläge, die aus diesem Zusammenfallen entstehn, werden also 3mal langsamer seyn, als sol_4, und 4mal langsamer, als ut_5, und daher wird der daraus entstehende Doppelton durch die Zahl 512 — 384, das heifst, durch die Zahl 128 oder durch ut_3 vorgestellt werden. Wir werden später bei der Theorie des Lichtes ebenfalls sehn, dafs die Coincidenz der Lichtwellen die Intensität des Lichtes vermindern, ja bis zur gänzlichen Umsichtbarkeit desselben aufheben kann, analog mit dem, was wir hier bei den Schallwellen bemerkt haben.

Das Vorhergehende wird als Einleitung zu der ihm so nahe verwandten Lehre von der Undulation des Lichtes genügen, wobei wir mehrere Erscheinungen, wie z. B. die von der Reflexion des Schalles oder von dem Echo u. a., ganz mit Stillschweigen übergangen haben, theils weil diese Gegenstände schon in den frühern Artikeln dieses Werkes, so weit sie den Schall betreffen, umständlich behandelt worden sind, und theils auch, weil sie in der Lehre vom Lichte mit wenigen Modificationen nur zu Wiederholungen Veranlassung geben würden, die hier, wo die Fülle des Stoffes ohnehin überreich ist, vermieden werden sollen.

B. Allgemeine Theorie der Undulation des Lichtes.

11) Erklärungen.

Wie wir zur Erklärung des Schalls ein elastisches Medium, die *Luft*, angenommen haben, durch welches die Vibrationen eines tönenden Körpers in wellenförmigen Bewe-

gungen bis zum Ohre fortgepflanzt werden, so nehmen wir nun auch, um die Erscheinungen des Gesichtssinnes zu erklären, ein anderes Medium, den *Aether*, an, durch welches die Vibrationen derjenigen Körper, die wir leuchtende nennen, auf eine analoge Weise, wie die Schallwellen, in Lichtwellen bis zu unserem Auge geführt werden. Es wird nun darauf ankommen, die uns bekannten Phänomene des Lichts, der aufgestellten Annahme dieses Aethers gemäfs, genügend und vollständig darzustellen, wobei wir uns zunächst blofs auf das gewöhnliche oder nicht polarisirte Licht beschränken.

I. Dieser Aether wird als ein vollkommen elastisches Fluidum vorausgesetzt, welches über den ganzen Weltraum verbreitet und selbst zwischen den Elementen aller Körper enthalten ist. Sein statischer Zustand des Gleichgewichts wird durch die Repulsionskraft, die seine Theilchen unter sich ausüben, und durch die Einwirkungen bestimmt, die er von den Elementen der andern Körper erleidet. In Folge dieser Kräfte ist der Aether im freien Raume gleichförmig ausgebreitet, überall von derselben Dichte und von derselben, nach allen Seiten sich erstreckenden Elasticität. Innerhalb der festen, flüssigen und luftförmigen Körper aber nimmt man an, dafs der Aether eine andere Dichte hat, als im freien Raume, und dafs seine Elasticität, wie bei allen ponderabeln Körpern, in luftförmigen, in flüssigen und in den *homogenen* und nicht krystallisirten festen Körpern constant, in den krystallisirten, nicht regelmäfsig polyedrischen Körpern aber veränderlich sey.

II. Die leuchtenden Körper sind, als solche, ebenfalls vibrirende Körper, nur gehn ihre Vibrationen viel schneller und in viel kleineren Räumen vor sich, als die der in der Luft tönenden Körper. Nennt man auch hier a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts im Aether, d die Dichtigkeit und e die Elasticität des Aethers, so hat man, wie oben (§. 2. I.),

$$a = \sqrt{\frac{e}{d}}.$$

Obschon man aber weder die Gröfse d noch e durch irgend eine directe Messung erhalten kann, so weifs man doch, dafs a ungemein grofs ist, indem die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts a in einer Zeitsecunde = 280 Millionen Meter

ist. Es muſs daher entweder die Elasticität des Aethers sehr groſs oder seine Dichtigkeit ungemein klein seyn. Diese Vibrationen der leuchtenden Körper theilen dem Aether eine wellenförmige Bewegung mit, wodurch diese Körper uns sichtbar werden, so wie die tönenden Körper durch die wellenförmige Bewegung der Luft uns hörbar werden. Von der Geschwindigkeit dieser Vibrationen der leuchtenden Körper hängt endlich die Länge der Lichtwellen im Aether, d. h. die *Farbe* der Körper ab, so wie von der Geschwindigkeit der Vibrationen der tönenden Körper die Länge der Schallwellen in der Luft, d. h. *die Höhe des Tons*, abhängt (§. 2.).

III. Aus diesen Annahmen folgt sofort, daſs die Lichtwellen im leeren Raume *sphärische Wellen* (§. 1.) sind, und daſs sie auch in allen homogenen Körpern, deren Elasticität in allen ihren Theilen dieselbe ist, eine sphärische Gestalt haben werden, d. h. daſs sich die von den leuchtenden Körpern erzeugten Vibrationen mit constanter Geschwindigkeit und nach allen Richtungen gleichförmig ausbreiten werden, so daſs sich die dadurch erregten Lichtwellen in jedem Augenblicke auf der Oberfläche einer Kugel befinden werden, deren Mittelpunct der leuchtende Punct ist.

IV. Wenn aber diese Lichtwellen des Aethers in solche Körper dringen, deren Elasticität in verschiedenen Theilen derselben veränderlich ist, so können die Wellen in diesem Körper nicht mehr jene frühere, einfache sphärische Gestalt haben, so können also auch die Geschwindigkeiten, mit welchen sich diese Wellen fortpflanzen, nicht mehr constant, ja so können selbst die Richtungen, in welchen sie sich fortpflanzen, veränderlich seyn. Diese offenbar mehr zusammengesetzte Erscheinung (die das sogenannte *polarisirte Licht* betrifft) wollen wir erst in der Folge näher betrachten; zunächst bleiben wir bei jenen ersten und einfacheren Erscheinungen stehn, wo das Licht sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit in sphärischen Wellen ausbreitet, deren Oberflächen in gröſsere Entfernungen von dem leuchtenden Puncte gelangen, als eben betrachtet werden kann. Da diese Voraussetzungen auch für diese Schallwellen der Luft gelten, so wird das, was hier von den Lichtwellen gesagt wird, unter den der Natur der Sache gemäſsen Modificationen auch unverändert für die Schallwellen

anwendbar seyn, so dafs dadurch eine vollständige Theorie der Undulationen beider Arten bezweckt wird, wobei übrigens unentschieden, aber auch gleichgültig bleibt, ob bei diesen Lichtwellen die Elemente des Aethers, gleich denen der Schallwellen in der Luft, in der Richtung ihrer sphärischen Wellen vibriren, oder ob diese Vibrationen wie bei den Wellen eines bewegten Wassers in einer auf diese Richtung der Welle senkrechten Stellung auf und nieder gehn. Diesem gemäfs wird es uns also auch erlaubt seyn, in der Folge die Lichtwellen des Aethers auch als Schallwellen der Luft oder selbst als die Wellen einer schwingenden Saite zu betrachten und, blofs des einfacheren Ausdrucks wegen, auch zuweilen selbst von *Lichtstrahlen* zu sprechen, wodurch wir die Halbmesser der sphärischen Lichtwellen bezeichnen, um dadurch für so nahe verwandte und beinahe ganz analoge Gegenstände den Ausdruck abzukürzen und zugleich die beiden hier zu behandelnden Gegenstände in die ihnen angemessene nähere Verbindung zu bringen.

12) Refraction und Reflexion des Lichts.

Ehe wir aber zu der eigentlichen Theorie der Lichtundulation übergehn, wird es zweckmäfsig seyn zu zeigen, dafs durch diese Hypothese der Undulation die zwei gewöhnlichsten und wichtigsten Erscheinungen, die man bisher an dem Lichte kennen gelernt hat, nicht nur ebenso gut, als durch die ältere Emanationshypothese Newton's, sondern eigentlich viel besser und genügender erklärt werden. Newton mufste, um die Phänomene der Refraction in seiner Hypothese darzustellen, den Elementen der Körper eine in ihrer gröfsten Nähe sehr starke *anziehende* Kraft zuschreiben, während er wieder, zur Erklärung der Reflexion, wenigstens ebenso starke *abstofsende* Kräfte derselben Elemente vorauszusetzen sich gezwungen fühlte. Diese doppelte, sich nur eben nicht direct widersprechende Annahme war wenig geeignet, jener Hypothese den grofsen Beifall zu sichern, dessen sie sich doch durch die Autorität ihres Urhebers so lange erfreute.

I. Viel einfacher werden aber beide Erscheinungen durch die Lichtwellen des Aethers erklärt. Wenn eine Folge von Aetherwellen an der Oberfläche eines Körpers ankommt,

in welchem der in ihm eingeschlossene Aether eine andere Dichtigkeit oder eine andere Elasticität hat, als aufser diesem Körper, so entstehn auf der Oberfläche, die den Körper von dem ihn umgebenden Aether des freien Raumes trennt, *zweierlei* Wellensysteme. Die Wellen der einen Art gehn durch den in dem Körper enthaltenen Aether weiter, indem sie ihren frühern Weg verfolgen; die Wellen der zweiten Art aber nehmen eine ihrer frühern entgegengesetzte Richtung an, und pflanzen sich wieder rückwärts in dem freien Aether fort, ohne in das Innere des Körpers einzudringen. Die der Oberfläche des Körpers zunächst liegenden einzelnen Aethertheilchen, wenn sie durch die von aufsen einfallenden Wellen erschüttert werden, können dann als ebenso viele Mittelpuncte von neuen sphärischen Wellen betrachtet werden, von welchen die einen die Refractionswellen, die andern aber die Reflexionswellen erzeugen, welche beide, wie gesagt, in ihren Richtungen einander entgegengesetzt sind.

II. Sey AB die Ebene, welche die Oberfläche des Körpers von dem aufser ihm liegenden Aether trennt. Seyen ferner IL und I'L' zwei Radien (Halbmesser) einer einfallenden Welle. Wir wollen diese Radien einander sehr nahe, unter sich parallel und in einer und derselben, auf die Ebene AB senkrechten Richtung annehmen. Ebenso kann man auch alle übrigen auf AB fallenden Radien als unter sich und mit IL parallel voraussetzen und jede andere mit ILL'I' parallel liegende, auf AB senkrechte Ebene die *Einfallsebene* nennen. Diese Annahme des Parallelismus der Radien setzt voraus, dafs der Mittelpunct der hier betrachteten Wellen (oder dafs der *leuchtende Punct*, von dem diese Wellen ausgehn) in einer sehr grofsen Entfernung von der Ebene AB liegt. Läfst man dann von dem Puncte L das Loth LP auf den Radius I'L' herab, so wird dieses Loth LP in der Ebene der Welle selbst liegen, die wir eben betrachten. Da wir nun hier zuförderst nur homogenes Licht (ohne Rücksicht auf die verschiedenen Farben) betrachten, d. h. ein solches Licht, dessen Vibrationen alle unter sich isochron oder von gleicher Dauer sind, so werden auch die Aethertheilchen L und P ganz dieselbe Vibrationsgeschwindigkeit haben, oder, mit andern Worten, das von dem Mittelpuncte I, I' der Welle ausgehende Licht wird gleiche Wege durchlaufen haben, um die

Fig. 179.

zwei Puncte L und P zu erreichen. In dem Puncte L' aber wird das Licht den Weg P L' mehr, als in L zurückgelegt haben, also wird auch von den beiden Elementarwellen, deren Mittelpuncte L und L' sind, die erste hinter der zweiten *zurück* seyn. Allein die Wirkung, welche diese beiden Wellen auf ein Aethertheilchen M, welches unter der Ebene A B liegt, ausüben, wird doch ganz *dieselbe* seyn, wenn nur das Licht die Differenz L M — L' M' in derselben Zeit zurücklegt, in welcher es den Weg P L' macht, weil die Verzögerung des von L kommenden Lichts wieder durch die frühere Entstehung der Lichtwelle ersetzt werden wird.

III. Nimmt man den so bestimmten Punct M in der Einfallsebene A L I an, und zwar in einer so grofsen Entfernung von der Ebene A B, dafs alle Radien M L, M' L'..., die daselbst enden, als unter sich parallel betrachtet werden können, so wird offenbar jede auf L M senkrechte Ebene *zu derselben Zeit* von demjenigen Lichte erreicht werden, welches allen den Wellen zugehört, deren Mittelpuncte auf der Ebene A B liegen. Diese Wellen werden alle in dem Puncte M concordiren und in diesem Puncte die Intensität des Lichtes vermehren.

Fig. 180. IV. Wenn aber z. B. für den Punct N die eben erwähnten Bedingungen nicht statt haben, d. h. wenn der Punct N nicht in einer der Einfallsebenen liegt, oder auch, wenn er zwar in der Einfallsebene A L I liegt, aber wenn das Licht nicht die Differenz L N — L' N' in derselben Zeit durchläuft, in welcher es den Weg P L zurücklegt, so werden die von N kommenden Wellen mit den andern, deren Mittelpuncte alle auf A B liegen, nicht mehr, wie zuvor, concordiren, sondern sie werden sich gegenseitig stören und selbst theilweise aufheben. Denn wenn man auch hier wieder den Punct N so weit entfernt von der kleinen Ebene A B annimmt, dafs alle von ihm auf A B kommenden Radien als unter sich parallel vorausgesetzt werden können, so ist klar, dafs das von allen diesen Elementarwellen ausgesendete Licht nicht mehr, wie zuvor, in demselben Augenblicke in allen Puncten derjenigen Ebene ankommen kann, die man auf alle nach N gerichteten Radien senkrecht gestellt hat.

V. Man wird aber die Ebene A B in kleine und unter sich gleiche Rechtecke theilen können, so dafs die ähnlichlie-

genden Puncte zweier nächsten Rechtecke nach dem Puncte N solche Radien schicken, für welche die Totalverzögerung des einen, in Beziehung auf die des anderen, genau eine halbe Welle betrage. Nimmt man also die Anzahl dieser Rechtecke sehr grofs an, so werden die von diesen Rechtecken nach N geschickten Wellen ihre Wirkungen gegenseitig zerstören oder aufheben.

VI. Daraus folgt, a) dafs bei einer hinlänglich grofsen Ebene AB die reflectirten und die gebrochenen Strahlen in der Einfallsebene (in einer auf AB senkrechten Ebene) liegen werden, und b) dafs man, um ihre Richtungen in dieser Einfallsebene in Beziehung auf zwei nahe einfallende Radien IL und I′L′ zu finden, nur durch die Puncte L und L′ zwei parallele Gerade LM und L′M′ so ziehn darf, dafs, wenn man das Loth L′P′ auf LM errichtet, das Licht ebenso viel Zeit braucht, durch LP′, als durch L′P′ zu gehn. Für die zurückgeworfenen Radien ist die Geschwindigkeit u des Lichtes dieselbe, wie für die einfallenden, da sich bei der Reflexion das Licht immer in demselben Aether bewegt. Es mufs also für die Reflexion LP′ = L′P oder es mufs der Winkel P′L′L = PLL′ oder endlich *es mufs der Reflexionswinkel dem Einfallswinkel gleich seyn.* Für die Refraction aber ist die Geschwindigkeit = v des Lichts im Körper verschieden von derjenigen = u, die es aufser dem Körper im freien Aether hatte. Also mufs auch das Loth LP′ von dem Lothe L′P verschieden oder es mufs seyn

Fig. 181.

Fig. 182.

$$\frac{LP'}{L'P} = \frac{v}{u}.$$

Da man aber immer die beiden Puncte L und L′ in einer solchen Entfernung von einander nehmen kann, dafs PL′ der Länge λ einer Welle des freien Aethers genau gleich ist, so wird L′P der Länge λ' einer Welle des in dem Körper eingeschlossenen Aethers gleich seyn, so dafs man daher haben wird

$$\frac{LP'}{L'P} = \frac{\lambda'}{\lambda}.$$

Wird nun LL′ für die Einheit der Längen genommen, so sind LP′ und L′P die Sinus des Refractionswinkels R und des Ein-

fallswinkels I, so dafs daher diese beiden Sinus das *constante* Verhältnifs haben werden

$$\frac{\text{Sin. CLI}}{\text{Sin. MLD}} = \frac{\text{Sin. I}}{\text{Sin. R}} = \frac{u}{v} = \frac{\lambda}{\lambda'},$$

d. h. dafs diese Sinus sich wie die beiden Geschwindigkeiten des freien und des in dem Körper eingeschlossenen Aethers, oder auch, dafs sie sich wie die freien und eingeschlossenen Wellenlängen des Aethers verhalten werden. Man pflegt diese Gröfse $\frac{\text{Sin. I}}{\text{Sin. R}}$ den *Refractionsindex* zu nennen. Für den Uebergang des Lichts aus Luft in Wasser ist

$$\text{Sin. I} : \text{Sin. R} = \tfrac{4}{3} = 1{,}333,$$

in Flintglas = 1,64, in Kronglas = 1,54, in Diamant = 2,49 u. s. w.

VII. Dadurch sind also die zwei bekannten Haupterscheinungen der Refraction und der Reflexion vollständig und aus *demselben* Princip erklärt, während Newton in der von ihm aufgestellen Emanationshypothese zwei einander entgegenstehende Annahmen einer anziehenden und einer abstofsenden Kraft zu Hülfe nehmen mufste, um den von ihm zu erklärenden Phänomenen zu genügen.

VIII. Die obige Darstellung der beiden Erscheinungen durch die Undulationshypothese giebt auch zugleich eine vollkommen genügende Erklärung von einer andern Eigenschaft, die man bei dem gebrochenen Lichte bemerkt und die man mit der Benennung der *Dispersion* des Lichtes bezeichnet hat. Bisher wurde nämlich, wie oben gesagt, nur homogenes Licht betrachtet, das durchaus dieselbe Geschwindigkeit hat. Wenn dasselbe aber aus verschiedenen Theilen, deren jeder eine besondere Geschwindigkeit hat, bestehn sollte, so folgt unmittelbar aus der vorhergehenden Darstellung, dafs bei der Reflexion alle diese Theile (d. h. alle die *farbigen Radien*) auf *dieselbe Weise* zurückgeworfen werden, weil bei der Reflexion nur eine einzige Geschwindigkeit u, nämlich die des freien Aethers, statt hat. Bei der Refraction aber haben zwei Geschwindigkeiten, die äufsere u und die innere v, statt, also werden sich auch, wenn der Werth von v für die verschiedenen Theile des Lichts verschieden ist, diese Theile durch

die Refraction trennen und einzeln zum Vorschein kommen, oder das gebrochene Licht wird nicht mehr homogen und weifs, sondern *gefärbt* und zwar jeder Theil in der ihm eigenthümlichen Farbe erscheinen. Wir werden übrigens weiter unten wieder auf diesen interessanten Gegenstand zurückkommen.

Bemerken wir hier noch, dafs die obige Gleichung

$$\frac{\text{Sin. I}}{\text{Sin. R}} = \frac{u}{v}$$

zeigt, dafs die Geschwindigkeit des Lichts, wenn es aus dem freien Aether in einen Körper dringt, eine desto kleinere Geschwindigkeit v hat, je stärker die brechende Kraft des Körpers ist, ein Satz, der mit der von Newton aufgestellten Hypothese der Refraction im directen Widerspruche steht und der daher allein schon genügen wird, diese Hypothese zu verlassen. Auch hat Fresnel unmittelbare Experimente mit zwei Spiegeln angestellt, aus denen die Wahrheit der Gleichung $v \text{ Sin. I} = u \text{ Sin. R}$ auch auf praktischem Wege über jeden Zweifel erhoben wird.

IX. Was in dem Vorhergehenden von der Reflexion des Lichtes gesagt worden ist, gilt unverändert auch von der Reflexion des Schalls in der elastischen Luft. Wenn eine solche Schallwelle in ihrem Wege einer reflectirenden Fläche begegnet, so wird jeder Punct dieser Fläche als der Mittelpunct einer neuen, rückwärts gehenden Schallwelle zu betrachten seyn, die Radien der beiden zusammengehörenden Einfalls- und Reflexionswellen werden immer in derselben, auf jene Fläche senkrechten Ebene liegen und mit der Normale dieser Fläche in dem Einfallspuncte zu beiden Seiten dieser Normale gleiche Winkel bilden. Da die Erfahrung lehrt, dafs unser Ohr höchstens zehn verschiedene Töne während einer Secunde vernehmen kann, d. h. dafs es diese Töne nicht mehr deutlich unterscheiden, in dem Gehöre trennen kann, wenn sie weniger als $\frac{1}{10}$ Zeitsecunde von einander entfernt sind, und da nach dem Vorhergehenden der Schall in einer Secunde 1039 Par. Fufs durchläuft, so können zwei auf einander folgende Töne von uns nur dann deutlich unterschieden werden, wenn die zwei tönenden Körper, von welchen diese Töne kommen, wenigstens 103,9 Fufs von einander entfernt

sind. Um daher seine eigene Stimme durch das *Echo* von einem den Ton reflectirenden Gegenstande zu hören, mufs man wenigstens 51,95 oder nahe 52 Fufs von diesem Gegenstande entfernt seyn. Stehn vor dem Beobachter mehrere solche reflectirende Gegenstände, z. B. mehrere Mauern oder Felsen, so wird der Beobachter denselben Ton, wenn er nur stark genug ist, zwei-, drei-, viermal . . . hören, wenn die 2, 3, 4 . . reflectirenden Gegenstände wenigstens 104 Fufs von einander, in der Richtung gegen den Beobachter, entfernt sind. Wenn der Schall von krummen Oberflächen zurückgeworfen wird, so verhält er sich ganz ebenso, wie das von krummen Spiegeln zurückgeworfene Licht. Poisson hat zuerst diesen Gegenstand einer allgemeinen Analyse unterworfen und folgende interessante Resultate gefunden. Geht der Schall von dem einen Brennpuncte eines Revolutions-Sphäroids aus, so wird er von der innern Oberfläche dieses Ellipsoids in den andern Brennpunct desselben reflectirt, und dieser reflectirte Schallstrahl nimmt an Intensität zu, je mehr er sich diesem zweiten Brennpuncte nähert, so dafs in der Nähe dieses zweiten Brennpuncts der Schall viel stärker ist, als selbst der ursprüngliche, aus dem ersten Brennpuncte ausgegangene Schall. Die Geschwindigkeit des reflectirten Schalls aber ist jener des directen ganz gleich. Geht der Schall von dem Brennpuncte eines Revolutions-Paraboloids aus, so wird er parallel mit der Axe dieses Körpers zurückgeworfen, so dafs also die zurückgeworfenen Schallwellen eben sind und auf dieser Axe des Körpers senkrecht stehn. Geht endlich der Schall von dem Brennpuncte eines Revolutions-Hyperboloids aus, so erzeugt die Reflexion desselben an der hohlen sowohl, als auch an der convexen Seite des Hyperboloids solche sphärische Wellen, die alle ihre Mittelpuncte in dem andern Brennpuncte des Hyperboloids haben. Die Erfahrung bestätigt alle diese Resultate vollkommen. Allein das allgemeine Problem der Reflexion der Schallstrahlen von jeder gegebenen krummen Fläche hat zu viele Schwierigkeiten, als dafs es bei dem gegenwärtigen Zustande unserer mathematischen Analysis aufgelöst werden könnte.

X. Bezeichnen wir, um noch einmal zu unserm Gegenstande zurückzukommen, das Verhältnifs der Geschwindigkeit

u des Lichts in der Luft zu der v im Glase durch μ, so dafs man hat

$$\mu = \frac{u}{v} = \frac{\text{Sin. I}}{\text{Sin. R}},$$

so folgt aus den oben gegebenen Erklärungen der Reflexion und Refraction, dafs, wenn die einzelnen Theile einer Lichtwelle nach der Reflexion oder Refraction zusammentreffen oder sich begegnen, sie die Wege beschrieben haben, die den gleichen Zeiten entsprechen. Was die Reflexion betrifft, so ist dieses dasselbe, als wenn man sagt, dafs der Gesammtweg aller Wellentheile (d. h. die Summe der von ihnen vor und nach der Reflexion zurückgelegten Wege) für jeden Punct derselbe seyn mufs. Was aber die Refraction betrifft, so mufs dieses auf folgende Art verstanden werden. Wenn sich die Welle z. B. im Glase mit einer Geschwindigkeit bewegt, die gleich dem μten Theile der Geschwindigkeit derselben in der Luft ist, so ist der Weg im Glase, verglichen mit jenem in der Luft, nicht unmittelbar durch seine Länge, die z. B. gleich L seyn soll, sondern sie ist eigentlich durch $\mu \cdot L$ auszudrücken. Wenn also nach der Refraction alle Elemente einer Welle sich wieder zu einem einzigen Elemente vereinigen und wenn A der in der freien Luft, B aber der im Glase zurückgelegte Weg des Lichts ist, so wird für alle Elemente dieser Welle, dem Vorhergehenden gemäfs, nicht die Gröfse $A + B$, sondern vielmehr die Gröfse $A + \mu \cdot B$ immer dieselbe constante Gröfse seyn. Dieses stimmt genau mit der 97. Proposition in Newton's Principien überein.

XI. Zum Schlusse dieses Gegenstandes wollen wir nun noch die dem Vorhergehenden gemäfse *Construction* der reflectirten sowohl, als auch der gebrochenen Wellen mittheilen. Sey also, um mit der *Reflexion* zu beginnen, A B C eine Welle, die in der Richtung A A′ fortschreitet. Wie jedes Element dieser Welle die spiegelnde Oberfläche C A′ erreicht, haben wir dieses Element als den Mittelpunct einer neuen sphärischen Welle zu betrachten, die mit der frühern Geschwindigkeit fortschreitet. Wenn nun der Punct A nach A′ gekommen ist, so hat B schon einige Zeit früher den Punct B′ erreicht, so dafs der Punct B, wenn er nicht aufgehalten

Fig. 18.

worden wäre, in derselben Zeit nach D gelangt wäre, in welcher A nach A′ gekommen ist. Der Punct B′ (oder die Erschütterung, die der Aether in dem Puncte B′ an der Spiegelfläche erhalten hat) hat sich demnach in dem umliegenden Aether in einer Kugelfläche ab ausgebreitet, deren Radius $B'b = B'D$ ist. Ebenso wird der Punct C die Spiegelfläche noch einige Zeit vor dem Puncte B erreicht und daselbst wieder (statt in derselben Zeit nach E zu gehn, während A nach A′ gegangen ist) sich in die Kugelfläche cd ausgebreitet haben, deren Radius $Cc = CE$ ist. Dasselbe gilt auch von allen zwischenliegenden Puncten. Geht man nun von allen diesen kleinen oder Elementarwellen zur Betrachtung der ganzen grofsen Welle über, die von jenen gebildet wird, so mufs ihre Oberfläche offenbar diejenige Fläche seyn, welche alle diese kleinen Kugeln berührt und die daher denselben Winkel mit CA′ macht, den A′E oder AC, aber auf der entgegengesetzten Seite, mit ihr bildet. Die Richtung der Welle, die auf diese berührende Ebene senkrecht ist, bildet daher mit dem Einfallslothe vor und nach der Reflexion denselben Winkel.

Fig. 184. Um nun ebenso die Construction der *Refractionswellen* zu geben, sey wieder ABC die in der Richtung AA′ fortschreitende Welle. So wie die aufeinanderfolgenden Theile dieser Welle die brechende Ebene CA′ erreichen, so erregen sie in dem im Innern des Mediums eingeschlossenen Aether Vibrationen an der Oberfläche desselben, und diese bilden wieder die Mittelpuncte kleiner Wellen, die sich in sphärischen Gestalten im Innern des Mediums fortpflanzen, und zwar mit einer kleinern Geschwindigkeit, als die, welche sie vorher im freien Raume hatten. Im Augenblicke, wo A nach A′ kommt, hatte B schon etwas früher den Punct B′ erreicht und würde in jenem Augenblick nach D gekommen seyn, wenn er durch das brechende Mittel nicht daran gehindert worden wäre. Dafür hat sich dieser Punct B′ in eine sphärische Welle ab verbreitet, deren Radius kleiner als B′D und zwar in dem Verhältnifs kleiner ist, als die Geschwindigkeit vor und nach der Ankunft in B′ vermindert worden ist. Nimmt man also wieder, wie zuvor, für das Verhältnifs dieser Geschwindigkeiten die Gröfse μ an, so ist der Radius der neuen Kugel

$$B'b = \frac{1}{\mu} . B'D.$$

Noch früher wurde die brechende Fläche in dem Puncte C erreicht und daselbst eine sphärische Welle cd erzeugt, deren Radius

$$Cc = \frac{1}{\mu}.CE$$

ist. Dasselbe kann auch von jedem zwischenliegenden Puncte gesagt werden. Die grofse Welle, welche aus allen diesen kleinen Elementarwellen besteht, wird zu ihrer Oberfläche diejenige Ebene haben, welche alle diese Elementarwellen berührt, und die daher mit der brechenden Ebene CA′ einen Winkel bildet, dessen Sinus gleich $\frac{Cc}{CA'}$ ist. Dieser Winkel ist aber demjenigen gleich, den die Richtung der Welle (welche Richtung auf der Oberfläche der Welle immer senkrecht ist) mit der auf der brechenden Fläche senkrechten Linie macht, ist also der Refractionswinkel R, so dafs man daher hat

$$\text{Sin. R} = \frac{Cc}{CA'}.$$

Ganz ebenso hat man aber auch für den Incidenzwinkel I

$$\text{Sin. I} = \frac{CE}{CA'},$$

so dafs man daher die Gleichung erhält

$$\frac{\text{Sin.R}}{\text{Sin.I}} = \frac{Cc}{CE} = \frac{1}{\mu}.$$

13) Princip der Coexistenz kleiner Oscillationen und der ungestörten Superposition derselben.

Noch müssen wir zwei allgemeine Grundsätze der Bewegung erwähnen, welche bei einem aus mehrern Körpern bestehenden Systeme statt finden, wenn die Bewegungen dieser ihren gegenseitigen Anziehungen unterworfenen Körper nur sehr klein sind.

Wenn ein solches System um eine bestimmte Lage seines Gleichgewichts kleine Schwingungen macht, in Folge der Einwirkung mehrerer auf alle Körper des Systems zugleich einwirkenden Kräfte, so kann man die Schwingungen eines

jeden einzelnen dieser Körper als allein und für sich bestehend betrachten, ohne daſs dadurch die Schwingungen der andern Körper des Systems eine merkliche Störung erleiden, und ebenso kann man auch die Wirkungen, die von jeder einzelnen jener auf das ganze System wirkenden Kräfte entstehn, als für sich allein entstehend betrachten, ohne daſs dadurch die Wirkung der übrigen Kräfte gestört wird. Dieser Grundsatz ist unter der Benennung *des Princips der Coexistenz der kleinen Oscillationen* in der Mechanik bekannt[1]. Man kann dasselbe als einen Ausfluſs des allgemeinen Grundsatzes der Differentialrechnung betrachten, nach welchem das Differential einer Function U von mehrern veränderlichen Gröſsen x, y, z . ., so lange man diese Variationen als unendlich klein ansieht oder so lange man die Producte und höheren Potenzen dieser Variationen vernachlässigt, gleich ist der Summe der Differentiale von U in Beziehung auf jede einzelne der Gröſsen x, y, z . ., so daſs also das vollständige Differential von U ist

$$\partial U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)\partial z + \ldots$$

Wie aber hier durch diese Isolation der einzelnen Differentiale die Rechnung für das vollständige ∂U sehr abgekürzt wird, so wird durch jene analoge Trennung der Kräfte und der Bewegungen eines jeden einzelnen der Körper, aus welche das System besteht, die Bestimmung der Bewegung des ganzen Systems erleichtert, und zwar in so hohem Grade, daſs es, ohne dieses Princip, bei dem gegenwärtigen Zustande unserer Analysis ganz unmöglich wäre, die meisten der hierher gehörenden Probleme auch nur durch Annäherung aufzulösen. Einen zweiten ähnlichen Fall von dieser Erleichterung haben wir in der Astronomie bei dem sogenannten *Probleme der drei Körper*. Da die Massen d. h. die anziehenden Kräfte aller Planeten viel kleiner sind, als die der Sonne, und da ebenso die Dimensionen dieser Himmelskörper viel kleiner sind, als die Distanzen, durch welche sie von einander getrennt sind, so ist es uns erlaubt, bei der Bestimmung der Bewegung eines jeden Planeten um die Sonne die Störungen,

---

1 Vergl. Poisson Traité de Mécan. 2me éd. T. II. p. 436.

welche derselbe von allen anderen erleidet, isolirt und für jeden dieser störenden Planeten besonders, als ob dieser letztere allein da wäre, zu betrachten. Unter dieser Beschränkung wird uns allein jenes Problem noch auflösbar und die Resultate dieser Auflösung stimmen, wie die Erfahrung lehrt, auf das Beste mit den Beobachtungen überein. Müfsten wir aber bei der Bestimmung der Bewegung eines jeden einzelnen dieser Planeten auf die Störungen *aller* andern, wie sie zu gleicher Zeit statt haben, und müfsten wir zugleich auf die Abweichung dieser Planeten von der diese Rechnungen ungemein vereinfachenden Kugelgestalt Rücksicht nehmen, so würde es wahrscheinlich für immer unmöglich seyn, die Auflösung jener Aufgabe auch nur durch eine entfernte Näherung zu erreichen.

I. Mit diesem Princip nahe verwandt ist das der *Superposition der kleinen Bewegungen* eines Systems von unter sich verbundenen Körpern, das in Folge von auf dasselbe einwirkenden Kräften kleine Oscillationen um den Zustand seines Gleichgewichtes macht. Nehmen wir an, dafs α, β, γ... die ursprünglichen Werthe (für den Anfang der Bewegung oder für $t = 0$) der verschiedenen Coordinaten x, y, z, x', x'' . . sind, durch welche jeder einzelne Körper des Systems, den Bedingungen der Aufgabe gemäfs, für jede Zeit t bestimmt werden soll, und dafs

$$\alpha + u, \quad \beta + v, \quad \gamma + w \ldots .$$

die Werthe dieser Coordinaten am Ende der Zeit t vorstellen, wo also die Gröfsen u, v, w . . . als Functionen der Zeit zu suchen seyn sollen. Unter der Voraussetzung, die hier als wesentlich zu betrachten ist, dafs alle diese Gröfsen u, v, w . . . nur klein sind, so dafs man ihre Producte und ihre höheren Potenzen weglassen kann, wollen wir für irgend einen Augenblick nach dem Anfange der Bewegung des Systems die unbekannten Gröfsen u, v, w... durch U, V, W.., für den nächstfolgenden Augenblick durch U', V', W'. . ., für den dritten Augenblick durch U'', V'', W''. . . u. s. w. bezeichnen. Dieses vorausgesetzt wird man in Folge jenes zweiten Princips für die gesuchten Werthe von u, v, w . . . die Ausdrücke haben

$$u = U + U' + U'' + \dots$$
$$v = V + V' + V'' + \dots$$
$$w = W + W' + W'' + \dots$$

und darin besteht das erwähnte Princip der Superposition der kleinen Bewegungen.

II. Nach diesem Principe pflanzen sich, wie dieses durch die Beobachtung vollkommen bestätigt wird, die Wasserwellen, die z. B. durch mehrere zu gleicher Zeit in das Wasser geworfene kleine Körper entstehn, jede für sich auf der Oberfläche des Wassers fort, indem sich jede um ihren Mittelpunct kreisförmig ausbreitet, und wenn sich zwei solcher Wellen, die aus verschiedenen Mittelpuncten kommen, in irgend einer Richtung begegnen, so durchschneiden sie sich gegenseitig, ohne dafs die eine derselben von der anderen gestört oder modificirt wird, so dafs für jeden Augenblick die Erhöhung der Wasserfläche in jedem Puncte gleich ist der Summe aller positiven und negativen Erhöhungen, die durch die verschiedenen in diesem Puncte sich eben kreuzenden Wellen erzeugt werden. Nach demselben Principe legen sich auch die Schallwellen in der Luft, die von verschiedenen Puncten kommen, wenn sie sich begegnen, über einander, ohne sich zu stören oder auf irgend eine Weise zu modificiren, so dafs für jeden Augenblick und in jedem Puncte der Luft die Richtung und die Geschwindigkeit der Bewegung jedes Lufttheilchens gleich ist der algebraischen Summe aller Richtungen und aller Geschwindigkeiten, die den einzelnen, sich in diesem Puncte der Luft schneidenden Wellen zukommen. Auch dieses ist der Erfahrung vollkommen gemäfs, da wir zwei und mehr Töne, die von verschiedenen Instrumenten an verschiedenen Orten zu unseren Ohren gelangen, deutlich und ohne Verwirrung vernehmen können. Die Töne, welche von mehreren Instrumenten eines Orchesters in derselben Zeit angestimmt werden, erleiden in unsern Ohren, ihrer Gleichzeitigkeit ungeachtet, keine Modification und jeder dieser Töne wird von uns ganz ebenso, als ob er allein da wäre, vernommen. Auch die oben (§. 10.) betrachtete Concordanz verschiedener Töne, die zu gleicher Zeit von derselben Saite ertönen, ist als ein schöner Beweis der Wahrheit dieses Princips zu betrachten. Wenn nämlich eine gespannte Saite zu gleicher Zeit

diejenigen isochronen Schwingungen macht, die ihrer ganzen Länge, und diejenigen, die nur dem dritten Theil ihrer Länge entsprechen, so ist die dadurch erzeugte Bewegung der Luft ganz dieselbe, als wenn zwei verschiedene Saiten, von welchen die eine dreimal länger ist, als die andere, ihre isochronen Schwingungen machten, wie man denn auch zu gleicher Zeit nicht nur den Grundton einer jeden Saite, sondern auch den ihm entsprechenden höhern Ton (die Quinte der nächstfolgenden Octave) deutlich vernimmt. Aus demselben Grunde endlich hört man auch zu gleicher Zeit sehr deutlich diejenigen zwei Töne, welche eine gespannte Saite durch ihre Längen- und durch ihre Transversalschwingungen erzeugt. Wir werden daher durch die schon oft bemerkte Analogie zwischen den Schall- und den Lichtwellen gleichsam von selbst auf die Annahme geführt, dafs dieses Princip auch bei den durch das Licht erzeugten Bewegungen des Aethers seine Anwendung finde. Den schönsten und treffendsten Beweis von diesen Superpositionen der Lichtwellen werden wir aber in einem der nächstfolgenden Abschnitte durch die Theorie der *Interferenz* des Lichtes erhalten.

14) Fundamentalgleichung der akustischen und optischen Schwingungen.

Sey AMB eine vollkommen elastische, nur wenig ausdehnbare, homogene und durchaus gleich dicke Saite, die in der Richtung ihrer Länge von einem gegebenen Gewichte P gespannt und an ihren beiden Endpuncten A und B befestigt ist. Das Gewicht der Saite soll gegen P als unbeträchtlich gelten, so dafs also die Saite, die sonst durch die Kraft der Schwere die Gestalt einer Kettenlinie annehmen würde, in dem Zustande ihrer Ruhe oder ihres Gleichgewichtes als eine gerade Linie APB zu betrachten ist. Dieses vorausgesetzt entfernen wir nun diese Saite ein wenig aus der Lage ihres Gleichgewichts, so wird sie durch ihre Elasticität wieder zu dieser ihrer ursprünglichen Lage APB zurückzukehren suchen. Wenn sie aber in dieser Lage angekommen ist, werden alle ihre Theile eine Geschwindigkeit haben, nach welcher sie auf die andere Seite ihrer Gleichgewichtslage übergehn und auf dieser Seite so weit fortschreiten mufs, bis ihre Geschwin-

Fig. 185.

digkeit von der Elasticität der Saite aufgehoben ist, wonach sie sodann wieder zu ihrer ursprünglichen Lage A P B zurückkehren und überhaupt diese ihre schwingenden Bewegungen um die Gerade A P B in immer kleineren oder weniger gekrümmten Bogen so lange fortsetzen wird, bis sie endlich in dieser Geraden zur Ruhe gelangt oder wieder in ihr Gleichgewicht zurückkehrt. Welches ist nun für jede gegebene Zeit seit dem Anfange dieser Bewegung der Saite der Ort und die Geschwindigkeit eines jeden ihrer Puncte?

Sey am Ende der Zeit t die Gestalt der Saite A M′ B, also irgend eine Curve von einfacher oder auch von doppelter Krümmung, in welcher M′ die Lage ist, die der Punct M für diese Zeit eingenommen hat. Es sey P die senkrechte Projection dieses Punctes M′ auf die Gerade A M B, ferner

$$AM = u, \quad AP = u + x.$$

Die zwei andern senkrechten Coordinaten des Punctes M′ wollen wir durch y und z bezeichnen, die also beide auf der Axe A M B der x, so wie auch unter sich selbst, senkrecht stehn. Da, der Voraussetzung gemäſs, die Saite A M′ B nur sehr wenig aus ihrer Gleichgewichtslage A M B gebracht worden ist, so werden die Gröſsen x, y, z ebenfalls nur sehr klein seyn, und die obige Frage wird beantwortet seyn, wenn man die drei Gröſsen x, y, z als Werthe der Function von u und t bestimmt haben wird.

Sey ∂s das Element m M′ oder M′ m′ der Curve A M′ B und ε die Dichtigkeit der Saite in diesem Puncte M′ multiplicirt in die Fläche des auf die Länge der Saite senkrechten Schnitts, also $\varepsilon \partial s$ das Element der Masse der Saite. Im Zustande des Gleichgewichts sind diese Elemente der Masse ihren Längen proportional, da die Saite homogen und überall gleich dick vorausgesetzt worden ist. Die Länge des Elements, die dem Puncte M in der Gleichgewichtslage entspricht, ist ∂u. Nennt man also p das Gewicht und l die Länge der ganzen Saite, so wie g = 9,809 Meter die Schwere, so ist die Masse dieses Elements der Saite gleich $\frac{p \partial u}{g l}$, und da die Masse des Elements während der Bewegung der Saite ungeändert bleiben muſs, so hat man

$$\varepsilon \partial s = \frac{p \partial u}{g l}.$$

Wenn nun auf dieses Element $\varepsilon\partial s$ eine accelerirende Kraft wirkt, deren Componenten nach den Richtungen der Coordinaten x, y, z durch X, Y, Z ausgedrückt werden, deren bewegende Kräfte, nach denselben Richtungen zerlegt, also $X\varepsilon\partial s$, $Y\varepsilon\partial s$, $Z\varepsilon\partial s$ sind, und wenn überdiefs durch **T** die Spannung des Elements $\varepsilon\partial s$ nach der Richtung des Bogens der Curve in M', also auch durch $T\frac{\partial(u+x)}{\partial s}$, $T\frac{\partial y}{\partial s}$ und $T\frac{\partial z}{\partial}$ diese nach der Richtung der x, y und z zerlegten Spannungen ausgedrückt worden, so hat man nach den bekannten Fundamentalformeln der Statik für das *Gleichgewicht* der Saite die drei folgenden Gleichungen:

$$\partial . T\frac{\partial(u+x)}{\partial s} + X.\varepsilon\partial s = 0,$$

$$\partial . T\frac{\partial y}{\partial s} + Y.\varepsilon\partial s = 0,$$

$$\partial . T\frac{\partial z}{\partial s} + Z.\varepsilon\partial s = 0.$$

Aus diesen Gleichungen des Gleichgewichts entstehn aber sofort die Gleichungen der Bewegung der Saite, wenn man nach dem bekannten von D'Alembert zuerst aufgestellten Verfahren in den vorhergehenden Ausdrücken blofs statt X, Y und Z die Gröfsen $X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$, $Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ und $Z - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ substituirt, so dafs man daher, da noch überdiefs $\varepsilon\partial s = \frac{p\partial u}{gl}$ ist, für diese Gleichungen der Bewegung der Saite haben wird:

$$\partial . T\frac{\partial(u+x)}{\partial s} + \left(X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\frac{p\partial u}{gl} = 0,$$

$$\partial . T\frac{\partial y}{\partial s} + \left(Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)\frac{p\partial u}{gl} = 0,$$

$$\partial . T\frac{\partial z}{\partial s} + \left(Z - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)\frac{p\partial u}{gl} = 0.$$

Nimmt man aber, wie es hier der Fall ist, aufser der durch die Elasticität der Saite entstehenden Spannung T weiter keine äufseren, auf die Saite einwirkenden Kräfte an, so sind die

Gröſsen X, Y und Z gleich Null, man erhält für die gesuchten Endgleichungen, welche die Bewegung der schwingenden Saite ausdrücken,

$$\left.\begin{aligned} \partial . T \frac{\partial (u + x)}{\partial s} &= \frac{p}{g l} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} . \partial u \\ \partial . T \frac{\partial y}{\partial s} &= \frac{p}{g l} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} . \partial u \\ \partial . T \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{p}{g l} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} . \partial u \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (A)$$

und dieser Gleichungen Integral wird die gesuchte Bewegung der Saite geben.

I. Allein bei dem gegenwärtigen Zustande der Analysis ist die Integration der drei letzten Gleichungen unmöglich, so lange sie nicht zuerst auf eine lineare Form gebracht werden können. Auf diese Form aber wird man sie bringen, wenn man die Gröſse der Schwingungen oder die Amplitüde derselben, wie man der Natur der Sache nach wohl darf, sehr klein annimmt. Da nämlich ∂u das Element der Saitenlänge für das Gleichgewicht und ∂s für die Bewegung ist, und da die Spannungen, welche die Saite in diesen beiden Zuständen erleidet, die Gröſsen P und T zum Maſse haben, so wird die Differenz T — P dieser Gröſsen proportional seyn dem Verhältnisse der Ausdehnung $\partial s - \partial u$ des Elements zu der Länge ∂u desselben, oder man wird haben

$$T - P = \frac{q(\partial s - \partial u)}{\partial u},$$

wo q ein gegebenes constantes Gewicht bezeichnet, welches von der Materie und der Dichtigkeit der Saite abhängen wird. Ueberdieſs hat man auch, da u + x die Abscisse des Punctes M′ ist,

$$\partial s^2 = (\partial u + \partial x)^2 + \partial y^2 + \partial z^2.$$

Auch darf man annehmen, daſs nicht bloſs die einzelnen Puncte der Curve A M′ B, sondern daſs auch die Richtungen ihrer Tangenten in den verschiedenen Puncten dieser Curve sich nur sehr wenig von der geraden Linie A P B des Gleichgewichts entfernen, so daſs also die Gröſsen

$$\frac{\partial x}{\partial s} \text{ und } \frac{\partial y}{\partial s}$$

nur sehr kleine Brüche gegen die Einheit seyn werden, deren Quadrate man vernachlässigen kann. Unter dieser Voraussetzung erhält man aber

$$\partial s = \partial u + \partial x \text{ und } T - P = q\frac{\partial x}{\partial u}.$$

Vernachlässigt man endlich ebenso die sehr kleinen Producte

$$\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \text{ und } \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial s}$$

und substituirt man die Werthe von

$$\partial s = \partial u + \partial x \text{ und von } T = P + q\frac{\partial x}{\partial u}$$

in den letztern drei Gleichungen (A), so erhält man die folgenden Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= b^2 \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{(B)}$$

wo der Kürze wegen

$$b^2 = \frac{glq}{p} \text{ und } a^2 = \frac{glP}{p}$$

gesetzt worden ist. Das Integral dieser drei Gleichungen giebt die gesuchte Bewegung der schwingenden Saiten unter der oben erwähnten Bedingung, daſs die Vibrationen derselben nur in sehr geringen Abweichungen von der Lage des Gleichgewichts bestehn.

II. Da die drei veränderlichen Gröſsen x, y und z in den Gleichungen (B) bereits separirt sind, so daſs jede dieser Gleichungen nur eine dieser drei Gröſsen als Function von u und t enthält, so folgt aus ihnen sofort, daſs die Schwingungen der Saite, wie dieselben in den mit den drei senkrechten Ebenen der xy, xz und yz statt haben, unter sich ganz unabhängig

sind oder dafs diese drei Schwingungen zu gleicher Zeit statt haben, ohne dafs eine derselben von der andern geändert oder modificirt wird (§. 4. zu Ende).

III. Die Gleichungen (B) zeigen also, dafs jede Vibration in drei andere aufgelöst werden kann, deren Richtungen unter sich senkrecht sind, die alle unter sich dieselbe Dauer und dieselbe Phase (§. 1. II.) haben. Am einfachsten wird es seyn, für die Axen dieser drei Richtungen einer Welle die Richtung des Lichtstrahls (oder den Halbmesser der sphärischen Welle) und zwei andere unter sich senkrechte gerade Linien zu wählen, die in der tangirenden Ebene der sphärischen Welle liegen.

IV. Da der constante Factor a den beiden letzten der Gleichungen (B) gemeinschaftlich ist, so folgt, dafs die *transversalen* Schwingungen nach der Richtung der y dieselben sind mit jenen nach der Richtung der z, so dafs es also schon genügt, nur die eine dieser beiden Schwingungsarten zu betrachten. Endlich folgen aber auch die *Längenschwingungen*, die durch die erste jener drei Gleichungen ausgedrückt werden, ganz denselben Gesetzen, wie die Transversalschwingungen, da die erste jener Gleichungen von den beiden andern nur durch den constanten Factor b verschieden ist, wo $b = a\sqrt{\frac{q}{p}}$ ist.

V. Die Schallwellen pflanzen sich, wie wir gesehn haben, in der Luft alle mit derselben Geschwindigkeit fort, die Länge dieser Wellen (d. h. die Höhe oder Tiefe des Tons) mag welche immer seyn. Nicht so verhält es sich aber bei dem Lichte. Je kürzer die Wellenlänge λ des Aethers ist (d. h. nach §. 11. II., je näher die Farbe des Lichts dem violetten Ende des Sonnenspectrums ist), desto langsamer pflanzt sich die ganze Welle im Aether fort, so dafs also die violetten Strahlen die kleinsten Wellenlängen, die schnellsten Vibrations- und die langsamsten Fortpflanzungsgeschwindigkeiten haben, während die rothen Strahlen die gröfsten Wellenlängen, die langsamsten Vibrations- und die schnellsten Fortpflanzungsgeschwindigkeiten besitzen.

VI. Bemerken wir überhaupt den grofsen Unterschied, der zwischen den Schallwellen in der Luft und den Lichtwel-

len im Aether statt hat. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit oder der Raum, den diese Wellen in einer Secunde zurücklegen, beträgt in der Luft (nach §. 2. I.) 337, im Aether aber 280000000 Meter. Die Länge einer Welle der Lufttheilchen aber, für die höchsten uns noch hörbaren Töne, ist (nach §. 2. II.) nahe 41 Millimeter ($1\frac{1}{2}$ Zoll), während die Wellenlänge im Aether bei den rothen Strahlen (siehe unten §. 17.) nur 0,00062 Millimeter beträgt, also über 66tausendmal kleiner ist. Jener höchste Ton legt (§. 2. II.) in einer Secunde 8200, der violette Lichtstrahl aber in derselben Zeit 662 Billionen Schwingungen, also über 80000millionenmal mehr, als jener Ton, zurück. Ein leuchtender Punct macht in einer Secunde so viele Oscillationen, als Wellen auf die Strecke des Weges gehn, durch welche sich das Licht in einer Secunde fortpflanzt, und diese Strecke beträgt nach dem Vorhergehenden 280 Millionen Meter oder nahe die Entfernung des Monds von der Erde. Nach der Tafel des §. 17. schwingt in dem millionsten Theile einer Zeitsecunde der rothe Strahl 451millionenmal und der violette 662millionenmal, und diefs sind wahrscheinlich die beiden äufsersten Grenzen, unter welchen uns das Licht noch sichtbar ist.

VII. Noch mufs ein anderer wesentlicher Unterschied zwischen den Schall- und Lichtstrahlen bemerkt werden. Bei jenen bewegen sich die Lufttheilchen vorzugsweise in einer auf die Oberfläche der sphärischen Welle senkrechten Richtung oder in der Richtung des Schallstrahls (des Halbmessers der Welle), bei diesen aber bewegen sich die Aethertheilchen während ihrer Vibrationen auf der Oberfläche der sphärischen Wellen oder in einer senkrechten Richtung auf den Lichtstrahl. Die erstere Gattung der Vibrationen, die der Luft, ist daher von immerwährenden Verdichtungen und Verdünnungen der Luft begleitet, die bei den Vibrationen des Aethers vielleicht gar nicht statt haben. Möglich, dafs bei jeder Störung des Gleichgewichts in der Luft und in dem Aether immer beide Gattungen von Vibrationen (in der Richtung der Fortpflanzung der Welle und senkrecht darauf) entstehn, dafs aber unser Ohr für diese zweiten Schwingungen in der Luft, so wie unser Auge für jene ersten Schwingungen im Aether unempfindlich ist, und dafs es vielleicht Geschöpfe giebt, deren Sinne jene uns unmerkbaren Schwingungsarten der Luft und des

Aethers sehr wohl vernehmen. Stellen wir uns, um jene beiden Bewegungen deutlicher darzustellen, die Elemente des elastischen Mediums, in welchem der Schall oder das Licht entsteht, in unter sich parallelen Ebenen vertheilt vor, die alle senkrecht auf der Richtung stehn, in welcher sich die sphärische Welle fortpflanzt. Dann wird derjenige Zustand der Oscillationen dieses Mediums, welcher dem Schall entspricht, in einem *Vor- und Rückwärtsgehn* jener Ebenen, senkrecht auf ihren Oberflächen, bestehn, diese Ebenen werden sich unter einander abwechselnd nähern und wieder von einander entfernen und es werden gewisse Perioden der kleinsten und gröfsten Verdichtung des Mediums (Näherung jener Ebenen) eintreten. Bei denjenigen Oscillationen aber, welche dem Lichte entsprechen, werden jene Ebenen sich parallel mit sich selbst bewegen, während ihre senkrechten Abstände von einander immer nahe dieselben bleiben; jede dieser Ebenen wird immer dieselbe Entfernung von dem Mittelpuncte ihrer sphärischen Welle behalten, aber in bestimmten Perioden und nach bestimmten Gesetzen *Seitenabweichungen* machen, so dafs also jene Schallwellen den Longitudinalschwingungen (§. 1. II.), diese Lichtwellen aber mehr den Transversalschwingungen entsprechen.

15) Integration der Gleichungen (B).

Wir wollen uns nun anschicken, die endlichen Ausdrücke aufzusuchen, die den drei Differentialgleichungen (B) der zweiten Ordnung entsprechen. Da aber diese Gleichungen nicht zwischen den gewöhnlich so genannten, sondern zwischen *Partialdifferentialen* statt haben, so wird es nicht unangemessen seyn, über die Integration solcher Gleichungen hier einige kurze Betrachtungen vorausgehn zu lassen.

I. Nehmen wir an, wir seyen bei der Auflösung irgend eines Problems, das sich auf die Geometrie im Raume zwischen den drei unter sich senkrechten Coordinaten x, y, z bezieht, zu der Gleichung gelangt

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = c,$$

wo c eine constante Gröfse bezeichnet. Da jede Gleichung zwischen drei solchen veränderlichen Gröfsen x, y, z, sie mag

eine endliche oder auch eine Differentialgleichung irgend einer Ordnung seyn, im Allgemeinen immer für eine krumme Fläche gehört, so wird also auch die gegebene Gleichung

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = c$$

für eine solche Fläche gehören, und es wird nun noch darauf ankommen, diese Fläche näher zu bestimmen. Diese Gleichung sagt aber, daſs die gesuchte Fläche der Art ist, daſs, wenn in ihrer endlichen Gleichung das Differential von z bloſs in Beziehung auf x genommen oder wenn in dieser Gleichung bloſs die zwei Gröſsen z und x als veränderlich vorausgesetzt werden, der Differentialcoefficient $\frac{\partial z}{\partial x}$ immer gleich einer constanten Gröſse c seyn soll. Diese *partielle* Betrachtung der beiden veränderlichen Gröſsen z und x, ohne weitere Rücksicht auf die dritte Gröſse y, wird in der gegebenen Gleichung, nach der in der Analyse gebräuchlichen Art, durch die beiden Klammern ausgedrückt. Mit einer nur geringen Aufmerksamkeit bemerkt man aber sogleich, daſs die gegebene Gleichung $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = c$ auch so dargestellt werden kann

$$z = cx + f(y),$$

wo f(y) irgend eine wie immer von y abhängige Gröſse oder eine willkürliche Function von y bezeichnet. So kann man z. B. annehmen

$$z = cx + ay^m \text{ oder } z = cx + a\,\mathrm{Sin.}^m y$$

oder

$$z = cx + a^{my} \text{ u. s. w.},$$

da alle diese Ausdrücke für das partielle Differential von z in Beziehung auf x oder für den Werth von $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ die Gröſse c wieder geben, wie sie sollen. Wir werden daher die Gleichung zwischen den endlichen Gröſsen x, y und z oder die Gleichung

$$z = cx + f(y)$$

als das Integral des gegebenen Ausdrucks

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = c$$

betrachten, und diese endliche Gleichung wird daher auch zugleich die Fläche vorstellen, welche wir suchen.

Um diese Fläche zu construiren, wollen wir uns in der coordinirten Ebene der xz eine gerade Linie vorstellen, die mit der Axe der x einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente gleich a ist. Die Gleichung dieser Geraden ist bekanntlich

$$z = cx + b$$

und die Differentialgleichung derselben zwischen den gewöhnlichen Differentialen ∂x und ∂z ist daher auch

$$\partial z = c \partial x \text{ oder } \frac{\partial z}{\partial x} = c,$$

ein Ausdruck, der mit dem vorhergehenden $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = c$ bis auf die Klammern, welche die partiellen Differentiale bezeichnen, vollkommen übereinstimmt, so daſs also

$$z = cx + b$$

das Integral von der Gleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} = c$$

mit gewöhnlichen Differentialen seyn wird. Die constante Gröſse b drückt hier bekanntlich die Höhe über der Ebene der xy aus, in welcher jene Gerade die Axe der z schneidet, da $z = b$ für $x = 0$ ist. Allein diese Gröſse b kommt in der Differentialgleichung $\frac{\partial z}{\partial x} = c$ nicht mehr vor, d. h. diese Differentialgleichung ist von b ganz unabhängig, und daraus folgt, daſs diese Differentialgleichung viel allgemeiner ist, als ihr Integral $z = cx + b$. Während nämlich dieses Integral nur eine einzige bestimmte Gerade ausdrückt, zu der die Gröſsen a und b gehören, drückt die Differentialgleichung $\partial z = c \partial x$ alle die Geraden aus, zu welchen die Gröſse a gehört, welches auch der Werth der zweiten Gröſse b seyn mag. Oder mit andern Worten: die Gleichung $z = cx + b$ gehört nur für diejenige Gerade, deren trigonometrische Tangente jenes Winkels gleich a und deren Höhe über dem Anfangspuncte der Coordinaten gleich b ist, während die Gleichung $\partial z = c \partial x$ für alle die Geraden gehört, welche dieselbe Tangente jenes

Winkels haben, wenn auch ihre Höhe b noch so sehr von jener ersten verschieden seyn mag, oder endlich: die Gleichung $\partial z = c \partial x$ gehört für alle Geraden, die man in der coordinirten Ebene der xz mit jener ersten bestimmten Geraden $z = cx + b$ parallel gezogen hat.

Diese Allgemeinheit läfst sich aber noch weiter treiben, da offenbar auch jede andere Gerade mit derselben Tangente a der gegebenen Differentialgleichung $\partial z = c \partial x$ entsprechen wird, selbst wenn sie nicht in der coordinirten Ebene der xz, sondern nur in einer dieser Ebene überhaupt parallelen Ebene gezogen wird, die übrigens so weit, als man will, vor oder hinter dieser festen coordinirten Ebene liegen mag. Die Distanz dieser beiden Ebenen aber wird eben durch die Coordinate y, die wir bisher noch gar nicht berücksichtigt haben, ausgedrückt, so dafs man also sagen kann, die Gleichung $\frac{\partial z}{\partial x} = c$ gehört für alle jene geraden Linien, die mit der ersten Geraden $z = cx + b$ in oder auch aufser der coordinirten Ebene der xz parallel sind, und um diese gröfste Allgemeinheit der Lage dieser Linie auf eine kurze und einfache Weise auszudrücken, hat man jene Einschliefsung der Gröfse $\frac{\partial z}{\partial x}$ in ihre Klammern gewählt, so dafs also die Gleichung zwischen den partiellen Differentialen

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = c$$

den Complex aller jener Geraden bezeichnet, die der Ebene der xz parallel sind, und mit der Axe der x einen Winkel bilden, dessen trigonometrische Tangente gleich c ist, wo es ganz willkürlich bleibt, wie weit sich diese Geraden von der coordinirten Ebene der xz zu beiden Seiten derselben entfernen. Wie aber die Gleichung $\frac{\partial z}{\partial x} = c$ aus der gegebenen endlichen Gleichung $z = cx + b$ durch Differentiation entstanden ist, indem das Differential der constanten Gröfse ihrer Natur nach verschwindet, so wird auch die Gleichung

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = c$$

zwischen partiellen Differentialen aus der gegebenen Gleichung

$$z = cx + f(y)$$

durch die Differentiation entstehn, da der Ausdruck $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ nur das Differential von z in Beziehung auf x oder nur unter der Voraussetzung ausdrückt, daſs bei diesem Differential die Gröſse y als constant, also auch jede Function f(y) von y als constant und daher das Differential dieser Function, wie oben das Differential der constanten Gröſse b, als verschwindend angenommen wird. Nimmt man daher alle jene unzähligen, unter sich parallelen, aber in verschiedenen Ebenen liegenden Geraden, deren Gleichung

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = c$$

ist, in einer bestimmten, übrigens willkürlichen Reihenfolge an, so daſs man immer von jeder einzelnen dieser Geraden zu der ihr nächstliegenden übergeht, so wird man eine krumme Fläche erhalten, deren Gleichung durch das Integral der letzten Gleichung oder durch

$$z = cx + f(y)$$

ausgedrückt wird. In diesem letzten Ausdrucke ist das Willkürliche, welches in dem erwähnten ganz freien Uebergange von der einen jener Geraden zu ihrer nächstfolgenden liegt, durch die Gröſse f(y) bezeichnet, so daſs also diese Gröſse f(y) ebenfalls eine ganz willkürliche Function von y ausdrückt, eine Potenz, einen Logarithmus, einen Sinus von y oder von irgend einem aus y und constanten Gröſsen zusammengesetzten Ausdrucke, oder auch bald diese, bald jene Function von y, so daſs selbst das Gesetz, nach welchem diese Function fortgeht, plötzlich abbrechen und in ein anderes übergehn, ja daſs selbst diese Function ganz gesetzlos und rein willkürlich fortschreiten kann, wenn sie nur für jeden Augenblick bloſs durch die Coordinate y bestimmt wird und von den beiden andern x und z immer unabhängig bleibt.

Wenn man also, um das Vorhergehende kurz zusammenzunehmen, eine mit der Ebene der xz parallele Gerade mit

sich selbst parallel und so bewegt, daſs sie mit der Ebene der xy stets denselben Winkel bildet, so wird die Fläche, welche durch die Bewegung jener Geraden entsteht, durch die Gleichung zwischen partiellen Differentialen

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = c$$

ausgedrückt werden und das Integral dieser Gleichung wird seyn

$$z = cx + f(y),$$

wo f(y) eine *ganz willkürliche* Function von y bezeichnet. Dieselbe Fläche läſst sich auch auf folgende Weise darstellen. Die Gleichung einer bestimmten, in der Ebene der xz verzeichneten Geraden ist $z = cx + b$. Es bewege sich dann eine willkürliche und willkürlich gelegte Curve von einfacher oder doppelter Krümmung mit sich selbst parallel und so, daſs ein bestimmter Punct derselben immer durch jene Gerade geht, so wird diese Curve eine Fläche beschreiben, deren Gleichung

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = c$$

oder

$$z = cx + f(y)$$

ist. Ist für einen besondern Fall die Gröſse $c = 0$, so hat man

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0 \text{ oder } z = f(y)$$

für die Gleichung einer Ebene, die durch die Bewegung einer Geraden entsteht, die in allen ihren Lagen mit der Axe der x parallel bleibt. Bewegt man daher mit ganz willkürlichen Zügen der Hand einen geradlinigen Stab so, daſs er bei dieser Bewegung seiner ersten ursprünglichen Lage immer parallel bleibt, so wird, wenn man jene erste Lage für die Axe der x annimmt, die von dem Stabe im Raume beschriebene Fläche durch die Gleichung

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0 \text{ oder } z = f(y)$$

ausgedrückt werden.

II. Um ebenso, in einem zweiten Beispiele, die Construction der Fläche zu finden, deren Gleichung

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{a}{z}$$

ist, so hat man für die bekannte Gleichung der Apollonischen Parabel, deren halber Parameter a ist, die Gleichung

$$z^2 = 2ax.$$

Die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die geometrische Tangente dieser Parabel in jedem ihrer Puncte mit der Axe der x bildet, ist aber

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{a}{z}$$

und daraus folgt sofort, dafs diese Parabel, wenn sie sich stets parallel mit der Ebene der xz bewegt, die gesuchte Fläche beschreiben wird, deren Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{a}{z}$$

und deren endliche Gleichung daher

$$z^2 = 2ax + F(y)$$

ist, wo wieder $F(y)$ irgend eine ganz willkürliche Function von y bezeichnet.

III. Nehmen wir als drittes Beispiel die Gleichung zwischen partiellen Differentialen

$$a\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + b\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 1,$$

wo a und b constante Gröfsen bezeichnen. Um die Fläche zu finden, die durch diese Gleichung ausgedrückt wird, bemerken wir zuförderst, dafs die Gleichung der tangirenden Ebene einer jeden Fläche, in dem Puncte $x'\, y'\, z'$ derselben, folgende ist

$$z - z' = (x - x')\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + (y - y')\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \quad \ldots \quad (1)$$

und dafs ferner, wie aus den ersten Gründen der analytischen Geometrie bekannt ist, die gerade Linie, deren Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x &= az + \alpha \\ y &= bz + \beta \end{aligned}\right\} \ldots \quad (2)$$

sind, mit der Ebene, deren Gleichung

$$Lx + My + Nz = 1$$

seyn soll, dann parallel ist, wenn die Bedingungsgleichung statt hat

$$aL + bM + N = 0.$$

Dieses vorausgesetzt wird die Linie, deren Gleichungen (2) sind, mit der tangirenden Ebene (1) dann parallel seyn, wenn die Bedingungsgleichung

$$a.\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + b\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 1 \ldots (3)$$

besteht, und dieses ist zugleich der oben aufgestellte Ausdruck. Daraus folgt daher, daſs diese Gleichung (3) oder vielmehr die durch diese Gleichung bezeichnete krumme Oberfläche durch die Bewegung einer Ebene entsteht, die in allen ihren Lagen mit der Linie (2) parallel ist. Diese Fläche ist daher ein *Cylinder* in der allgemeinsten Bedeutung des Worts, wo die Basis desselben eine ganz willkürliche Curve von einfacher oder doppelter Krümmung seyn kann. Ist $b = 0$, so gehn die Gleichungen der Geraden (2) in die folgende einfache über

$$x = az + \alpha,$$

also wird auch die Gleichung (3), wenn man $b = 0$ und $a = \frac{1}{c}$ setzt,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = c,$$

welches wieder der erste der oben betrachteten Fälle ist.

IV. Nach diesen Vorbereitungen gehn wir nun zu der gesuchten Integration unserer drei partiellen Differentialgleichungen über, die sich alle, wie man sieht, auf die folgende Form bringen lassen

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 . \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \ldots (C)$$

Um das Integral der Gleichung (C) zu finden, wollen wir zuerst bemerken, daſs das der Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = 0$$

offenbar gleich ist

$$z = \varphi(x) + \psi(y),$$

wo $\varphi(x)$ irgend eine Function von x und $\psi(y)$ von y ist. Denn wenn man von dem letzten Ausdrucke das Differential von z in Beziehung auf x sucht und der Kürze wegen $\frac{\partial . \varphi(x)}{\partial x}$ durch $\varphi'(x)$ bezeichnet, so hat man

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \varphi'(x),$$

und da $\varphi'(x)$ wieder eine bloſse Function von x, ohne y, seyn muſs, so ist das Differential des letzten Ausdrucks in Beziehung auf y oder

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = 0, \text{ wie zuvor.}$$

Hätte man ebenso die Gleichung $z = \varphi(x) + \psi(y)$ zuerst in Beziehung auf y differentiirt, so würde man erhalten haben

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \psi'(y)$$

und davon ist wieder das Differential in Beziehung auf x

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right) \text{ oder } \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = 0, \text{ wie zuvor.}$$

Dieses vorausgesetzt sey nun

$$x = y' + \frac{x'}{a}$$

und

$$y = y' - \frac{x'}{a},$$

durch welche beide Gleichungen also bloſs die beiden Coordinaten x und y mit anderen x' und y' verwechselt werden, so daſs z. B die Curve, welche durch eine Gleichung zwischen diesen beiden Coordinaten x, y oder x', y' ausgedrückt wird, unverändert bleibt. Diese zwei Gleichungen geben, wenn man sie in Beziehung auf ihre veränderlichen Gröſsen differentiirt,

$$\partial x = \partial y' + \frac{\partial x'}{a}$$

und

$$\partial y = \partial y' - \frac{\partial x'}{a}$$

und das Product dieser beiden Ausdrücke ist

$$\partial x \partial y = \partial y'^2 - \frac{\partial x'^2}{a^2},$$

so dafs demnach die obige Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = 0$$

in die folgende übergeht

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y'^2 - \frac{\partial x'^2}{a^2}}\right) = 0,$$

die auch so geschrieben werden kann

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y'^2}\right) = a^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2}\right).$$

Allein dieses ist offenbar unsere obige Gleichung (C), wenn man blofs in ihr z in y und y in t übergehn läfst. Daraus folgt, dafs, wenn von den beiden Gleichungen

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}\right) = 0 \text{ und } \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) = a^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)$$

das Integral der einen bekannt ist, dadurch auch das Integral der andern gegeben wird. Es ist nämlich von

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}\right) = 0 \text{ das Integral } y = \varphi(x) + \psi(t)$$

und ebenso ist von

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) = a^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) \text{das Integral } y = \varphi\left(t + \frac{x}{a}\right) + \psi\left(t - \frac{x}{a}\right)$$

oder auch, was dasselbe ist, da φ und ψ ganz willkürliche Functionen von $t \pm \frac{x}{a}$ oder von $x \pm at$ bezeichnen,

$$y = \varphi(x + at) + \psi(x - at) \ldots (C')$$

In der That giebt diese letzte Gleichung, wenn man sie zweimal in Beziehung auf t und auf x differentiirt,

$$\frac{\partial y}{\partial t} = a.\varphi'(x + at) - a.\psi'(x - at),$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2.\varphi''(x + at) - a^2.\psi''(x - at),$$

und ebenso

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \varphi'(x + at) + \psi'(x - at),$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \varphi''(x + at) + \psi''(x - at),$$

so dafs also wieder

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) = a^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)$$

ist, wie es der Gleichung (C) gemäfs seyn soll.

Diese Gleichung (C), so wie ihr Integral (C′), drückt also, wie überhaupt jede einzelne Gleichung zwischen drei Coordinaten, eine krumme Fläche aus. Um diese Fläche zu construiren oder dieselbe im Raume darzustellen, wollen wir wieder die einfachere jener beiden identischen Gleichungen oder den Ausdruck

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = 0$$

vornehmen, deren Integral ist

$$z = \varphi(x) + \psi(y).$$

Man verzeichne in der coordinirten Ebene der xz eine willkürliche Curve $\xi\zeta$ und ebenso in der Ebene yz eine andere willkürliche Curve $v\zeta$, wo diese beiden Curven aus mehrern andern Curven zusammengesetzt, an mehrern Stellen ganz unterbrochen oder discontinuirt und selbst ganz gesetzlos seyn können. Man nehme $AP = x$ und darauf senkrecht in der Ebene der xz die Gerade $PN = \varphi(x)$. Man nehme ebenso $AQ = y$ und darauf senkrecht in der Ebene der yz die Gerade $QN' = \psi(y)$. Man ziehe QM' mit AP und PM' mit AQ parallel und errichte in dem Puncte M', senkrecht auf der Ebene der xy, das Loth $M'M = z$ so, dafs $M'M = P'N + QN'$, das heifst, dafs $z = \varphi(x) + \psi(y)$ ist, so wird M ein Punct der gesuchten Fläche seyn, die durch die Gleichung (C) vorgestellt wird. Dasselbe folgt auch ohne Zeichnung schon unmittelbar aus der gegebenen Gleichung

Fig. 186.

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = 0.$$

Setzt man nämlich der Kürze wegen

$$p = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{ und } q = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

so kann jene Gleichung entweder durch $\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0$, oder auch durch $\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) = 0$ ausgedrückt werden. Allein die Gleichung $\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0$ sagt, dafs der Winkel, dessen trigonometrische Tangente p ist, unabhängig von y; d. h., dafs die Curve $\xi\zeta$ selbst ganz unabhängig von y ist, also in der coordinirten Ebene der xz liegt. Ebenso zeigt auch die Gleichung $\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) = 0$, dafs die Curve $v\zeta$ von x unabhängig seyn und daher in der Ebene der yz liegen müsse[1].

Anmerkung I. Da die Functionen, welche das Integral der Gleichung (C) enthält, ganz willkürlich sind, so kann man denselben verschiedene Gestalten geben je nach dem Zwecke, den man dadurch erreichen will. Eine der einfachsten dieser Gestalten oder eines der einfachsten dieser Integrale der gegebenen Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) = a^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)$$

ist die folgende:

$$y = A \operatorname{Sin.} \frac{n\pi x}{\lambda} \,.\, \operatorname{Cos.} \frac{na\pi t}{\lambda} \quad \ldots \quad (1)$$

wo A und n constante Gröfsen, λ die Länge der Welle (§. 2.) und π das Verhältnifs der Peripherie des Kreises zum Durchmesser bezeichnet. Diese Formel ist zuerst von dem englischen Geometer Taylor aufgestellt worden, noch ehe die allgemeine Integration der Gleichung (C) durch d'Alembert gegeben wurde. In der That giebt die Gleichung (1), wenn man sie in Beziehung auf t differentiirt,

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{na\pi}{\lambda} \,.\, A \operatorname{Sin.} \frac{n\pi x}{\lambda} \,.\operatorname{Sin.} \frac{na\pi t}{\lambda},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\left(\frac{na\pi}{\lambda}\right)^2 A \operatorname{Sin.} \frac{n\pi x}{\lambda} \operatorname{Cos.} \frac{na\pi t}{\lambda},$$

---

1 Vergl. über die Integration dieser Gleichung Lacroix Calcul Diff. et Int. T. II. p. 686 und über die Gleichungen mit partiellen Differentialen Arbogast Mém. sur la nature des fonctions arbitraires, eine im J. 1790 von d. Petersb. Akademie gekrönte Preisschrift.

und ebenso durch die Differentiation in Beziehung auf x

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{n\pi}{\lambda} \text{ A Cos. } \frac{n\pi x}{\lambda} \text{ Cos. } \frac{n a \pi t}{\lambda}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\left(\frac{n\pi}{\lambda}\right)^2 \text{ A Sin. } \frac{n\pi x}{\lambda} \text{ Cos. } \frac{n a \pi t}{\lambda},$$

so dafs also durch diese Werthe von $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ und $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ der Gleichung (1) vollkommen genügt wird.

Eine zweite, in den meisten Fällen sehr anwendbare Form dieses allgemeinen Integrals ist in der Gleichung enthalten

$$y = \text{A Sin.} \left[\frac{2\pi}{\lambda}(at - x) + C\right] \ldots \quad (2)$$

wo wieder A, C und λ constante Gröfsen bezeichnen, von denen die letzte die Länge der Welle anzeigt. Diese Gleichung giebt, wenn man sie zweimal in Beziehung auf t differentiirt,

$$\frac{\partial y}{\partial t} = A\left(\frac{2a\pi}{\lambda}\right) \text{ Cos. } \left[\frac{2\pi}{\lambda}(at - x) + C\right],$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A\left(\frac{2a\pi}{\lambda}\right)^2 \text{ Sin. } \left[\frac{2\pi}{\lambda}(at - x) + C\right],$$

und ebenso giebt die doppelte Differentiation in Beziehung auf x

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -A\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \text{ Cos. } \left[\frac{2\pi}{\lambda}(at - x) + C\right],$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -A\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \text{ Sin. } \left[\frac{2\pi}{\lambda}(at - x) + C\right],$$

so dafs also auch diese Werthe von $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ und $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ der Gleichung (C) vollkommen entsprechen. Bemerken wir noch, dafs man, wenn a die Geschwindigkeit der Fortpflanzung des Lichts und τ die Zeit einer ganzen Vibration bezeichnet, nach §. 2. hat $\lambda = a\tau$, und dafs daher die Gleichung (2) auch so ausgedrückt werden kann

$$y = \text{A Sin.} \left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right) + C\right].$$

Anmerkung II. Wenn aber der aufgestellten Gleichung (C) der Werth) nach der gefundenen Gleichung (2))

$$y = A \operatorname{Sin.} \left[\frac{2\pi}{\lambda}(at - x) + C\right]$$

entspricht, so entspricht ihr auch der ähnliche Ausdruck

$$y = A \operatorname{Sin.} \left[\frac{2(n+1)\pi}{\lambda}(at - x) + C\right],$$

wo n alle ganze Zahlen 1, 2, 3 . . bezeichnen kann, und ebenso auch die analogen Ausdrücke

$$y = A' \operatorname{Sin.} \left[\frac{2(n+1)\pi}{\lambda}(at - x) + C\right],$$

$$y = A'' \operatorname{Sin.} \left[\frac{2(n+1)\pi}{\lambda}(at - x) + C\right] \text{ u. s. w.},$$

wo wieder A', A'', A''' . . constante Gröſsen bezeichnen. Ja nicht nur jeder dieser einzelnen Werthe von y, sondern auch ihre algebraische Summe wird der obigen Gleichung (C) entsprechen, so daſs man daher für das gesuchte Integral dieser Gleichung den Ausdruck haben wird

$$y = \Sigma . A^{(n)} . \operatorname{Sin.} \left[\frac{2(n+1)\pi}{\lambda}(at - x) + C\right] \ldots (3),$$

wo Σ das bekannte Summenzeichen ist und wo n die natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3 . . bezeichnet. Dieser Uebergang von der Gleichung (2) zu der viel allgemeineren und aus unzähligen unter sich ähnlichen Gliedern bestehenden Gleichung (3) ist aber dadurch begründet oder möglich gemacht, daſs die Differentialgleichung (C)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 . \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

um die es sich hier handelt, eine lineäre Gleichung, d. h. eine solche ist, in welcher die in ihr vorkommenden Differentialcoefficienten

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) \text{ und } \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)$$

nur in ihrer ersten Potenz vorkommen. Denn nach den ersten Principien der Differentialrechnung ist das Differential von der Summe einer Anzahl von veränderlichen Gröſsen dasselbe

mit der Summe aller Differentiale dieser einzelnen Gröſsen, oder es ist

$$\partial[ax + by + cz + ..] = a\partial x + b\partial y + c\partial z + ..$$

Nicht so aber wird man auch das Differential von dem Quadrate einer Summe von Gröſsen gleich der Summe aller Differentiale von den Quadraten dieser einzelnen Gröſsen setzen können, oder es wird nicht seyn

$$\partial.[ax + by + cz + ..]^2 = \partial.a^2x^2 + \partial.b^2y^2 + \partial.c^2y^2 + ..,$$

und ebenso für alle übrigen Exponenten. Aus demselben Grunde wird man also auch das oben angeführte allgemeine Integral der Gleichung (C) nicht bloſs durch

$$y = \varphi(x \pm at),$$

sondern überhaupt durch eine willkürliche Anzahl solcher Ausdrücke, also durch

$$y = \varphi(x \pm at) + \psi(x \pm at) + \chi(x \pm at) + ..,$$

also kurz durch die Gleichung

$$y = \Sigma.\varphi(x \pm at)$$

bezeichnen können.

Anmerkung III. Es giebt aber noch eine andere merkwürdige und allgemeinere Form dieses Integrals, nämlich

$$y = \frac{2}{\lambda} A \,\mathrm{Sin.}\frac{n\pi x}{\lambda} \,\mathrm{Cos.}\frac{na\pi t}{\lambda} + \frac{2}{na\pi} B \,\mathrm{Sin.}\frac{n\pi x}{\lambda} \,\mathrm{Sin.}\frac{na\pi t}{\lambda}$$

die der Gleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

ebenfalls entspricht, wie man sich durch Differentiation leicht überzeugen wird, und in diesem Ausdrucke können die Gröſsen A und B nicht bloſs Constanten vorstellen, wie zuvor, sondern auch durch sogenannte bestimmte (zwischen zwei bestimmten Grenzen der Veränderlichen enthaltene) Integrale und selbst eine unbestimmte Summe solcher Integrale bezeichnen. Welches nämlich auch die Gröſsen $y = \varphi(x)$ und $\frac{\partial y}{\partial t} = \varphi'(x)$ seyn mögen, wenn sie nur für $x = 0$ und für

$x = \lambda$ beide verschwinden, so hat man, wie Lagrange zuerst gezeigt hat, immer die beiden Ausdrücke[1]

$$\left.\begin{aligned} \varphi x &= \frac{2}{\lambda} \Sigma \left(\int_0^\lambda \text{Sin.} \frac{n\pi x'}{\lambda} \varphi x' \partial x' \right) \text{Sin.} \frac{n\pi x}{\lambda} \\ &\text{und} \\ \varphi' x &= \frac{2}{\lambda} \Sigma \left(\int_0^\lambda \text{Sin.} \frac{n\pi x'}{\lambda} \varphi' x' \partial x' \right) \text{Sin.} \frac{n\pi x}{\lambda} \end{aligned}\right\} \ldots (a)$$

Substituirt man also in den vorigen Ausdrücken für y

statt A die Gröfse $\int_0^\lambda \text{Sin.} \frac{n\pi x'}{\lambda} \varphi x' \partial x'$

und

statt B die Gröfse $\int_0^\lambda \text{Sin.} \frac{n\pi x'}{\lambda} \varphi' x' \partial x'$,

so erhält man für das gesuchte allgemeine Integral der Gleichung (C)

$$y = \frac{2}{\lambda} \Sigma. \left(\int_0^\lambda \text{Sin.} \frac{n\pi x'}{\lambda} \varphi x' \partial x' \right). \text{Sin.} \frac{n\pi x}{\lambda} \text{Cos.} \frac{na\pi t}{\lambda}$$

$$+ \frac{2}{na\pi} \Sigma. \left(\int_0^\lambda \text{Sin.} \frac{n\pi x'}{\lambda} \varphi' x' \partial x' \right). \text{Sin.} \frac{n\pi x}{\lambda} \text{Sin.} \frac{na\pi t}{\lambda} \ldots (4)$$

und man wird sich auch hier wieder leicht durch Differentiation überzeugen, dafs jedes einzelne Glied, also auch die Summe aller Glieder der letzten Gleichung den ursprünglichen Ausdruck

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

wieder giebt.

Setzt man in dieser Gleichung (4) die Gröfse $x = 0$ oder auch $x = \lambda$, so erhält man $y = 0$, welches auch der Werth von t seyn mag. Differentiirt man aber die Gleichung (4) in Beziehung auf y und t, so erhält man

1 S. Poisson Traité de Mécanique. 2me éd. T. I, p. 638. T. II. p. 303.

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{2}{\lambda} \Sigma . \left(\int_0^\lambda \text{Sin.} \frac{n\pi x'}{\lambda} \varphi' x' \partial x' \right) . \text{Sin.} \frac{n\pi x}{\lambda} \text{Cos.} \frac{n a \pi t}{\lambda}$$

$$- \frac{2 a n \pi}{\lambda^2} \Sigma . \left(\int_0^\lambda \text{Sin.} \frac{n\pi x'}{\lambda} \varphi x' \partial x' \right) . \text{Sin.} \frac{n\pi x}{\lambda} \text{Sin.} \frac{n a \pi t}{\lambda} \ldots (5)$$

wo wieder n eine ganze und positive Zahl bezeichnet und wo das Summenzeichen Σ sich auf alle Werthe von $n = 1$ bis $n = \infty$ erstreckt. Macht man in den Gleichungen (4) und (5) die Gröſse $t = 0$, so erhält man

$$y = \varphi x \text{ und } \frac{\partial y}{\partial t} = \varphi' x,$$

wo nämlich die Werthe von φx und $\varphi' x$ durch die vorhergehenden Gleichungen (a) gegeben werden.

Anmerkung IV. Uebrigens kann man die Gleichungen für die Vibrationen des Lichts oder des Aethers auch auf folgende einfachere Weise finden. Da die Amplitüden dieser Vibrationen so ungemein klein sind, so kann man annehmen, daſs die accelerirende Kraft, die auf das Aethertheilchen wirkt, immer proportional ist der Distanz, die das bewegte Aethertheilchen von dem Orte seines Gleichgewichts trennt. Ist daher y diese Distanz, so hat man für die Geschwindigkeit v des Aethertheilchens zur Zeit t

$$v = - \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Bezeichnet dann E eine der Elasticität des Aethers proportionirte Gröſse, so kann man annehmen

$$- \frac{\partial v}{\partial t} = E y \text{ oder } \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + E y = 0$$

und das Integral dieser Gleichung, die nur gewöhnliche, nicht partielle Differentiale enthält, ist

$$y = A \,\text{Cos.} (t \sqrt{E} + C),$$

wo A und C die zwei Constanten der Integration bezeichnen. Nimmt man für den Anfang der Zeit t den Augenblick, wo die Vibration des Aethertheilchens eben anfängt, so hat man $y = A$ für $t = 0$, woraus folgt, daſs auch die Constante $C = 0$ ist, so daſs daher die letzte Gleichung in die folgende einfachere übergeht

$$y = A \text{ Cos. } t\sqrt{E}.$$

Um die Periode τ einer ganzen Oscillation zu finden, wird man $t\sqrt{E} = 2\pi$ setzen, so dafs also $\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{E}}$ wird und man hat

$$y = A \text{ Cos. } \frac{2\pi t}{\tau}$$

oder endlich, da die Länge der Welle $\lambda = a\tau$ ist,

$$y = A \text{ Cos. } \frac{2\pi a t}{\lambda} \quad . \; . \; . \quad (6)$$

und davon ist das erste Differential, wenn man der Kürze wegen $\frac{2\pi A a}{\lambda} = B$ setzt,

$$-\frac{\partial y}{\partial t} \text{ oder } v = B \text{ Sin. } \frac{2\pi a t}{\lambda} \quad . \; . \; . \quad (7)$$

Die Gleichung (6) giebt den Ort des vibrirenden Lichttheilchens in Beziehung auf seinen ursprünglichen Ort des Gleichgewichts, und die Gleichung (7) giebt die Geschwindigkeit dieses vibrirenden Lichttheilchens oder auch die Geschwindigkeit desjenigen vibrirenden Aethertheilchens, das sich in dem Mittelpuncte der Vibration befindet. Daraus folgt aber sofort, dafs man für die Vibration eines jeden andern Aethertheilchens, dessen Distanz von dem Mittelpuncte der Vibration (oder von dem vibrirenden Lichttheilchen) gleich x ist, haben wird

$$y = A \text{ Cos. } \frac{2\pi}{\lambda}(at - x) \text{ und } v = B \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda}(at - x).$$

Wenn nun die Anzahl der auf einander folgenden Wellen sehr grofs ist, so kann man für x auch die Gröfse $x + n\lambda + D$ setzen, wo n eine ganze Zahl und D irgend eine andere Constante bezeichnet, und dadurch gehn die beiden letzten Gleichungen in die folgenden über

$$y = A \text{ Cos. } \frac{2\pi}{\lambda}(at - x + D) \quad . \; . \; . \quad (8)$$

und

$$v = B \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda}(at - x + D) \quad . \; . \; . \quad (9)$$

weil nämlich die Sinus und Cosinus eines Bogens nicht geändert werden, wenn man diesen Bogen um $2n\pi$ vergröfsert.

Diese beiden Gleichungen stimmen aber gänzlich mit der vorigen Gleichung (2) der Anmerkung (I) und mit ihrem Differential überein. Zwar wird dort die Gröfse y durch den Sinus und $v = -\frac{\partial y}{\partial t}$ durch den Cosinus des Winkels

$$\left[\frac{2\pi}{\lambda}(at-x)+C\right]$$

ausgedrückt, während hier umgekehrt y durch den Cosinus und v durch den Sinus des Winkels

$$\left[\frac{2\pi}{\lambda}(at-x)+D\right]$$

gegeben ist. Da aber die Gröfsen C und D willkürlich sind, so können beide Ausdrücke als identisch betrachtet werden.

Es kann daher sowohl die Amplitüde y der Welle, als auch die Geschwindigkeit v der Vibration eines Aethertheilchens durch die Gleichung (2) oder durch eine Gleichung von der Form

$$y = A\,\text{Sin.}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(at-x)+C\right]$$

ausgedrückt werden. In dieser Gleichung ist C eine Constante, die zwischen den Grenzen 0 und λ enthalten ist und wodurch eigentlich die *Phase* (§. 1. II.) der Welle ausgedrückt wird, und die Gröfse y kann sowohl die Geschwindigkeit als auch die Amplitüde der Vibration bezeichnen.

Anmerkung V. Es wurde bereits oben (zu Ende des §. 14.) gesagt, dafs sich jede Vibration in drei andere unter sich senkrechte auflösen läfst. Nimmt man die Richtungen, welche jedes Aethertheilchen zur Zeit t in seiner Vibration annimmt, den drei senkrechten Coordinaten der x, y und z parallel, so lassen sich für dieselbe Zeit die Entfernungen des Theilchens von dem Orte seines Gleichgewichts durch folgende Ausdrücke bestimmen:

$$x = A\,\text{Cos.}\frac{2\pi}{\lambda}(at-D);\quad y = A'\,\text{Cos.}\frac{2\pi}{\lambda}(at-D');$$

$$z = A''\text{Cos.}\frac{2\pi}{\lambda}(at-D'').$$

Eliminirt man also aus diesen drei Gleichungen die Zeit t, so wird man folgende zwei Gleichungen erhalten:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{x}{A}\right)^2+\left(\frac{z}{A''}\right)^2-\frac{2xz}{AA''}\,\text{Cos.}\,\frac{2\pi}{\lambda}(D-D'')=\text{Sin.}^2\frac{2\pi}{\lambda}(D-D'')\\ \left(\frac{y}{A'}\right)^2+\left(\frac{z}{A''}\right)^2-\frac{2yz}{A'A''}\,\text{Cos.}\,\frac{2\pi}{\lambda}(D'-D'')=\text{Sin.}^2\frac{2\pi}{\lambda}(D'-D'')\end{aligned}\right\}$$

und diese zwei Gleichungen gehören für die Curve von doppelter Krümmung, d. h. für die Trajectorie, die von dem Lichttheilchen während seiner Vibration im Raume beschrieben wird.

Anmerkung VI. Um endlich noch zu sehn, auf welche Weise alle vorhergehende Werthe von y die Schwingungen der Saiten oder die der Luft und des Aethers ausdrücken, wollen wir den obigen Ausdruck (zu Ende der Anmerkung I)

$$y = A\ \text{Sin.}\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{x}{\lambda}\right)+C\right]$$

wieder vornehmen und zur gröſsern Einfachheit die Gröſsen C und x gleich Null setzen; so daſs man hat

$$y = A\ \text{Sin.}\ \frac{2\pi t}{\tau},$$

wo τ die Zeit einer Schwingung bezeichnet. In dieser Gleichung wird der Werth von y gleich Null, so oft die Zeit t, die seit dem Anfange der Schwingungen verflossen ist, ein Multiplum von der Schwingungszeit τ wird, d. h. also, im Anfange und am Ende einer jeden Schwingung. So oft t um $\frac{1}{2}\tau$ wächst, ändert y sein Zeichen, behält aber seinen vorigen Werth bei, weil dann der vorige Werth von $\frac{2\pi t}{\tau}$ in $\frac{2\pi t}{\tau}+\pi$ übergeht. Für $t=\frac{1}{4}\tau=\frac{5}{4}\tau=\frac{9}{4}\tau$.. (das heiſst, am Ende der ersten der vier *Phasen* (§. 1.), in welche jede Welle oder jede Schwingung eingetheilt wird) hat y seinen gröſsten positiven Werth, und ebenso hat y für

$$t=\tfrac{3}{4}\tau=\tfrac{7}{4}\tau=\tfrac{11}{4}\tau\,..$$

oder am Ende jeder dritten Phase seinen gröſsten negativen Werth u. s. w., wie auch z. B. die gegebene Zeichnung darstellt, wenn man die Welle in dem Puncte A anfangen läſst und die Ordinaten PM = y in den beiden ersten Phasen

Fig. 172.

AmC der Welle positiv und in den beiden andern CnB negativ annimmt. So wie y die Ordinate PM für jeden Punct M der Curve AmCnB... vor- und rückwärts des in der Figur gezeichneten Theils dieser Curve ausdrückt, so wird durch $\frac{\partial y}{\partial t}$ die Geschwindigkeit der Bewegung dieses Punctes in einer auf die Axe ACB senkrechten Richtung bezeichnet, wo die Curve AmCnB eigentlich die Projection des wahren Wegs des beweglichen Puncts (oder des Elements der Welle) in der Ebene der xy bezeichnet. Die letzte Gleichung

$$y = A\,\text{Sin.}\,\frac{2\pi t}{\tau} = A\,\text{Sin.}\,\frac{2a\pi t}{\lambda}$$

und deren Differential

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{2A\pi}{\tau}\,\text{Cos.}\,\frac{2\pi t}{\tau} = \frac{2aA\pi}{\lambda}\,\text{Cos.}\,\frac{2a\pi t}{\lambda}$$

zeigt, daſs die Werthe von y und von $\frac{\partial y}{\partial t}$ wieder dieselben werden, so oft die Welle wieder in dieselbe Phase tritt, und daſs daher die Welle, in Beziehung auf den Ort und auf die Geschwindigkeit aller ihrer Puncte, am Ende einer jeden Zeit τ oder am Ende eines jeden Wegs $\frac{\lambda}{a}$ wieder in denselben Zustand tritt, den sie am Anfange dieser Zeit oder im Anfange dieses Wegs gehabt hat. Im leeren Raume, und wenn man die beiden Endpuncte einer Saite ganz fest annimmt, wird demnach diese Saite eine unbestimmte Anzahl von kleinen Vibrationen machen, deren Dauer $\tau = \frac{\lambda}{a}$ ist. Allein der Widerstand der Luft und die Mittheilung eines Theils der Bewegung der Saite an jene zwei fixen Endpuncte derselben wird die Amplitüde dieser Schwingungen (oder die gröſsten positiven und negativen Werthe von y) nach und nach vermindern, ohne aber den Isochronismus dieser Schwingungen merklich zu ändern, ganz so, wie dieses auch bei der ganz ähnlichen Bewegung eines gewöhnlichen Pendels der Fall ist. Wenn also während einer Zeitsecunde n solche Schwingungen statt haben, deren jede die Dauer τ hat, so ist die Länge λ einer jeden Welle $\lambda = a\tau$ also auch $\tau = \frac{\lambda}{a}$, und da zuvor am Ende der Gleichungen (B) die Gröſse

$$a^2 = \frac{g\lambda P}{p}$$

war, so ist auch

$$\tau = \sqrt{\frac{p\lambda}{gP}}$$

und endlich, da $n\tau = 1$ Zeitsecunde ist,

$$n = \sqrt{\frac{gP}{p\lambda}}$$

übereinstimmend mit dem, was bereits oben (in §. 3.) gesagt worden ist. Für eine und dieselbe Saite ist also, wie diese Gleichung zeigt, diese Zahl n (das heifst, die *Höhe* des Tons) der Quadratwurzel ihrer Spannung P proportional; für zwei aus derselben Masse geformte Saiten und von derselben Dicke ist das Gewicht p derselben ihrer Länge λ proportional, also verhält sich auch die Zahl n, wenn die Spannungen beider Saiten dieselben sind, wie verkehrt die Längen derselben; endlich für zwei gleichlange und gleichgespannte Saiten verhält sich die Zahl n wie verkehrt die Quadratwurzel aus ihrem Gewichte p.

Alles, was hier von den *Transversalschwingungen* einer Saite gesagt worden ist, wird sich unmittelbar auch auf die *Längenschwingungen* derselben anwenden lassen, wenn man nur in den vorhergehenden Ausdrücken statt der Gröfse a die Gröfse b substituirt, wie dieses unmittelbar aus den Gleichungen (B) hervorgeht, von welchen die erste für x und b den Längenschwingungen angehört. Setzt man in den vorhergehenden Integralen der Gleichung (C) statt y die Gröfse x und statt $\frac{\partial y}{\partial t}$ die Gröfse $\frac{\partial x}{\partial t}$, so wird man den Ort und die Geschwindigkeit jedes Elements der Welle in den Längenschwingungen erhalten. Nennt man dann τ' die ganze Dauer einer Längenschwingung und n' die Anzahl dieser Schwingungen in einer Zeitsecunde, so hat man, wie zuvor,

$$\tau' = \frac{\lambda}{a},$$

oder vielmehr, da für die Längenschwingungen a in b übergeht,

$$\tau' = \frac{\lambda}{b}$$

oder, da (nach dem Ende des §. 14.)

$$b = \sqrt{\frac{g\lambda q}{p}}$$

ist, so hat man auch

$$\tau' = \sqrt{\frac{p\lambda}{gq}},$$

oder endlich, da $n'\tau = 1$ Zeitsecunde ist,

$$n' = \sqrt{\frac{gq}{p\lambda}}.$$

Vergleicht man diese zwei Werthe von n und n', von welchen der erste für die Transversal- und der zweite für die Längenschwingungen gehört, so erhält man

$$\frac{n'}{n} = \sqrt{\frac{q}{P}}.$$

Dieser letzte Ausdruck scheint mit dem oben (§. 4.) angeführten auf den ersten Blick nicht übereinzustimmen. Aber es bezeichnet, wie wir oben gesagt haben, P die Spannung der Saite im Zustande des Gleichgewichts, und q ist ein gegebenes constantes Gewicht, das von der Materie und der Dicke der Saite abhängt. Dieses Gewicht q bezeichnet also diejenige Spannung, die man anwenden muſs, um die natürliche Länge der Saite zu verdoppeln, wenn man das Gesetz der Ausdehnung der Saite constant annimmt. In der That, setzt man voraus, daſs für eine gegebene Spannung Δ die Länge eines bestimmten Theils dieser Saite sich in dem Verhältniſs von $(1+\delta)$ zur Einheit ausdehnt, so wird das Element M dieser Saite, das im Zustande des Gleichgewichts und in dem der Bewegung die Spannungen P und T erleidet, sich in den Verhältnissen von $1 + \frac{\delta P}{\Delta}$ und $1 + \frac{\delta T}{\Delta}$ zur Einheit verlängern; die Längen ∂x und ∂s in diesen zwei Zuständen werden sich also wie $\Delta + \delta P$ zu $\Delta + \delta T$ verhalten, so daſs man haben wird

$$\frac{\partial s}{\partial u} = \frac{\Delta + \delta T}{\Delta + \delta P},$$

woraus folgt, wenn man das Quadrat von δ wegläſst,

$$\frac{\partial s - \partial u}{\partial u} = \frac{\delta (T - P)}{\Delta}.$$

Es war aber (oben, kurz vor den Gleichungen (B))

$$\partial s - \partial u = \partial x \text{ und } T - P = \frac{q \partial x}{\partial u},$$

also ist auch der letzte Ausdruck

$$q = \frac{\Delta}{\delta},$$

das heiſst, q ist die Spannung, die zu der Verlängerung $\delta = 1$ der Saite gehört, oder diejenige Spannung, welche die Länge der Saite verdoppeln würde, wenn die Verlängerung derselben immerfort gleichförmig zunehmen sollte. Da aber die Spannung P einer tönenden Saite stets sehr weit von jener entfernt ist, welche die Länge dieser Saite verdoppeln würde, so folgt, daſs das Verhältniſs der Längen zu den Transversalschwingungen oder daſs die Gröſse

$$\frac{n'}{n} = \sqrt{\frac{q}{P}}$$

immer sehr bedeutend gegen die Einheit seyn müsse. Man kann sie *a priori* durch die Verlängerung einer Saite bestimmen, die durch eine direct gemessene Spannung P erzeugt wird. Denn nennt man α diese Verlängerung, so hat man

$$P = \frac{\alpha \Delta}{\delta \lambda},$$

weil $\delta \lambda$ die zu der Spannung Δ gehörende Verlängerung ist. Substituirt man diese Werthe von

$$P = \frac{\alpha \Delta}{\delta \lambda} \text{ und } q = \frac{\Delta}{\delta}$$

in dem vorhergehenden Ausdrucke

$$\frac{n'}{n} = \sqrt{\frac{q}{P}},$$

so erhält man

$$\frac{n'}{n} = \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}$$

übereinstimmend mit der oben (§. 4.) angeführten Gleichung.

C. Interferenz des Lichtes.

16) Interferenz des Lichtes in ihrer einfachsten Gestalt.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen über die Gleichungen (B), von welchen die ganze Theorie der Undulation abhängt, wollen wir jetzt zu den verschiedenen Anwendungen und Folgerungen übergehn, die sich aus jenen Gleichungen ergeben. Eine der interessantesten und zugleich für die Undulationstheorie wichtigsten Erscheinungen ist die, die man unter der Benennung der *Interferenz* des Lichtes begreift. Durch diese Erscheinung ist die Wellentheorie des Lichtes eigentlich begründet und in ihren Hauptzügen ausgebildet worden, so wie durch sie der nunmehr unbestrittene Vorzug dieser Theorie vor der Emanationshypothese begründet worden ist, daher es angemessen erscheinen wird, die folgenden Betrachtungen ebenfalls mit ihr zu beginnen.

Um uns zuerst mit der Thatsache, um die es sich hier handelt, bekannt zu machen, so bemerkte schon Grimaldi im sechzehnten Jahrhunderte, dafs ein erleuchteter Körper, wenn unter gewissen Umständen noch ein neues Licht auf ihn fällt, in dieser doppelten Beleuchtung dunkler erscheinen könne, als bei der einfachen; allein die wichtige Beobachtung ging unbemerkt vorüber, bis endlich Young im Jahre 1800 die Physiker wieder auf diesen merkwürdigen Gegenstand mit Nachdruck aufmerksam machte. Sein zu dieser interessanten Entdeckung führender Versuch war folgender. Er liefs das Sonnenlicht, nachdem es durch eine gefärbte Glasplatte MN gegangen war, durch zwei sehr feine und sehr nahe kreisförmige Oeffnungen O und O′, die in einem Schirm angebracht waren, in ein finsteres Zimmer fallen. Die durch diese Oeffnungen eintretenden Strahlenkegel OAB und O′AB werden sich bei C durchschneiden, und wenn man diese Durchschnittsstellen auf einer weifsen Tafel auffängt, so wird man auf dieser Tafel mehrere helle und dunkle Puncte neben einander bemerken. Wenn aber die eine der beiden Oeffnungen O oder O′ verschlossen wird, so verschwindet diese Abwechslung der hellen und dunklen Flecken auf der weifsen Tafel sogleich und an ihrer Stelle bemerkt man blofs ei-

Fig. 187.

nen gröſseren, in allen seinen Theilen nahe gleich lichten Flecken.

Noch viel augenfälliger wird man diesen Versuch nach Fresnel's Anleitung auf folgende Weise anstellen. In dem Fensterladen eines verfinsterten Zimmers bringt man in einer kleinen Oeffnung eine biconvexe Glaslinse von sehr kurzer Brennweite an, so daſs, wenn die Linse von der Sonne beschienen wird, im Brennpuncte des Glases ein kleines und sehr lebhaftes Lichtbild entsteht, welches wir als die Quelle desjenigen Lichtes betrachten wollen, dessen Interferenz wir zu untersuchen wünschen. Um ein homogenes oder bloſs einfarbiges Licht, in welchem die Erscheinung am deutlichsten hervortritt, zu erhalten, wird man vor die Linse, auf der andern Seite ihres Brennpunctes, eine z. B. dunkelroth gefärbte Glasscheibe stellen. In dem verfinsterten Zimmer aber wird man zwei ebene Spiegel (von Metall oder auch von auf der Rückseite geschwärztem Glase) so aufstellen, daſs sie nur sehr wenig gegen einander geneigt sind oder daſs sie mit einander sehr nahe einen Winkel von 180 Graden bilden, wo daher die von diesen beiden Spiegeln zurückgeworfenen Lichtstrahlen sich in zwei Bündeln kreuzen, die nur einen sehr kleinen Winkel unter einander bilden. Sey S der Brennpunct der Linse oder die erwähnte Lichtquelle und MN, MN′ die Durchschnittslinien der beiden Spiegel mit einer Ebene, die durch S geht und senkrecht auf derjenigen Linie steht, in welcher die beiden Spiegel selbst einander schneiden. Die einfallenden Strahlen SG und SG′ werden von den beiden Spiegeln nach GE und G′E zurückgeworfen und das Auge in E würde die beiden Bilder der Lichtquelle in den Puncten I und I′ hinter den Spiegeln zu sehn glauben. Statt dieses Auges wollen wir aber einen weiſsen Schirm KEK′ durch den Punct E so stellen, daſs er senkrecht auf der Linie EO stehe, die durch die Mitte O der Linie II′ geht. Nach den bekannten Reflexionsgesetzen werden die zwei reflectirten Strahlen GE und GE′ in dem Puncte E des Schirms dann ankommen, wenn sie, von der Lichtquelle S an gezählt, die zwei gleichen Wege SGE = SG′E = EI = EI′ zurückgelegt haben. Man wird daher die beiden Puncte I und I′ hinter den Spiegeln als zwei identische Lichtquellen betrachten können,

Fig. 188.

die man der ersten S substituirt hat, und ebenso wird man das von den beiden Spiegeln in G und G' zurückgeworfene Licht als reflectirte Lichtwellen ansehn, die alle die Gestalt einer Kugelfläche haben, deren Mittelpunct I und I' ist. Diese Lichtwellen werden dem Aether in jedem Augenblicke eine neue Vibration mittheilen, und da die Gröfse und Richtung dieser Vibrationen, wovon die einen von I, die andern von I' kommen, wegen des sehr kleinen Winkels IEI' bei beiden Wellenarten gleich und sehr nahe dieselben sind, so wird der Punct E des Schirms sehr glänzend und doppelt so hell erleuchtet erscheinen, als wenn nur einer der beiden Spiegel da wäre. In jedem andern Puncte P des Schirmes aber, aufser der auf II' gezogenen Normale OE, werden die von G und G' reflectirten Wellen, die von den Mittelpuncten I und I' zu kommen scheinen, nicht mehr, wie zuvor, je zwei zusammengehörende, paarweise zu derselben Zeit in dem Puncte E ankommen, sondern die eine wird um die Distanz PI'—PI=p später oder früher als die andere in dem Puncte E eintreffen. Ist nun diese Distanz p gleich einer halben Wellenlänge des Lichts, so werden die Aethertheilchen in P in jedem Augenblicke von zwei Geschwindigkeiten in Bewegung gesetzt werden, die einander an Gröfse gleich, aber in ihrer Richtung gerade entgegengesetzt sind. Die eine dieser Geschwindigkeiten wird das Aethertheilchen in demselben Augenblicke ebenso viel aufwärts, als die andere abwärts, oder ebenso viel vorwärts, als die andere rückwärts zu bewegen suchen, und das Resultat dieser beiden Bewegungen wird sehr nahe eine völlige Ruhe des Elements oder ein Minimum des Lichts, ein gänzlicher Mangel des Lichts seyn oder der Punct P des Schirms wird, in Vergleichung mit dem sehr hell erleuchteten Puncte E, dunkel erscheinen. Ist aber für einen andern Punct P' die oben angeführte Differenz p gleich einer ganzen Wellenlänge, so werden die von den beiden aus I und I' kommenden Wellen hervorgebrachten Vibrationen des Aethers für diesen Punct P' wieder übereinstimmen oder beide Wellen werden den Punct P nicht nur mit derselben Geschwindigkeit, sondern auch in derselben Richtung zu bewegen suchen, so dafs also auch die Bewegung dieses Punctes, so wie die unmittelbar daraus folgende Beleuchtung desselben wieder, wie in E, das Doppelte der einfachen Beleuchtung oder dafs in P'

wieder ein sehr hell beleuchteter Punct des Schirms seyn mufs. Da aber die Concordanz und die Discordanz der Wellen, also auch der Beleuchtung von dem gröfsten zu dem kleinsten Werthe derselben und umgekehrt auf eine nirgends unterbrochene oder auf eine stetige Weise fortschreitet, so wird auch das Licht zn beiden Seiten des Puncts E stetig ab- und wieder zu- und wieder abnehmen, oder man wird zu beiden Seiten des Puncts E auf dem Schirme helle und dunkle Streifen mit einander abwechseln sehn, wie dieses auch in der That den Beobachtungen vollkommen gemäfs ist. Man sieht daselbst sehr deutlich die hellrothen Streifen oder Fransen (wenn man, wie erwähnt, eine rothe Glasscheibe vor die Linse gesetzt hat) mit andern dunklen und fast schwarzen Fransen abwechseln. Alle sind unter sich parallel und äquidistant und ihre Anzahl steigt bis auf 20, ja selbst 30, obschon ihre Lebhaftigkeit abnimmt, wie ihre Entfernung von der Mitte E wächst.

Diese Abnahme der Streifen in gröfserer Weite von E hat ohne Zweifel ihren Grund darin, dafs man nur selten oder nie mit ganz homogenem (gleichfarbigem) Lichte experimentiren kann. Wenn aber auch Licht von andern Farben beigemischt ist, also auch Wellen von verschiedenen Längen zugleich in denselben Puncten des Aethers eintreffen, so wird es geschehn, dafs während z. B. für den Punct P die Differenz genau gleich 1, 2, 3 . . ganzen Wellenlängen des rothen Lichts ist, dasselbe für die anders gefärbten Strahlen nicht auch statt hat, und dafs daher dadurch die von den rothen Strahlen in P erzeugte gröfsere Lichtstärke von den andersgefärbten Strahlen wieder vermindert wird, was um so häufiger eintreten mufs, je weiter der Punct P von dem Mittelpuncte E entfernt ist. Wiederholt man dasselbe Experiment mit einem andern, z.B. mit blauem oder gelbem Lichte, so sieht man wieder jene Abwechselung der hellen und dunkeln Streifen, aber die *Breite* dieser Streifen ist für jede Farbe eine andere. Stellt man endlich gar kein gefärbtes Glas vor die Linse oder operirt man mit weifsem Lichte (d. h. mit allen Farben zugleich), so bemerkt man auf dem Schirm eine Aufeinanderfolge von Streifen, die aus allen jenen früheren gefärbten Streifen zusammengesetzt sind; der mittlere Streifen bei E ist weifs und zu beiden Seiten desselben sieht man dunkle mit

regenbogenfarbigen Fransen abwechseln, bis endlich die beiden äufsersten Grenzen des Lichtbildes wieder von weifsem Lichte eingefafst erscheinen. In allen den erwähnten Fällen verschwindet diese Abwechselung der Streifen des Schirms sogleich, wenn einer der beiden Spiegel weggenommen oder bedeckt wird, woraus daher die Nothwendigkeit des Zusammenkommens zweier Lichtbündel für die Erscheinung jener Streifen unmittelbar folgt.

Die oben erwähnte nur kurze Focaldistanz der Glaslinse ist ebenfalls nöthig, wenn das Experiment recht augenfällig erscheinen soll. Man mufs nämlich die erwähnte Lichtquelle oder den Brennpunct S der Linse als den kreisförmigen Durchschnitt eines Kegels (dessen Basis die Sonne und dessen Scheitel die Mitte der Linse ist) mit einer auf der Axe dieses Kegels senkrecht stehenden Ebene ansehn. Dieser Kreis wird offenbar desto kleiner seyn, je kürzer die Brennweite der Linse ist. Man sieht aber auf den ersten Blick, dafs dieser Kreis nur sehr klein seyn darf; denn man stelle sich nur vor, dafs bei den vorhin angeführten Versuchen der Punct S sich immer hin und her bewege, so werden dadurch auch jene Streifen auf dem Schirme in Bewegung gerathen, und ebenso wird auch jeder Punct der Peripherie dieses Kreises, wenn er eine beträchtliche Gröfse hat, seinen eigenen Streifen auf der Tafel erzeugen; alle diese Streifen werden sich über einander legen oder unter einander mischen und man wird sie nicht mehr deutlich unterscheiden können.

Endlich müssen auch die Lichtstrahlen, wenn sie eine Interferenz eingehn sollen, aus derselben Quelle S kommen. Man könnte jene Fransen und Streifen nie erhalten, wenn man die zwei auf die beiden Spiegel fallenden Lichtbündel SG und SG' aus zwei verschiedenen Lichtquellen S und S' ausgehn liefse. Die Ursache davon ist ohne Zweifel folgende. Es ist äufserst unwahrscheinlich, dafs irgend ein leuchtender Punct S seine Vibrationen durch eine beträchtlich lange Zeit in immer isochronen Bewegungen fortsetzen kann. Im Verfolge dieser nach einander eintretenden Vibrationen werden ohne Zweifel manche Störungen, Verzögerungen und Beschleunigungen statt haben. Allein diese Perturbationen werden der Interferenz des Lichts im Allgemeinen nicht ent-

gegen seyn, so lange nur dieses Licht selbst aus einer und derselben Quelle S kommt, da die verschiedenen Wellen, die nahe in denselben Augenblicken aus dieser Quelle fliefsen, alle mit denselben Perturbationen behaftet und daher ihre Concordanz und Discordanz auch dieselben seyn werden. Allein wenn diese Wellen von zwei verschiedenen Lichtquellen ausströmen, so wird das eine Wellensystem ganz andere Störungen erleiden, als das andere, und jene regelmäfsige Verdoppelung und Vernichtung des Lichts wird nicht mehr statt haben, so dafs das Auge in dem Bilde des Schirms nur noch eine undeutliche, in ihren verschiedenen Stellen verwaschene, hellere Fläche erkennen wird.

Wenn man also, um alles Vorhergehende kurz zusammenzufassen, zwei Lichtwellensysteme (oder zwei Lichtstrahlen, nach der alten Art zu reden), die aus derselben Quelle kommen und dasselbe (farbige oder weifse) Licht enthalten, zu gleicher Zeit auf ein Aethertheilchen wirken läfst, so wird dadurch dieses Theilchen in eine doppelte wellenförmige Bewegung versetzt, und die vier Phasen einer jeden dieser zwei Wellen werden mit einander im Allgemeinen nicht übereinstimmen, oder das Aethertheilchen wird vermöge der ersten Welle, auf der es sich bewegen soll, z. B. am Ende der 1., 2., 3ten Phase seyn, während es in Folge der zweiten Welle in demselben Augenblicke schon das Ende der 2., 3., 4ten Phase u. s. w. erreicht haben wird. Da nun beide Wellen, unserer Voraussetzung gemäfs, von gleichfarbigem Lichte (dessen Wellenlängen λ alle von gleicher Gröfse sind) kommen, so kann es geschehn, dafs das eine System dieser Wellen etwas früher oder später von der Lichtquelle ausgeht, als das andere, oder auch, dafs sie, obschon zu gleicher Zeit aus der Lichtquelle ausgetreten, doch verschiedene Wege (SG + GE) und (SG' + G'E) durchlaufen, bis sie zu ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunct E gelangen. Wenn nun die dadurch entstehende Verzögerung oder Beschleunigung irgend eine *gerade Anzahl* von halben Schwingungslängen (also $2\left(\frac{\lambda}{2}\right), 4\left(\frac{\lambda}{2}\right), 6\left(\frac{\lambda}{2}\right) \ldots$ oder $\lambda, 2\lambda, 3\lambda \ldots$, im Allgemeinen $n\lambda$, wo n die natürlichen Zahlen 1, 2, 3 .. bezeichnet) beträgt, so werden diese zwei Wellensysteme dem Aethertheilchen in jedem Augenblicke gleiche Geschwindigkeiten

und auch in gleichen Richtungen mittheilen, und die Folge davon wird ein helleres Licht dieses Theilchens, wird eine gröfsere Intensität der Beleuchtung des Aethers in der Nähe dieses Theilchens seyn. Wenn aber jene Verzögerung eine ungerade Anzahl von halben Schwingungen (also $\left(\frac{\lambda}{2}\right), 3\left(\frac{\lambda}{2}\right), 5\left(\frac{\lambda}{2}\right)$ oder überhaupt $(2n+1)\,\frac{\lambda}{2}$ Schwingungen) beträgt, so werden jene zwei Wellensysteme in dem Augenblicke ihres Zusammentreffens dem Aethertheilchen zwar noch immer gleiche Geschwindigkeiten, aber in entgegengesetzten Richtungen mittheilen und die Folge der Superposition dieser zwei Wellen wird eine Aufhebung aller Bewegung des Aethertheilchens seyn, oder das Theilchen wird in Ruhe bleiben, keine Vibration erhalten, also auch kein Licht mehr haben. Das letzte wird z. B. der Fall seyn, wenn das Aethertheilchen in Folge der einen Vibration die Welle AMCNB und in derselben Zeit in Folge der andern Vibration die Welle amcnb beschreiben und zu gleicher Zeit die Stellen A und a, M und m, N und n u. s. w. einnehmen soll, wo z. B. die Ordinaten PM, pm . . der Curve die Geschwindigkeiten des Aethertheilchens ausdrücken. Diese Geschwindigkeiten sind für die Puncte M und m, so wie für die Puncte N und n dieselben, aber von verschiedenen Zeichen, so dafs sie sich in diesem Falle gegenseitig aufheben oder dafs diese Geschwindigkeiten und daher auch das Licht gänzlich verschwinden. Wenn man also zwei Lichtbündel mit einander vermischt, oder wenn man zu einem bereits bestehenden Lichte noch neues Licht giebt, so kann die Folge davon (nicht eine verstärkte Beleuchtung, wie man erwarten sollte, sondern) ein gänzlicher Mangel aller Beleuchtung oder eine völlige *Finsternifs* seyn. In diesem merkwürdigen gegenseitigen Aufheben oder Zerstören, in dieser *Interferenz*[1] des Lichts, die durch die Beobachtungen über allen Zweifel erhoben ist, liegt zugleich der schönste Beweis für die Undulationstheorie und

Fig. 189.

---

1 Thomas Young hat diesen Ausdruck eingeführt. Er ist entnommen vom englischen Worte *to interfere*, sich verwickeln, sich einmischen u. s. w.

die stärkste Widerlegung der alten Emissionstheorie dés Lichts, da sich die Interferenz durch diese letzte Lehre durchaus nicht erklären läſst. Wir werden bald (§. 19.) denselben Gegenstand mit Hülſe der mathematischen Analyse näher zu betrachten Gelegenheit erhalten.

17) Geschwindigkeit der Vibrationen des Lichts.

Die Interferenz giebt zugleich ein sehr einfaches Mittel, die Länge der Wellen und die Geschwindigkeit der Vibrationen des Lichts in diesen Wellen zu messen. Man kann nämlich die zwei so eben untersuchten Lichtbilder I und I′ hinter den beiden Planspiegeln als zwei identische Lichtquellen betrachten, die man der früheren einfachen Quelle S substituirt. Die von den Spiegeln zurückgeworfenen Lichtwellen werden, wie bereits erwähnt, sphärische Wellen seyn, die ihren Mittelpunct in I und I′ haben. Die vollen Kreise der Figur mögen die Oberflächen aller derjenigen aus I und I′ kommenden sphärischen Wellen bezeichnen, die zu derselben Zeit um λ, um 2λ, um 3λ .. oder kurz um eine ganze Anzahl von Wellenlängen von einander abstehn. Die punctirten Kreise aber sollen diejenigen Wellen bedeuten, die von jenen ersten um $\frac{\lambda}{2}$ oder $3\frac{\lambda}{2}$ oder $5\frac{\lambda}{2}$ . . abstehn. Dieses vorausgesetzt werden diejenigen Puncte, in welchen sich zwei volle oder auch zwei punctirte Kreise schneiden, diejenigen seyn, wo eine Concordanz der Vibrationen, also eine höhere Intensität des Lichts, also auch ein *heller Streifen* entsteht, während im Gegentheile alle die Puncte, in welchen ein voller Kreis einen punctirten trifft, eine Discordanz der Vibrationen, eine Aufhebung des Lichts, also auch einen dunklen Streifen zeigen werden. Seyen CE und C′E die beiden vollen Kreise, die durch den Punct E gehn, und seyen B und B′ die zwei Durchschnittspuncte derselben vollen Kreise mit den punctirten Kreisen B′E′ und BE′, die jenen vollen Kreisen unmittelbar nachfolgen. Ist dann $BB' = b$ die Breite eines Streifens und ist $IEI' = EBE' = EB'E' = \varphi$ der Winkel, unter welchem sich zwei nächste volle und punctirte Kreise schneiden, so hat man sehr nahe $BE = \frac{1}{2}b$ und

Fig. 190.

$EE' = \frac{1}{2}\lambda$, wenn wieder λ die Länge der Lichtwelle bezeichnet; also auch

$$\lambda = b \text{ Sin. } \varphi.$$

Hat man also den Winkel φ gemessen (was mittelst eines Repetitionskreises sehr wohl geschehn kann), und kennt man (durch Hülfe eines mit einem Fadenmikrometer versehenen Mikroskops) auch die Breite b der lichten Streifen, so kann man daraus, mittelst der letzten Gleichung, auch die Länge λ der Lichtwellen bestimmen. Diese Gleichung zeigt, dafs die Breite b der Streifen für dasselbe farbige Licht desto gröfser ist, je kleiner der Winkel φ genommen wird, d. h. je näher die beiden Spiegelbilder I und I' an einander genommen werden und je weiter sie oder ihr mittlerer Punct O von dem Mikrometer des Mikroskops entfernt sind. Man mufs daher den Neigungswinkel der beiden oben erwähnten Planspiegel so nahe an 180 Grade nehmen, als möglich, damit b so grofs als möglich oder damit die Messungen so genau als möglich werden. Fresnel hat diese Messungen mit grofser Genauigkeit vorgenommen und folgende Resultate gefunden.

Licht des Sonnenspectrums	λ = Länge der Welle	
	in Millimetern	In Duodec.-Linien des Pariser Fufses
Violett	0,000423	0,000187
Indigo	0,000449	0,000199
Blau	0,000475	0,000211
Grün	0,000512	0,000227
Gelb	0,000551	0,000244
Orange	0,000583	0,000258
Roth	0,000620	0,000275

Nennt man nun, wie zuvor, a die Geschwindigkeit der Fortpflanzung des Lichts, die, wie bekannt, 280000000 Meter in einer Zeitsecunde beträgt, und bezeichnet τ die Zeit einer ganzen Schwingung des Lichts oder des Aethers, so hat man, wie oben für die Schallwellen,

$$\lambda = a\tau \text{ oder } \tau = \frac{\lambda}{a},$$

und da man die Länge λ der Lichtwelle für jede einzelne

Farbe bereits aus der vorhergehenden Tafel kennt, so wird man mittelst der Gleichung $\tau = \frac{\lambda}{a}$ die Zeit einer jeden Schwingung des Lichtes bestimmen können. Da diese für τ zu erhaltenden Zahlen alle ungemein klein gegen die Zeiteinheit (gegen eine Zeitsecunde) sind, so wird es angemessener seyn, die Anzahl n der Schwingungen zu bestimmen, die einem jeden farbigen Lichte während der Zeit einer Secunde zukommt. Man hat aber $n\tau = 1$ Sec., also auch

$$n = \frac{1}{\tau}$$

oder

$$n = \frac{a}{\lambda},$$

und da in der vorhergehenden Tafel die Längen λ der Wellen in Millimetern ausgedrückt sind, so wird man in der letzten Gleichung auch die Gröfse $a = 280000000000$ Millimeter setzen. Substituirt man dann für λ die Zahlen der Tafel, so erhält man für die Anzahl n der ganzen Schwingungen, welche jedes farbige Licht während einer Zeitsecunde zurücklegt:

Farbe	n
Violett	662 Billionen
Indigo	624 —
Blau	589 —
Grün	547 —
Gelb	509 —
Orange	480 —
Roth	451 —

18) Analytische Theorie der Interferenz.

Nachdem wir in dem Vorhergehenden die allgemeinen Erscheinungen der Interferenz und auch die Ursache derselben, so weit dieses ohne mathematische Analyse geschehn kann, dargestellt haben, so ist nun noch übrig, die eigentliche wissenschaftliche Theorie derselben unmittelbar aus den vorhergehenden allgemeinen Gleichungen (B) der Undulation abzuleiten. Wir wollen dabei, mit beständiger Rücksicht auf Fresnel's, Cauchy's und Poisson's ausgezeichnete Arbeiten in diesem höchst interessanten Zweige der Physik, vorzüglich auf die durch Klar-

heit und Vollständigkeit sich auszeichnende Darstellung Rücksicht nehmen, die AIRY in dem oben angeführten Werke[1] gegeben hat.

Die Gleichungen (B) des §. 14. haben in dem folgenden §. 15. verschiedene Formen ihrer Integration erhalten. Wir beschränken uns hier zuvörderst auf eine der einfachsten dieser Formen, nämlich auf die Gleichung (2) der Anmerkung (1) des §. 15. Wenn man nämlich die Geschwindigkeit der Fortpflanzung des Lichts, die wir bisher a genannt haben, der Einfachheit der nun folgenden Bezeichnungen wegen durch α ausdrückt, so hat man nach der erwähnten Gleichung (2) des §. 15.

$$y = a \, \text{Sin.} \left[\frac{2\pi}{\lambda} (\alpha t - x) + A\right] \ldots\ldots \quad (D)$$

für die Ordinate y des Elements der Welle, die der Abscisse x für die Zeit t entspricht. Das Differential dieser Gleichung in Beziehung auf y und t giebt

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{2 a \alpha \pi}{\lambda} \, \text{Cos.} \left[\frac{2\pi}{\lambda} (\alpha t - x) + A\right] \ldots\ldots \quad (D')$$

für die Geschwindigkeit des Elements der Welle in der Richtung der y.

In diesen Ausdrücken bezeichnet λ die Länge der Welle, π die Ludolph'sche Zahl, und A und a sind zwei Constanten, von welchen die letzte a den gröfsten Werth von y oder die *Amplitüde* (§. 6.) der Vibration bezeichnet. Der Bogen $\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x) + A$, von welchem die Gröfse y, so wie $\frac{\partial y}{\partial t}$ als eine Function erscheint, wird das *Mafs der Phasen* (§. 1. II.) genannt. Beide Ausdrücke zeigen, dafs, da die Zeit t gleichförmig fortgeht, die auf einander folgenden Schwingungen alle *isochron* oder von gleicher Dauer sind, dafs ihre Amplitüde constant und dafs die *Dauer* einer jeden Schwingung gleich 2π dividirt durch den Factor von t, das heifst, gleich 2π dividirt durch $\frac{2\pi\alpha}{\lambda}$,

1 Undulatory Theory of Optics. Cambr. 1831.

also gleich $\frac{\lambda}{a}$ oder endlich gleich τ ist, wo, wie oben, $\tau = \frac{\lambda}{a}$ die Dauer einer Schwingung des leuchtenden Körpers, also auch des durch ihn in Vibration gesetzten Aethers bezeichnet. Diese Ausdrücke gelten übrigens für alle Gattungen von Wellen, dieselbe mag in einer vor- und rückgängigen Bewegung der Elemente (des Aethers oder der Luft) nach der Richtung des Fortschreitens der Welle, wie in unserer ersten Figur, oder sie mag in einer auf diese Richtung senkrechten, auf- und niedergehenden Bewegung, wie in der zweiten Figur, bestehn. Legt man durch den Mittelpunct eines sphärischen Wellensystems, das z. B. auf der horizontalen Oberfläche eines stehenden Wassers entsteht, eine verticale Ebene, und bezeichnet der Durchschnitt dieser Ebene mit dem ruhenden Wasserspiegel die Axe der x, so wird diese Ebene die auf dem bewegten Wasser entstehenden Wellen in einer Curve schneiden, deren auf dem Wasserspiegel senkrecht stehende Coordinaten y in der schneidenden Ebene liegen. Wird endlich die Lage der Axe der x durch eine gespannte, im Gleichgewicht stehende Saite ausgedrückt, und bezeichnet man durch y die auf jene erste Lage senkrechte Entfernung jedes Elements der Saite, welche dieselbe durch irgend eine augenblickliche Störung jener Lage erhalten hat, so wird die Curve, welche die Saite für jede Zeit t einnimmt, so wie auch diejenige, welche die der Saite zunächst liegenden Luftschichten erhalten und auf die anderen ihnen nächstliegenden Schichten fortpflanzen, durch dieselbe obige Gleichung ausgedrückt werden. Wir haben aber oben (Anmerk. II. des §. 15.) gesehn, dafs die allgemeinen Gleichungen (B) oder dafs der Differentialausdruck (§. 15. IV.)

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) = a^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) \ldots \quad (C)$$

in welchem eigentlich die ganze Undulationstheorie enthalten ist, nicht blofs durch eine einzige der obigen ähnliche Gleichung, sondern dafs sie vielmehr durch eine ganz willkürliche Anzahl solcher Gleichungen dargestellt wird, so dafs man daher für das Integral der Gleichung (C) den Ausdruck annehmen kann

$$y = \Sigma . a \operatorname{Sin.} \left[\frac{2\pi}{\lambda}(at - x) + A\right],$$

wo Σ das gewöhnliche Summenzeichen ist, und daſs daher die Gleichung (D) eigentlich dem folgenden Ausdrucke gleichbedeutend ist

$$y = a \operatorname{Sin.} \left[\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x) + A\right]$$
$$+ b \operatorname{Sin.} \left[\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x) + B\right]$$
$$+ c \operatorname{Sin.} \left[\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x) + C\right] + \ldots,$$

wo die Gröſse α oder die Geschwindigkeit der Fortpflanzung (des Lichts im Aether oder des Schalls in der Luft) nach dem Vorhergehenden im Allgemeinen eine unveränderliche Gröſse ist.

I. Jedes dieser einzelnen Glieder der Gleichung (D') drückt eine einfache, isolirte Welle und alle zusammen drükken daher, wenn sie zu gleicher Zeit bestehn sollen, die Coincidenz oder auch die Superposition aller dieser einfachen Wellen aus. Betrachtet man nun zuerst nur zwei dieser coincidirenden Wellen, für welche also die Abscisse x denselben Werth haben soll, nämlich

$$y = a \operatorname{Sin.} \left[\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x) + A\right]$$

und

$$y' = a' \operatorname{Sin.} \left[\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x) + A'\right],$$

so kann die Summe y_1 dieſer beiden Ausdrücke auch auf folgende Art dargestellt werden:

$$y_{,} = (a \operatorname{Cos.} A + a' \operatorname{Cos.} A') \operatorname{Sin.} \left(\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x)\right)$$
$$+ (a \operatorname{Sin.} A + a' \operatorname{Sin.} A') \operatorname{Cos.} \left(\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x)\right)$$

und dafür endlich kann man noch kürzer setzen

$$y_{,} = a_{,} \operatorname{Sin.} \left[\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x) + A_{,}\right] \;\ldots\; (1),$$

wenn man nämlich die beiden Gröſsen $a_{,}$ und $A_{,}$ so annimmt, daſs man hat

$$a_{,} \, \text{Sin.} \, A_{,} = a \, \text{Sin.} \, A + a' \, \text{Sin.} \, A',$$
$$a_{,} \, \text{Cos.} \, A_{,} = a \, \text{Cos.} \, A + a' \, \text{Cos.} \, A'.$$

Wenn man die beiden letzten Gleichungen quadrirt und addirt, so hat man

$$a_{,}^{2} = a^{2} + a'^{2} + 2 a a' \, \text{Cos.} (A - A')$$

und ebenso giebt die Division jener zwei Hülfsgleichungen

$$\text{Tang.} \, A_{,} = \frac{a \, \text{Sin.} \, A + a' \, \text{Sin.} \, A'}{a \, \text{Cos.} \, A + a' \, \text{Cos.} \, A'}.$$

Die Gleichung (1) zeigt, dafs die Summe der Ordinaten von je zwei Wellen in demselben Medium, zu dem die Geschwindigkeit α gehört, wieder als die Ordinate einer andern dritten Welle betrachtet werden kann, die aus jenen beiden gleichsam zusammengesetzt ist. Die Länge λ der zusammengesetzten Welle ist dieselbe, wie die der beiden einfachen, aber die gröfsten, positiven und negativen Werthe von y sind verschieden. Der gröfste Werth der Vibration ist

bei der ersten einfachen Welle gleich a,
bei der zweiten einfachen Welle gleich a'
und bei der zusammengesetzten Welle gleich

$$a_{,} = \sqrt{a^{2} + a'^{2} + 2 a a' \, \text{Cos.} (A - A')}.$$

Dieser Werth von $a_{,}$ hängt daher, wie die letzte Gleichung zeigt, von dem Werthe des Winkels $A - A'$ ab. Ist $A - A' = 0$, so hat $a_{,}$ selbst wieder seinen gröfsten Werth, nämlich

$$a_{,} = a + a'.$$

Ist aber $A - A'$ oder, was dasselbe ist, $A' - A = 180°$, so hat $a_{,}$ seinen kleinsten Werth, nämlich

$$a_{,} = a - a'.$$

19) Concurrenz von zwei gleichgrofsen Wellen.

Nehmen wir an, dafs die Maxima der beiden einfachen Vibrationen gleich sind oder dafs $a = a'$ ist. Für diese Voraussetzung ist aber, wie aus den vorhergehenden Gleichungen folgt,

$$a_{,} = \sqrt{2 a^{2} + 2 a^{2} \, \text{Cos.} (A - A')} = 2 a \, \text{Cos.} \tfrac{1}{2} (A - A')$$

und

$$\text{Tang. } A_{,} = \frac{\text{Sin. } A + \text{Sin. } A'}{\text{Cos. } A + \text{Cos. } A'} = \text{Tg. } \tfrac{1}{2}(A + A') \text{ oder } A_{,} = \tfrac{1}{2}(A + A').$$

Hier müssen wir nun zwei Fälle unterscheiden.

I. Ist nämlich für den ersten Fall $A' = A$, so sind die beiden ersten einfachen Vibrationen

$$a \,\text{Sin.} \left[\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x) + A\right] \text{ und } a' \,\text{Sin.} \left[\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x) + A'\right],$$

da nicht nur $a = a'$, sondern auch $A = A'$ ist, in nichts mehr verschieden oder sie sind unter sich ganz identisch, wie z. B. die Wellen (β) und (ζ). Für diesen ersten Fall ist aber Fig. 171.

$$a_{,} = 2a \text{ und } A_{,} = A,$$

also die dritte oder zusammengesetzte Welle

$$2a \text{ Sin.} \left[\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x) + A\right],$$

oder die zusammengesetzte Welle hat (wegen $A_{,} = A = A'$) ihren gröſsten Werth an derselben Stelle, wie jede der beiden einfachen, und das Maximum der zusammengesetzten ist doppelt so groſs, als das jeder einfachen.

II. Ist aber für den zweiten Fall $A' = A \pm 180°$ oder $A' = A \pm \pi$, so geben die vorigen Gleichungen

$$a_{,} = 0,$$

d. h. das Maximum der zusammengesetzten Vibration ist Null, oder: es hat für diesen Fall gar keine Vibration, also auch kein Licht statt.

Um diesen wichtigen Fall näher zu betrachten, wollen wir in dem Ausdrucke

$$y' = a' \text{ Sin.} \left[\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x) + A'\right] = a \,\text{Sin.} \left[\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x) + A'\right]$$

der zweiten einfachen Vibration den gegenwärtigen Werth $A' = A \pm \pi$ substituiren, so daſs man also hat

$$y = a \,\text{Sin.} \left[\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x) + A \pm \pi\right]$$

oder, was dasselbe ist,

$$y = a \text{ Sin.} \left[\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x \pm \tfrac{1}{2}\lambda) + A\right].$$

Allein dieses ist ganz und gar derselbe Ausdruck oder die-

selbe Form, welche man erhält, wenn man in der ersten Vibration

$$a \operatorname{Sin.} \left[\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x) + A\right]$$

statt x die Gröſse $x \mp \frac{1}{2}\lambda$ setzt.

Das heiſst also: der Ausdruck der zweiten Vibration

$$a \operatorname{Sin.} \left[\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x) + A'\right]$$

ist, wenn man in ihm nach unserm zweiten Falle $A' = A \pm \pi$ setzt, ganz identisch mit dem Ausdrucke der ersten Vibration

$$a \operatorname{Sin.} \left[\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x) + A\right],$$

wenn man nur in dieser ersten Vibration statt x die Gröſse $x \mp \frac{1}{2}\lambda$ setzt. Wenn also zwei gleichgroſse Wellen (in welchen nämlich $a = a'$ ist), von welchen aber die eine um $\frac{1}{2}\lambda$ hinter der andern zurück oder vor ihr voraus ist, sich begegnen, so heben sie sich [da $a_{,} = 0$ ist] einander auf, und es hat gar keine Vibration, also auch kein Licht in dem Orte der Begegnung statt. Die Wellen (β) und (δ) oder auch (γ) und (ε) sind in diesem Falle entgegengesetzt, da die Höhen der einzelnen Elemente dieser Wellenpaare bei der einen Welle den Vertiefungen derselben bei der andern Welle entsprechen und umgekehrt, so daſs für dasselbe Element die Ordinaten y in beiden Wellen überall dieselbe Gröſse und entgegengesetzte Zeichen haben. Eine jede Welle kann daher durch eine andere völlig aufgehoben oder vernichtet werden, wenn beide dieselbe Länge λ haben, wenn sie in derselben Richtung fortschreiten, wenn ihre Maxima gleich sind, und wenn endlich die eine der andern um eine halbe Wellenlänge vor oder nach geht. Da überdieſs die Beschleunigung oder Verzögerung von einer oder zwei oder auch mehrern ganzen Wellen ganz und gar keine Aenderung in der Wellenbewegung hervorbringen kann, so wird man den so eben erhaltenen Satz noch allgemeiner so stellen können, daſs die zwei mit den erwähnten Eigenschaften versehenen Wellen sich in allen den Fällen aufheben oder zerstören, wenn ihre gegenseitige Distanz $\frac{1}{2}\lambda$, $\frac{3}{2}\lambda$, $\frac{5}{2}\lambda$ . . oder überhaupt $\frac{2n+1}{2}\lambda$

Fig. 171.

beträgt, wo n die natürlichen Zahlen 1, 2, 3 . . . bezeichnet. In dieser Zerstörung der Wellen oder in dieser gegenseitigen Aufhebung des Lichts besteht aber die *Interferenz* (§. 16.) desselben, und wir haben bereits oben (§. 10.) bemerkt, daſs auch bei den Schallwellen in der Luft analoge Erscheinungen statt haben, so wie wir auch später (§. 22.) wieder auf denselben Gegenstand zurückkommen werden, wo die *Intensität* des interferirten Lichts untersucht werden soll.

In allen übrigen Fällen, welche zwischen jenen beiden (wo $A = A$ und wo $A' = A + \pi$ ist) in der Mitte liegen, findet man, daſs c oder das Maximum der zusammengesetzten Welle immer kleiner ist als $2a$ oder $2b$, das heiſst, immer kleiner als das doppelte Maximum jeder der zwei einfachen Wellen.

III. Seyen demnach, um das Vorhergehende zur bequemen Uebersicht zusammenzunehmen, die beiden einfachen Wellen

$$y = a \operatorname{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x) \text{ und } y' = a' \operatorname{Sin.} \left[\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x) + A'\right],$$

wo wir die erste Constante A gleich Null gesetzt haben, da die Gröſse A' allein schon die Verschiedenheit der Phasen beider Wellen hinlänglich ausdrückt, und sey, um noch mehr abzukürzen, der Winkel

$$\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x) = \omega,$$

so daſs demnach die beiden einfachen Wellen sind

$$y = a . \operatorname{Sin.} \omega \text{ und } y' = a' \operatorname{Sin.} (\omega + A'),$$

so hat man für die aus ihnen zusammengesetzte Welle

$$y_{,} = a . \operatorname{Sin.} (\omega + A_{,}),$$

wo die Gröſsen $a_{,}$ und $A_{,}$ durch folgende Gleichungen bestimmt werden:

$$a_{,} \operatorname{Sin.} A_{,} = a' \operatorname{Sin.} A' \text{ und } a_{,} \operatorname{Cos.} A_{,} = a + a' \operatorname{Cos.} A',$$

oder wo man hat

$$a_{,} = \sqrt{a^2 + a'^2 + 2aa' \operatorname{Cos.} A'} \text{ und } \operatorname{Tang.} A_{,} = \frac{a' \operatorname{Sin.} A'}{a + a' \operatorname{Cos.} A'}.$$

Man wird also immer jene zwei einfachen Gleichungen in eine einzige $y_{,} = a_{,} \operatorname{Sin.} (\omega + A_{,})$ zusammensetzen können,

wenn man nur die Gröſsen $a_{,}$ und $A_{,}$ den letzten Bedingungsgleichungen gemäſs annimmt. Ebenso wird man auch umgekehrt jede einzelne Welle $y_{,} = a_{,} \mathrm{Sin.}(\omega + A_{,})$ in zwei andere

$$y = a \,\mathrm{Sin.}\,\omega \text{ und } y' = a' \,\mathrm{Sin.}\,(\omega + A')$$

zerlegen können, wenn man nur die Gröſsen a und a′ so annimmt, daſs man hat

$$\left.\begin{array}{l} a = a_{,} \mathrm{Cos.}\, A_{,} \\ a' = a_{,} \mathrm{Sin.}\, A_{,} \end{array}\right\} \text{ oder auch } \left.\begin{array}{l} a = a_{,} \dfrac{\mathrm{Sin.}(A' - A_{,})}{\mathrm{Sin.}\, A'} \\ a' = a_{,} \dfrac{\mathrm{Sin.}\, A_{,}}{\mathrm{Sin.}\, A'} \end{array}\right\},$$

wobei der Winkel A′ der beiden einfachen Wellen willkürlich bleibt.

IV. Da das hier angewendete Verfahren ganz analog mit dem des sogenannten Kräfteparallelogramms in der Mechanik ist, so sieht man, daſs, wenn zwei einfache Wellen in ihrer Gröſse und Lage durch zwei Seiten eines Parallelogramms dargestellt werden, die aus ihnen zusammengesetzte Welle durch die Diagonale dieses Parallelogramms gegeben seyn wird und umgekehrt. Geht für den einfachsten Fall das Parallelogramm in ein Rechteck über oder ist der Winkel $A' = 90° = \frac{1}{2}\pi$, so wird man also die zwei einfachen Wellen

$$y = a \,\mathrm{Sin.}\,\omega \text{ und } y' = a' \,\mathrm{Sin.}\,(\omega + \tfrac{1}{2}\pi)$$

in eine einzige $y_{,} = a_{,} \mathrm{Sin.}(\omega + A_{,})$ zusammensetzen, wenn man die Gröſsen $a_{,}$ und $A_{,}$ den folgenden Gleichungen gemäſs nimmt:

$$\left.\begin{array}{l} a_{,} \mathrm{Cos.}\, A_{,} = a \\ a_{,} \mathrm{Sin.}\, A_{,} = a' \end{array}\right\} \text{ oder } \left.\begin{array}{l} a_{,} = \sqrt{a^2 + a'^2} \\ \mathrm{Tang.}\, A_{,} = \dfrac{a'}{a} \end{array}\right\}.$$

Und ebenso wird man umgekehrt jede einzelne Welle

$$y_{,} = a_{,} \mathrm{Sin.}\,(\omega + A_{,})$$

in zwei andere

$$y = a \,\mathrm{Sin.}\,\omega \text{ und } y' = a' \,\mathrm{Sin.}\,(\omega + \tfrac{1}{2}\pi)$$

zerlegen können, wenn man die Gröſsen a und a′ den folgenden Ausdrücken gemäſs nimmt:

$$\left.\begin{array}{l} a = a_, \text{Cos.} A_, \\ a' = a_, \text{Sin.} A_, \end{array}\right\}.$$

V. Von den übrigen besondern Fällen kann man noch folgende bemerken. Ist $A' = 0$ oder sind die beiden einfachen Wellen in derselben Phase, so hat man, wie sofort aus (III) folgt, für die aus ihnen zusammengesetzte Welle $y_, = (a + a')\,\text{Sin.}\,\omega$. Ist daher überdiefs $a' = -a$, so ist $y_, = 0$. Ist $A' = 180° = \pi$ oder sind die zwei einfachen Wellen in ihren Phasen entgegengesetzt, so ist für die zusammengesetzte Welle $y_, = (a - a')\,\text{Sin.}\,\omega$. Ist überdiefs $a' = a$, so ist $y_, = 0$.

Ist endlich bei den zwei einfachen Wellen in (III) die Gröfse $a = a'$, so hat man $a_, = 2a\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2}A'$ und $A_, = \frac{1}{2}A'$, und daher für die zusammengesetzte Welle

$$y_, = 2a\,\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}A'\,\text{Sin.}\,(\omega + \tfrac{1}{2}A').$$

Ist aber $a = -a'$, so erhält man $a_, = 2a\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}A'$ und $A_, = \frac{1}{2}(A' + \pi)$, also auch für die zusammengesetzte Welle

$$y_, = 2a\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A'\,\text{Sin.}\left(\omega + \frac{A' + \pi}{2}\right).$$

20) Concurrenz mehrerer Wellen.

So wie wir im Vorhergehenden zwei Wellen combinirt haben, so wird man auch drei und mehrere derselben verbinden können. Sind z. B. diese drei Wellen

$$a\,\text{Sin.}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x) + A\right],$$

$$a'\,\text{Sin.}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x) + A'\right],$$

$$a''\,\text{Sin.}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x) + A''\right],$$

so hat man für die Summe dieser Ausdrücke

$$(a\,\text{Cos.}\,A + a'\,\text{Cos.}\,A' + a''\,\text{Cos.}\,A'')\,\text{Sin.}\,\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x)$$

$$+ (a\,\text{Sin.}\,A + a'\,\text{Sin.}\,A' + a''\,\text{Sin.}\,A'')\,\text{Cos.}\,\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x)$$

und dieser Summe kann man auch folgende Gestalt geben

$$F \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x) + G \text{ Cos. } \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x);$$

diesen letzten Ausdruck endlich kann man wieder gleich setzen

$$a_{,} \text{ Sin. } \left[\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x) + A_{,}\right],$$

wenn man nämlich die Gröfsen $a_{,}$ und $A_{,}$ nach §. 18. I. so annimmt, dafs man hat

$$F = a_{,} \text{ Cos. } A_{,} \text{ und } G = a_{,} \text{ Sin. } A_{,},$$

oder, was dasselbe ist,

$$a_{,} = \sqrt{F^2 + G^2} \text{ und Tang. } A_{,} = \frac{G}{F}.$$

Man sieht, wie man dieses auf eine unbestimmte Anzahl von coincidirenden Wellen fortsetzen kann. Ist diese Anzahl unendlich grofs und sind, wie man mit Recht annehmen kann, die einzelnen Wellen (d. h. ihre gröfsten Werthe a, a', a''..) alle unendlich klein, so dafs man diese Gröfsen a, a', a''... als Differentialgröfsen betrachten kann, so werden die Gröfsen F und G der Natur der Sache nach durch die Integralrechnung gegeben werden, und dann wird man die Endresultate $a_{,}$ und $A_{,}$ ganz, wie zuvor, bestimmen.

I. Wenn nur eine einzige Welle (des Schalls durch die Luft oder des Lichts durch den Aether gehend) angenommen wird, so kann natürlich von einer Interferenz keine Rede seyn. Allein so wie eine einzelne Schallwelle keinen Ton, so wird auch eine einzelne Lichtwelle noch kein Licht, wenigstens kein für unseren Gesichtssinn merkbares Licht hervorbringen. Auch betrachtet man aus dieser Ursache in der Akustik sowohl, als auch in der Optik immer eine Aufeinanderfolge von mehreren Wellen, die aus demselben oder auch aus mehrern Mittelpuncten ausgehn.

II. Der gröfste Werth einer jeden Vibration oder die sogenannte *Gröfse der Welle* oder auch die *Amplitüde* derselben (§. 6.), das heifst, der Werth der vorigen Gröfsen a, a', a''.., wird, streng genommen, auch nicht bei den einander nächsten, aus einem Mittelpuncte kommenden sphärischen Wellen gleich grofs seyn. Es ist oben (§. 6 und 7.) gezeigt worden, dafs diese Amplitüde, von welcher die Intensität (des Schalls

oder des Lichts) abhängt, bei sphärischen Wellen im unbegrenzten Raume sich wie verkehrt das Quadrat des Halbmessers der Welle verhält. Diesem gemäſs wird man also auch eine *vollkommene Interferenz* des Lichts nicht annehmen können. Aber es ist klar, daſs in einiger Entfernung von den Mittelpuncten die einander nächsten Wellen doch wenigstens ungemein wenig in ihrer Gröſse oder Amplitüde verschieden seyn werden, so daſs eine vollkommene Gleichsetzung derselben für unsere Sinne keinen bemerkbaren Fehler erzeugen kann.

III. Bei der Luft ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit α des Schalls, wie wir oben gesehn haben, im Allgemeinen für alle Wellenlängen λ dieselbe. Man hat anfangs bei dem Aether dieselbe Voraussetzung für die Lichtwellen gemacht, aber man fand sich im Verfolge genauerer Untersuchungen gezwungen, diese Hypothese für die Undulation des Lichts als in vielen besondern Fällen unstatthaft aufzugeben. Wir werden weiter unten wieder auf diesen Gegenstand zurückkommen. Hier wird es genügen zu bemerken, daſs zwei Ausdrücke von der Form

$$\mathrm{a\,Sin.}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x) + A\right] \text{ und } \mathrm{a'\,Sin.}\left[\frac{2\pi}{\lambda'}(\alpha' t - x) + A'\right],$$

in welchen die Gröſsen α und α', also auch, wegen der allgemeinen Gleichung $\lambda = \alpha\tau$, die Gröſsen λ und λ' verschieden sind, nicht auf einen einzigen Ausdruck von derselben Form gebracht werden können, auſser wenn man annehmen wollte, daſs zwischen den letzten vier Gröſsen das Verhältniſs

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\lambda}{\lambda'}$$

statt fände, zu welcher Annahme man aber keinen Grund angeben könnte.

IV. Nehmen wir nun eine Reihe von einfachen Wellen von folgender Form an:

$$\left.\begin{aligned} y &= a\,\mathrm{Sin.}(\omega + A) \\ y' &= a'\,\mathrm{Sin.}(\omega + A') \\ y'' &= a''\,\mathrm{Sin.}(\omega + A'') \\ &\cdots\cdots \\ y^n &= a^n\,\mathrm{Sin.}(\omega + A^n) \end{aligned}\right\} \ldots (1)$$

wo wieder der Kürze wegen $\omega = \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x)$ gesetzt wird. Da jede dieser einfachen Wellen

$$a \, \mathrm{Sin.} (\omega + A)$$

sich nach §. 19. IV. in zwei andere

$$a \, \mathrm{Cos.} A \, . \, \mathrm{Sin.} \omega \text{ und } a \, \mathrm{Sin.} A \, . \, \mathrm{Sin.} (\omega + \tfrac{1}{2}\pi)$$

zerlegen läfst, deren Phasen um $\frac{1}{2}\pi$ verschieden sind, so wird man auch statt jener gegebenen Wellen die folgenden Wellenpaare setzen können:

$$\begin{aligned}
y &= a \, \mathrm{Cos.} A \, . \, \mathrm{Sin.} \omega + a \, \mathrm{Sin.} A \, . \, \mathrm{Sin.} (\omega + \tfrac{1}{2}\pi) \\
y' &= a' \, \mathrm{Cos.} A' . \, \mathrm{Sin.} \omega + a' \, \mathrm{Sin.} A' . \, \mathrm{Sin.} (\omega + \tfrac{1}{2}\pi) \\
y'' &= a'' \, \mathrm{Cos.} A'' . \, \mathrm{Sin.} \omega + a'' \, \mathrm{Sin.} A'' . \, \mathrm{Sin.} (\omega + \tfrac{1}{2}\pi) \\
y^n &= a^n \, \mathrm{Cos.} A^n . \, \mathrm{Sin.} \omega + a^n \, \mathrm{Sin.} A^n . \, \mathrm{Sin.} (\omega + \tfrac{1}{2}\pi).
\end{aligned}$$

Setzt man aber der Kürze wegen

$$\Sigma . a \, \mathrm{Cos.} A = a \, \mathrm{Cos.} A + a' \, \mathrm{Cos.} A' + a'' \, \mathrm{Cos.} A'' + \ldots$$

und

$$\Sigma . a \, \mathrm{Sin.} A = a \, \mathrm{Sin.} A + a' \, \mathrm{Sin.} A' + a'' \, \mathrm{Sin.} A'' + \ldots,$$

so erhält man für die Summe aller vorhergehenden Wellenpaare den Ausdruck

$$\Sigma . a \, \mathrm{Cos.} A \, . \, \mathrm{Sin.} \omega + \Sigma . a \, \mathrm{Sin.} A \, . \, \mathrm{Sin.} (\omega + \tfrac{1}{2}\pi)$$

und diese Doppelwelle läfst sich wieder nach §. 19. IV. auf die folgende einfache Welle

$$y_{,} = a_{,} \, \mathrm{Sin.} (\omega + A_{,}) \quad \ldots \quad (2)$$

zurückführen, wenn man die beiden Gröfsen $a_{,}$ und $A_{,}$ so nimmt, dafs man hat

$$a_{,} = \sqrt{(\Sigma . a \, \mathrm{Sin.} A)^2 + (\Sigma . a \, \mathrm{Cos.} A)^2}$$

und

$$\mathrm{Tang.} A_{,} = \frac{\Sigma . a \, \mathrm{Sin.} A}{\Sigma . a \, \mathrm{Cos.} A},$$

so dafs demnach alle vorhergehenden, durch die Gleichungen (1) vorgestellten Wellen auf die einzige Welle (2) zurückgeführt werden können, die der Summe von jenen gleichbedeutend ist.

21) Verhalten der durch kleine Oeffnungen dringenden Lichtwellen.

Eine grofse Anzahl von aufeinander folgenden, ähnlichen, sphärischen Lichtwellen bewegen sich gegen den ebenen

Schirm AB, in welchem eine kleine Oeffnung ab angebracht ist; man suche die Gröſse der Schwingung (oder die Amplitüde der Vibration) für irgend einen Punct M des Halbkreises, den man auf der andern Seite des Schirms aus dem Mittelpuncte C der Oeffnung beschrieben hat. Nimmt man die Oberflächen der sphärischen Wellen in der Nähe der Oeffnung ab als kleine, dem Schirme selbst parallele Ebenen an und nennt man $CM = r$ den Halbmesser des Kreises, $Ca = Cb = b$ den Halbmesser der Oeffnung und endlich den Winkel $BCM = \Theta$, so kann man sich den Durchmesser ab der Oeffnung in eine groſse Menge gleicher Theile getheilt vorstellen. Sey $Cx = x$ eines dieser Theilchen und ∂x die Breite desselben, so hat man

Fig. 191.

$$Mx = \sqrt{r^2 + x^2 - 2rx \operatorname{Cos}. \Theta.}$$

Wenn nun eine Welle bei der Oeffnung ab ankommt, so wird jedes von jenen kleinen Theilchen an der Oeffnung eine divergirende Welle erzeugen, die für alle Werthe von Θ dieselbe Intensität hat. Denn wenn es sich von Schallwellen in der Luft handelte, und wenn eine Anzahl $\alpha\beta$ von Lufttheilchen der Oeffnung ab zugetrieben würde, so würde dadurch die Luft in der Oeffnung verdichtet werden, und diese Verdichtung würde eine neue Luftwelle erzeugen, die für alle Werthe von Θ dieselbe Intensität hätte. Dasselbe werden wir also auch für den Aether annehmen können. Ebenso werden wir die Gröſse der Schwingung oder die Amplitüde der Vibration, im Aether wie in der Luft, der Entfernung Mx verkehrt proportional annehmen, wenn die Welle den Punct M der Peripherie unseres Kreises erreicht hat. Da nun alle die kleinen Wellen, die in den verschiedenen Puncten der Oeffnung ab erzeugt werden, in derselben Phase (§. 1. am Ende) stehn, so wird für jede derselben die Gleichung gelten

$$\partial y = \frac{a . \partial x}{Mx} \operatorname{Sin}. \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha t - Mx),$$

wenn man, wie es hier offenbar erlaubt ist, die constante Gröſse A der Gleichung (D) des §. 18. wegläſst, da dieselbe auf die gegenwärtige Untersuchung ohne weitern Einfluſs ist. Löst man aber den vorhergehenden Ausdruck von Mx auf, so findet man

$$Mx = r - x \, Cos.\Theta + \frac{x^2}{2r}.Sin.^2\Theta + \ldots$$

Ist aber x so klein gegen den Halbmesser r des Kreises, daſs man die Gröſse $\frac{x^2}{2r}$ ohne merklichen Fehler vernachlässigen kann, so hat man

$$\partial y = \frac{a.\partial x}{Mx} \, Sin. \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - r + x \, Cos.\Theta)$$

und davon ist das Integral

$$y = a\int \frac{\partial x}{Mx} \, Sin. \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - r + x \, Cos.\Theta)$$

oder auch, da der Werth von Mx für eine sehr kleine Oeffnung sehr nahe constant oder gleich MC = r ist,

$$y = \frac{a}{r}\int \partial x \, Sin. \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - r + x \, Cos.\Theta).$$

Führt man diese Integration aus, so erhält man

$$y = -\frac{a\lambda}{2r\pi \, Cos.\Theta} \, Cos. \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - r + x \, Cos.\Theta)$$

und nimmt man, wie es die Natur der Aufgabe mit sich bringt, dieses Integral von x = — b bis x = + b, so erhält man für den gesuchten Werth von y

$$y = \frac{a\lambda}{2r\pi \, Cos.\Theta}\left[Cos. \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - r - b \, Cos.\Theta) - Cos. \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - r + b \, Cos.\Theta)\right]$$

und dieser Ausdruck läſst sich auch so schreiben

$$y = \frac{a\lambda}{r\pi \, Cos.\Theta}.Sin. \frac{2b\pi \, Cos.\Theta}{\lambda}.Sin. \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - r) \ldots (2)$$

Diese Gleichung (2) giebt aber, wenn man sie mit der allgemeinen Gleichung (D) zusammenstellt, eine Welle, deren Amplitüde a′ gleich ist

$$a' = \frac{a\lambda}{r\pi \, Cos.\Theta}.Sin. \frac{2b\pi \, Cos.\Theta}{\lambda}.$$

Dieses vorausgesetzt wollen wir nun zwei Fälle unterscheiden.

I. Sey für den ersten Fall die Wellenlänge λ gröſser, als der Radius b der Oeffnung; dieses ist der Fall für die *Schallwellen*, wo wir oben (§. 2. II.) gesehn haben, daſs die

Länge dieser Wellen für den tiefsten uns noch hörbaren Ton über 32 Par. Fuſs und selbst für den höchsten Ton noch 1,5 Duod.-Zoll beträgt. Für diesen Fall wird also der Bogen

$$\frac{2 b \pi \, \text{Cos.} \, \Theta}{\lambda}$$

immer sehr klein und daher nur sehr wenig von seinem Sinus verschieden seyn, wenn man nur, wie wir vorausgesetzt haben, die Oeffnung des Schirms selbst ungemein klein nimmt. Für die Schallwellen hat man daher die Amplitüde

$$a' = \frac{a \lambda}{r \pi \, \text{Cos.} \, \Theta} \cdot \frac{2 b \pi \, \text{Cos.} \, \Theta}{\lambda} = \frac{2 a b}{r},$$

so daſs also a' eine von Θ ganz unabhängige Gröſse ist, d. h. daſs, wenn Schallwellen durch die kleine Oeffnung jenes Schirms dringen, das Ohr dieselben in *allen* Puncten des Kreisumfanges AMB oder nach allen Richtungen Θ gleich gut hören wird, so lange nur die Entfernung r des Ohrs von der Oeffnung dieselbe bleibt, wie dieses auch der Erfahrung vollkommen gemäſs ist.

II. Ist aber für den zweiten Fall die Gröſse λ viel kleiner als b, wie dieses bei dem Lichte von allen Farben, nach der oben (§. 17.) gegebenen Tafel, zutrifft, so ist für den Punct N der Kreisperipherie, welcher der Oeffnung nahe senkrecht gegenübersteht, der Winkel Θ nahe gleich 90°, also Cos. Θ nahe gleich Null, also auch

$$\text{Sin.} \frac{2 b \pi \, \text{Cos.} \, \Theta}{\lambda} \text{ nahe gleich } \frac{2 b \pi \, \text{Cos.} \, \Theta}{\lambda},$$

so daſs daher die Amplitüde a'' für die in N auffallenden Lichtwellen den Werth erhält

$$a'' = \frac{a \lambda}{r \pi \, \text{Cos.} \, \Theta} \cdot \frac{2 b \pi \, \text{Cos.} \Theta}{\lambda} = \frac{2 a b}{r},$$

wie zuvor für die Schallwellen. Für alle andere Puncte der Peripherie aber ist diese Amplitüde gleich Null, so oft

$$\frac{2 b \pi \, \text{Cos.} \, \Theta}{\lambda} = \pm \pi \text{ oder } = \pm 2\pi \text{ oder } = \pm 3\pi \text{ u. s. w.},$$

das heiſst, so oft

$$\text{Cos.} \, \Theta = \pm \frac{1\lambda}{2b} \text{ oder } = \pm \frac{2\lambda}{2b} \text{ oder } = \pm \frac{3\lambda}{2b} \text{ u. s. w.}$$

wird. Es giebt also in der Peripherie zu beiden Seiten des Punctes N eine Folge von Puncten, wo gar kein Licht, sondern völlige Finsternifs herrscht, und dieser Puncte sind desto mehr, je kleiner λ gegen b ist. Zwischen diesen ganz finstern Puncten giebt es allerdings wieder mehrere lichte Puncte, aber sie sind alle viel schwächer beleuchtet, als der oben betrachtete Punct N. In der That wird man für die noch am stärksten beleuchteten dieser mittleren Puncte sehr nahe

$$\text{Sin.}\,\frac{2\,b\,\pi\,\text{Cos.}\,\Theta}{\lambda} = \pm 1$$

setzen, so dafs daher die Amplitüde derselben

$$a'' = \frac{a\lambda}{r\,\pi\,\text{Cos.}\,\Theta}$$

seyn wird. Da aber (nach §. 7.) die Intensität der Beleuchtung sich wie das Quadrat der Amplitüde der Schwingung verhält, so hat man, wenn I diese Intensität für den Punct N und I' die Intensität für alle andere Orte der Peripherie, wo sie noch am gröfsten ist, bezeichnet,

$$I : I' = \left(\frac{2\,a\,b}{r}\right)^2 : \left(\frac{a\lambda}{r\,\pi\,\text{Cos.}\,\Theta}\right)^2,$$

oder es ist

$$\frac{I'}{I} = \frac{\lambda^2}{4\,b^2\,\pi^2\,\text{Cos.}^2\,\Theta},$$

eine sehr kleine Gröfse, so lange nur Θ etwas von 90° verschieden ist. Nach der Tafel des §. 17. hat man z. B. für weifses Licht im Mittel $\lambda = 0{,}0005$ Millimeter. Ist also z. B. der Halbmesser b der Oeffnung ein Millimeter (oder 0,44 Par. Duod.-Linie), so ist auch

$$\frac{I'}{I} = \frac{0{,}0000000063}{\text{Cos.}^2\,\Theta}.$$

also eine gegen die Einheit immer äufserst geringe Gröfse, so lange nicht Cos. Θ sehr nahe an Null ist. Daraus folgt demnach, dafs blofs in dem der Oeffnung ab senkrecht gegenüberstehenden Puncte N des Kreisumfangs eine bemerkbare Intensität der Beleuchtung statt hat, während alle andere Puncte des Kreises sehr nahe in totaler Finsternifs liegen.

III. Diese Folgerung ist für die Undulationslehre von der gröfsten Wichtigkeit, da durch sie der vorzüglichste Einwurf, welcher ihr von ihren Gegnern gemacht worden ist, vollständig widerlegt wird. Man hat nämlich eingewendet, dafs das Licht, wenn es, wie der Schall, durch Wellen verbreitet werden sollte, sich auch, wie der Schall, nach allen Richtungen von der Oeffnung ab gleichförmig ausbreiten müfste, da man doch im Gegentheile sähe, dafs ein durch eine kleine Oeffnung eines verfinsterten Zimmers eindringendes Licht nur die dieser Oeffnung in der Richtung des Lichtes gegenüberliegenden Puncte, keineswegs aber nach Art des Schalls das ganze Zimmer erfülle. Die Widerlegung dieses scheinbar so starken Einwurfs liegt aber, wie man aus dem Vorhergehenden sieht, darin, dafs die Wellen des Lichtes unvergleichbar kleiner sind als die des Schalls, und die hier aufgestellte Theorie zeigt deutlich, dafs diese beiden Erscheinungen sich keineswegs widersprechen und dafs, aus demselben Grunde, der Schall sich nach allen Seiten, das Licht aber nur in einer einzigen Richtung, die zugleich die Richtung der Fortpflanzung der Lichtwellen ist, für unsere Sinne bemerkbar fortpflanzen kann.

IV. Im Vorhergehenden wurden die zweiten und höhern Potenzen der sehr kleinen Gröfse x vernachlässigt. Man sieht aber leicht, dafs, wenn man auch diese höheren Potenzen noch mitgenommen hätte, dadurch unsere vorhergehende Folgerung keine wesentliche Aenderung erleiden könnte. Man würde nämlich für den ersten Fall oder für die Schallwellen ganz und gar dasselbe Resultat gefunden haben und für den zweiten Fall würden blofs diejenigen Puncte zu beiden Seiten von N, wo eine völlige Finsternifs und wo noch eine, obschon immer äufserst schwache, gröfste Beleuchtung herrscht, etwas weniges aus ihren Stellen vor- oder rückwärts verschoben werden, was alles in unsern obigen Schlüssen nichts ändern kann.

V. Noch läfst sich aus dem Vorhergehenden eine andere wichtige Folgerung ziehn. Bei unserer Unkenntnifs des Gesetzes der Intensität, nach welchem sich die aus einem Mittelpuncte kommenden sphärischen Lichtwellen in verschiedenen Richtungen fortpflanzen, haben wir in der einfachsten

Hypothese angenommen, dafs diese Intensität für alle Richtungen dieselbe sey. Obschon diese Annahme nicht unmittelbar bewiesen werden konnte, so wird sie doch durch die Auflösung unsers letzten Problems vollkommen bestätigt. Wir haben nämlich gefunden, dafs, wenn die Länge λ der Welle gegen den Halbmesser b der Oeffnung sehr klein ist, eine unsern Sinnen noch merkbare Intensität des Lichts blofs in derjenigen Richtung statt hat, in welcher sich die Lichtwelle selbst, ehe sie jene Oeffnung errreichte, fortgepflanzt hat, was denn auch den Beobachtungen vollkommen gemäfs ist. Dasselbe würde aber auch noch der Fall seyn, wenn die Intensität des Lichtes nicht constant, sondern irgend eine Function des Winkels Θ wäre, welchen es mit der ursprünglichen Richtung der Welle macht. Da nämlich die Intensität blofs für $\Theta = 90^0$ für uns noch merkbar ist, so werden wir jene Function nur so annehmen dürfen, dafs sie in der Nähe von $\Theta = 90^0$ sich nur nicht schnell ändert und dafs sie, wenn dieser Winkel Θ kleiner wird, rasch abnimmt.

VI. Das Vorhergehende setzt ebenfalls voraus, dafs die Lichtwellen sich in allen Richtungen mit derselben Geschwindigkeit fortpflanzen und dafs auch die Richtung der Bewegung aller jener kleinen Wellen, die durch die Oeffnung ab gehn, mit der auf der Ebene des Schirms senkrechten Richtung der ursprünglichen grofsen Welle identisch ist. Denn der durch die Oeffnung ab gehende Theil der grofsen Welle beleuchtet nur denjenigen Theil des Halbkreises, welcher senkrecht über ab steht, und wenn man diese Oeffnung verschliefsen und dafür den Schirm an einer andern Stelle öffnen wollte, so würde wieder nur derjenige Theil des hinter dem Schirme befindlichen Raumes beleuchtet werden, welcher dieser neuen Oeffnung senkrecht gegenüber steht. Eben durch diese Erfahrungen ist man aber auf die zuerst aufgestellte Hypothese der Emanation oder der geradlinigen Ausströmung des Lichtes gekommen, die sich auch allerdings durch ihre Einfachheit vor allen andern darbieten mufste.

22) Intensität des durch Spiegel interferirten Lichts.

Wir haben bereits oben (§. 19.) gesehn, dafs zwei aus

derselben Quelle kommende Lichtstrahlen sich in ihrem Lichte gegenseitig bald verstärken, bald auch schwächen, ja sogar einander ganz aufheben können. Wir wollen nun sehn, wie man den Grad dieser Intensität des Lichtes, der durch die Concurrenz zweier solcher Strahlen entsteht, genauer bestimmen kann. Nehmen wir an, daſs von dem leuchtenden Puncte A eine Reihe von divergirenden Lichtwellen ausgehe und auf zwei Planspiegel BC und CD falle, die nur um einen sehr kleinen Winkel ω gegen einander geneigt sind, so daſs beide zusammen sehr nahe in eine und dieselbe Ebene fallen. Sey C die Projection der geraden, auf der Ebene der Zeichnung senkrechten Linie, in welcher sich diese zwei Spiegel schneiden, und EF ein ebenfalls auf der Zeichnungsebene senkrecht stehender Schirm, der das von den beiden Spiegeln reflectirte Licht auffängt, ganz so, wie wir dieses oben (§. 16. Fig. 188.) angenommen haben. Dieses vorausgesetzt sey G das (durch die gewöhnlichen Regeln der Katoptrik bei ebenen Spiegeln bestimmte) Bild von A, wie es von dem Spiegel BC entworfen wird, und ebenso H das durch den Spiegel CD erzeugte Bild desselben Lichtpunctes A, so daſs man also annehmen kann, das Licht komme nicht sowohl von diesem Puncte A, als vielmehr von den beiden Puncten G und H dieser zwei Bilder. Die von dem ersten Spiegel BC zurückgeworfenen Lichtwellen werden sich (nach §. 12.) so verhalten, als ob sie aus dem Mittelpuncte G ausgegangen wären, und die Entfernung jedes Elements M einer solchen Welle von G wird immer gleich seyn der Summe der Entfernungen NM und NA, wenn N den Punct des Spiegels BC bezeichnet, in welchem der von A kommende Lichtstrahl auffällt und von welchem dieser Strahl nach dem Puncte M des Schirms EF zurückgeworfen wird. Es ist nämlich, wie aus den ersten Elementen der Optik folgt, $NM = GN$ und ebenso $AN = GN$, also auch $AN + NM = GM$.

Fig. 192.

Nehmen wir ferner an, daſs die von dem bloſs imaginären Puncte G entstehende Welle in demselben Augenblicke aus diesem Puncte G ausgehe, in welchem die wahre Welle aus dem Lichtpuncte A entspringt, und daſs sie auch dieselbe Intensität des Lichtes habe. Ganz ebenso soll auch die andere, von dem zweiten Spiegel CD kommende Welle aus dem imaginären Puncte H in demselben Augenblicke und mit

derselben Intensität ausgehn, mit welcher die wahre Welle von A ausgeht, so dafs also das hier aufzulösende Problem eigentlich in der Bestimmung der Intensität zweier Lichtwellen besteht, die in derselben Zeit und mit derselben Intensität von den beiden Mittelpuncten G und H ausgehn und sich, wenn sie dem Schirm EF begegnen, unter einander vermischen. Zu diesem Zwecke sey L der mittlere Punct der jene beiden Puncte verbindenden Geraden GH und O der Punct des Schirms, in welchem die Gerade LC verlängert dem Schirme begegnet. Setzen wir die Linien $AC = f$ und $CO = g$, so ist, wie man sofort sieht, der Winkel $GCH = 2\omega$, und da $GC = AC = HC$ ist, so steht CL senkrecht auf GH und halbirt den Winkel GCH, so dafs man also hat

$$GL = HL = f \operatorname{Sin.} \omega$$

und

$$LO = f \operatorname{Cos.} \omega + g.$$

Nimmt man nun die Gröfse oder die Amplitüde jeder Welle der Entfernung derselben von ihrem Mittelpuncte verkehrt proportional an, so wird man für jeden dem Puncte O des Schirms sehr nahen Punct M, unserer allgemeinen Gleichung (D) des §. 18. zufolge, den Ausdruck haben

$$y' = \frac{a}{GM} \operatorname{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha t - GM + A).$$

Da aber die Veränderungen in der Länge der Linie GM unserer Voraussetzung gemäfs nur sehr klein seyn können, so wird man in dieser Gleichung links vom Sinuszeichen statt GM die constante Gröfse LO, die sehr nahe gleich $f + g$ ist, setzen können, so dafs man daher hat

$$y' = \frac{a}{f+g} . \operatorname{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha t - GM + A),$$

wo wieder α und A die zwei oben (§. 18.) eingeführten Constanten bezeichnen. Auf ganz dieselbe Weise wird man auch für die von dem Mittelpuncte H ausgehende Lichtwelle haben

$$y'' = \frac{a}{f+g} \operatorname{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha t - HM + A),$$

wo die Constante A in beiden Gleichungen für y und y' dieselbe seyn mufs, weil die Wellen von den beiden Puncten G und H, der obigen Voraussetzung gemäfs, in demselben

Augenblicke ausgehn, also auch für jede gegebene Zeit in derselben Phase sind. Wenn nun diese beiden Wellen sich in dem dem Puncte O sehr nahen Puncte M des Schirms begegnen, so wird man für die aus dieser Begegnung entspringende Welle den Ausdruck haben $y = y' + y''$ oder

$$y = \frac{a}{f+g}\left\{ \text{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - GM + A) + \text{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - HM + A)\right\},$$

welche Gleichung auch so geschrieben werden kann:

$$y = \frac{2a}{f+g} \text{Cos.} \frac{\pi}{\lambda}(GM - HM) . \text{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda}\left(\alpha t - \frac{GM+HM}{2} + A\right).$$

Da nun nach dem Vorhergehenden die Intensität des Lichtes sich wie das Quadrat der Amplitüde der Welle verhält und da nach §. 18. Gleichung (D) die Amplitüde gleich dem Factor der trigonometrischen Function dieser Gleichung d. h. gleich dem gröſsten Werthe der Gröſse y ist, so wird man für die Intensität I dieser vermischten oder dieser Doppelwelle den Ausdruck haben

$$I = \frac{4a^2}{(f+g)^2} \text{Cos.}^2 \frac{\pi}{\lambda} (GM - HM).$$

Um diese Gleichung weiter zu reduciren, bemerken wir, daſs man hat

$$GM^2 = LO^2 + (GL + OM)^2$$

oder, was dasselbe ist,

$$GM^2 = (f \text{Cos.} \omega + g)^2 + (f \text{Sin.} \omega + OM)^2,$$

wofür man annähernd setzen kann

$$GM = f \text{Cos.} \omega + g + \tfrac{1}{2} . \frac{(f \text{Sin.} \omega + OM)^2}{f \text{Cos.} \omega + g}.$$

Ganz auf dieselbe Art erhält man auch

$$HM = f \text{Cos.} \omega + g + \tfrac{1}{2} . \frac{(f \text{Sin.} \omega - OM)^2}{f \text{Cos.} \omega + g}.$$

Die Differenz dieser beiden Gröſsen ist daher

$$GM - HM = \frac{2 f \text{Sin.} \omega . OM}{f \text{Cos.} \omega + g},$$

oder, da der Winkel ω immer nur äuſserst klein ist,

$$GM - HM = \frac{2 f . OM . \text{Sin.} \omega}{f + g}.$$

Wir haben daher für die Intensität der Doppelwelle d. h. für die Lichtstärke in dem Puncte M des Schirms

$$I = \frac{4a^2}{(f+g)^2} \text{Cos.}^2 \left(\frac{2\pi . OM}{\lambda} . \frac{f \text{Sin.} \omega}{f+g} \right) \ldots \quad (E)$$

Dieser Ausdruck für I variirt also je nach den verschiedenen Lagen des Punctes M gegen den fixen Punct O des Schirms. Betrachten wir einige dieser Lagen besonders.

I. Wenn M mit dem Puncte O der verlängerten Linie LC zusammenfällt, so ist OM gleich Null und die Gleichung (E) giebt

$$I = \frac{4a^2}{(f+g)^2}$$

und dieses ist zugleich der *gröfste Werth*, den die Lichtstärke der Doppelwelle auf dem Schirme erhalten kann.

II. Wenn M von dem fixen Puncte O zu beiden Seiten des letztern sich entfernt, so dafs man z. B. hat

$$OM = \pm \frac{f+g}{f \text{ Sin.} \omega} . \frac{\lambda}{4},$$

so wird der Winkel $\frac{2\pi . OM}{\lambda} . \frac{f \text{Sin.} \omega}{f+g} = \pm \frac{1}{2} \pi$, also der Cosinus dieses Winkels gleich Null, also ist auch für diesen Fall

$$I = 0,$$

oder die Intensität des Lichts verschwindet für diesen Punct des Schirms, der daher ganz dunkel oder lichtlos ist.

III. Nimmt man aber den Punct M so, dafs man hat

$$OM = \pm \frac{f+g}{f \text{ Sin.} \omega} . \frac{\lambda}{2},$$

so wird jener Winkel gleich $\pm \pi$ und daher

$$I = \frac{4a^2}{(f+g)^2}$$

oder die Intensität des Lichtes in diesem Puncte hat wieder ihren gröfsten Werth, wie in I oder wie für $OM = 0$.

IV. Nehmen wir ferner M so an, dafs man hat

$$OM = \pm \frac{f+g}{f \text{ Sin.} \omega} . \frac{3\lambda}{4},$$

so wird der erwähnte Winkel gleich $\pm \frac{3\pi}{2}$ und daher

$$I = 0,$$

oder dieser Punct ist wieder ganz finster, wie der in II.

V. Nimmt man endlich allgemein den Punct M so an, dafs man hat

$$OM = \pm 2n . \frac{f+g}{f \operatorname{Sin.} \omega} . \frac{\lambda}{4},$$

wo n irgend eine ganze und gerade Zahl bezeichnet, so ist jener Winkel gleich $n\pi$ und daher

$$I = \frac{4a^2}{(f+g)^2},$$

oder I hat seinen gröfsten Werth, wie in (I).

Ist aber

$$OM = \pm (2n+1) . \frac{f+g}{f \operatorname{Sin.} \omega} . \frac{\lambda}{4},$$

so ist jener Winkel gleich $(2n+1)\frac{\pi}{2}$, oder I hat seinen kleinsten Werth $I = 0$ und der Punct M ist ganz lichtlos. Dieses gilt von den Puncten des gröfsten und kleinsten Lichts. Zwischen diesen Puncten nimmt aber die Intensität des Lichts stufenweise ab oder zu. Man sieht daher, übereinstimmend mit dem, was bereits oben (§. 16.) gesagt worden ist, dafs es auf dem Schirme von dem fixen Puncte O aus längst der Geraden IK eine Reihe von äquidistanten Puncten geben wird, wo die Stärke der Beleuchtung abwechselnd am gröfsten und am kleinsten ist, dafs der Punct O selbst einer der am meisten beleuchteten ist, und dafs endlich alle Puncte der kleinsten Beleuchtung ganz ohne Licht oder völlig dunkel seyn werden. Da aber der Schirm als eine auf der Ebene der Zeichnung (des Papiers) senkrecht stehende Tafel angenommen worden ist, so sieht man, dafs es noch mehrere solche gerade Linien mit abwechselnder Beleuchtung geben wird, die alle der IK parallel in der Ebene des Schirms liegen. Diese Linien haben je nach dem verschiedenen Neigungswinkel ω der Spiegel auch verschiedene Breiten und werden daher *Streifen* (*Franges*, *Fringes*) genannt. Aus den vorhergehenden Werthen von OM folgt, dafs, wenn die Gröfse $(f+g)$

oder die Distanz LO des Bildes der Spiegel von dem Schirm gegeben ist, die Breite OM des Streifens, für jede bestimmte Farbe, sich verkehrt wie f Sin. ω oder verkehrt wie GH verhält, so dafs, je näher sich die beiden Bilder G und H der beiden Spiegel kommen, desto gröfser auch die Breite der Streifen seyn wird.

VI. In dem Vorhergehenden wurde, der Kürze und gröfsern Einfachheit wegen, die Reflexionsebene AEBCDF senkrecht auf die Durchschnittslinie der beiden Spiegel angenommen. Allein man sieht ohne Rechnung, dafs eine Neigung der Spiegel gegen die Ebene der Zeichnung die oben gefundenen Resultate im Allgemeinen nicht ändern wird.

VII. Im Obigen wurde durchaus nur gleichartiges Licht vorausgesetzt, z. B. das zusammengesetzte weifse Sonnenlicht. Anders würde sich die Sache verhalten, wenn die zwei Strahlen, um deren Mischung es sich hier handelt, z. B. von einfachen verschieden gefärbten Strahlen des Sonnenlichts oder von zwei verschiedenen unserer künstlichen Lichter kämen. In solchen Fällen mufs aber das Licht als aus verschiedenen Wellen zusammengesetzt betrachtet werden, deren jede einen besondern Werth für die Gröfse λ hat, wie wir oben (§. 17.) gesehn haben.

VIII. So lange daher nur von gleichartigem Lichte die Rede ist oder so lange bei den beiden aus G und H kommenden Wellen die Längen λ derselben auch die nämlichen Werthe haben, so ist, wie wir gesehn haben, für den fixen Punct O die Intensität des Lichts am gröfsten und gleich

$$I = \frac{4a^2}{(f+g)^2},$$

welches auch der Werth dieser den beiden Wellen gemeinschaftlichen Gröfse λ seyn mag. In diesem Puncte O wird daher auch die Intensität der blofsen rothen oder der blofsen grünen Strahlen u. s. w. jede für sich, so wie dann auch die Intensität des ganzen zusammengesetzten oder weifsen Sonnenlichts am gröfsten seyn, weil der letzte Ausdruck von I ganz unabhängig von λ ist. Da nun überhaupt die Beleuchtung eines jeden Lichtes gleich dem Quadrate der beleuchtenden Kraft a desselben, dividirt durch das Quadrat $(f+g)^2$ der

Entfernung des Lichts von dem beleuchteten Körper ist, so wird jener fixe Punct O des Schirms von den gesammten gefärbten Sonnenstrahlen viermal stärker durch die beiden Planspiegel BC und CD erleuchtet werden, als wenn das Licht des Punctes A nur mittelst eines einzigen dieser beiden Spiegel auf den Schirm reflectirt worden wäre. Kein anderer Punct des Schirms erfreut sich dieses Vortheiles, denn wenn man die Länge einer Welle z. B. für das violette Licht durch λ', für das indigofarbne durch λ'', für das blaue durch λ'''... bezeichnet und wenn man den Werth von a für diese Farben in derselben Ordnung durch a', a'', a'''. . ausdrückt und dann z. B. den Punct M betrachtet, dessen Entfernung von dem fixen Puncte, wie oben in III.

$$OM = \frac{f+g}{f \operatorname{Sin.} \omega} \cdot \frac{\lambda'}{2}$$

ist, so erhält man, nach dem Vorhergehenden, für die Intensität des violetten Lichts

$$I' = \frac{4a'^2}{(f+g)^2},$$

für das indigofarbne

$$I'' = \frac{4a''^2}{(f+g)^2} \cdot \operatorname{Cos.}^2 \frac{\pi\lambda'}{\lambda''},$$

für das blaue

$$I''' = \frac{4a'''^2}{(f+g)^2} \cdot \operatorname{Cos.}^2 \frac{\pi\lambda'}{\lambda'''} \text{ u. s. w.}$$

Wenn aber diese farbigen Lichtarten nur von einem einzigen Spiegel nach dem Puncte M des Schirms, ohne Mischung oder ohne Interferenz derselben, wären zurückgeworfen worden, so würde man für die Intensitäten der Beleuchtung des Punctes M erhalten haben

$$\frac{4a'^2}{(f+g)^2}, \quad \frac{4a''^2}{(f+g)^2}, \quad \frac{4a'''^2}{(f+g)^2} \text{ u. s. w.}$$

und diese Ausdrücke sind von den vorhergehenden offenbar verschieden. Daraus folgt demnach, daſs die verschiedenen einzelnen Farbenlichter nicht in demselben Verhältnisse gemischt sind, wie in dem ursprünglichen Lichte, und daſs, wenn z. B. das aus dem Puncte A ausströmende Licht weiſses Sonnenlicht ist, kein Punct des Schirms, auſser jenem fixen

Puncte O, wieder mit reinem weifsen Lichte beleuchtet seyn wird. In der That, die Breite der erwähnten hellen und dunklen Streifen des Schirms wird für jede einzelne Farbe des Sonnenlichts dem dieser Farbe entsprechenden Werthe von λ proportional seyn. Die Streifen des violetten Lichts werden daher enger seyn, als die des grünen, die des grünen enger, als die des gelben u. s. w. Aber der durch den Punct O gehende Streifen besteht aus allen jenen gefärbten Streifen, deren jeder die gröfste Intensität seiner ihm eigenthümlichen Beleuchtung hat. In diesen Streifen wird also eine *vollkommene* Mischung *aller* Farben des Sonnenlichtes statt haben; in dem nächstfolgenden Streifen, zu beiden Seiten von jenem, wird sehr nahe noch eine ebenso vollkommene Abwesenheit des Lichtes, sehr nahe eine völlige Dunkelheit herrschen; in dem dritten oder in dem nächstkommenden hellen Streifen wird das rothe Licht bereits etwas über die andern Farben heraustreten, und noch mehr wird dieses in den später folgenden lichten Streifen der Fall seyn, wo das rothe Licht über das orangefarbne, das orangefarbne über das gelbe u. s. w. heraustreten und gleichsam darüber wegfliefsen wird, so dafs daher diese von dem fixen Puncte O mehr und mehr entfernten Streifen auch mehr und mehr gefärbt erscheinen werden, während der durch O gehende Streifen in dem hellsten weifsen Lichte glänzt. Nach der in §. 17. gegebenen Tafel für die Längen der einzelnen gefärbten Lichtwellen sollen die hellen Streifen auf ihrer äufseren, von O abgekehrten Seite roth und auf ihrem inneren Rande violett erscheinen, was auch vollkommen mit den Beobachtungen übereinstimmt. In gröfseren Entfernungen von O wird sich der breitere rothe Rand der Aufsenseite mit dem ebenfalls breitern blauen Rande der Innenseite der nächsten Streifen immer mehr und mehr mischen, die ganz lichtlosen Streifen werden immer enger und weniger finster werden und endlich ganz aufhören, so dafs, in einer beträchtlichen Entfernung von O, nicht nur die dunklen Streifen verschwinden, sondern auch die einzelnen Farben der lichten Streifen sich in solchem Mafse unter einander mischen werden, dafs das Auge im Allgemeinen nur noch eine nahe gleichförmig beleuchtete weifse Stelle des Schirms bemerken kann, was ebenfalls Alles den Beobachtungen vollkommen gemäfs ist. Ueberhaupt können diese Streifen immer

dann nicht mehr gesehn werden, wenn der eine von den beiden Lichtströmen, deren Coincidenz jene Erscheinungen verursachte, einen Weg zurückgelegt hat, der um mehrere Werthe von λ von dem Wege des andern Stromes verschieden ist. Gebraucht man weiſses Sonnenlicht bei diesen Experimenten, so verschwinden jene Streifen, sobald der Weg des einen Strahls um zehn oder zwölf Werthe von λ gröſser oder kleiner ist, als der Weg des andern.

IX. Diese Gröſse λ ist, wie wir oben (§. 17.) gesehn haben, für alle Arten von Licht ungemein klein, so daſs es uns wohl immer unmöglich gewesen seyn würde, den wahren Werth derselben zu messen. Allein der Winkel ω der beiden Spiegel kann offenbar so klein gemacht werden, als man nur immer will, oder mit andern Worten, der Werth der Gröſse

$$\frac{f+g}{f \operatorname{Sin}. \omega} . \lambda$$

kann so groſs gemacht werden, als es uns gefällt, und darin liegt die Möglichkeit, jene kleinen Werthe von λ noch unserer Messung zu unterwerfen, wie wir dieses bereits oben (§. 17.) gesagt haben. Auch ist schon in dem Vorhergehenden erwähnt worden, daſs diese ebenso einfache als sinnreiche Erklärung der Interferenz des Lichtes zugleich den schönsten Beweis für die Richtigkeit der Undulationstheorie giebt. Wenn einer der beiden Lichtstrahlen durch einen undurchsichtigen Körper aufgehalten oder unterbrochen wird, so verschwindet sofort das ganze Phänomen der Interferenz und alle jene früher dunkeln Streifen werden sofort wieder licht. Es ist wohl für sich klar, daſs man diese Erscheinungen durch die Emanations- oder Emissionstheorie, wie man dieselbe auch wenden und drehn mag, nie auf eine einfache und genügende Weise erklären wird, und man kann auch nicht absehn, wie irgend eine andere Theorie, auſser jener der Undulation, davon eine befriedigende Rechenschaft geben könnte.

23) Intensität des interferirten Lichts durch Prismen.

Fig. 193. Nehmen wir nun an, daſs von dem leuchtenden Puncte A eine Reihe von divergirenden Wellen ausgehe, die auf das

Prisma BCD fallen, dessen beide Seiten BC und CD unter sich gleich sind und mit der dritten Seite BD den sehr kleinen Winkel ω bilden, welches wird die Intensität des Lichtes in den verschiedenen Puncten des Schirms EF seyn, wo die von dem Prisma gebrochenen Lichtströme sich vermischen? Wir haben oben (§. 12.) gesehn, daſs bei der Brechung des Lichts, wenn es z. B. aus der Luft in Glas übergeht, der Sinus des Einfallswinkels zu dem Sinus des Refractionswinkels sich verhält, wie die Geschwindigkeit des Lichts in der Luft zu der Geschwindigkeit desselben im Glase. Bezeichnet man das Verhältniſs dieser beiden Geschwindigkeiten der Kürze wegen durch μ, so ist μ gröſser als die Einheit, weil nach §. 12. VIII. die Geschwindigkeit des Lichts in den dichteren Mitteln kleiner ist, als in den dünneren. Dieses vorausgesetzt hat man (wenn die Buchstaben dieser Figur eine analoge Bedeutung mit denen der unmittelbar vorhergehenden Figur haben) sehr nahe

$$AG = AH = AC.(\mu - 1).\text{Sin}.\omega = (\mu - 1)\, f\, \text{Sin}.\omega.$$

Allein in §. 22., wo die Interferenz des Lichts durch die Reflexion desselben von zwei Planspiegeln erzeugt wurde, hatten wir für den Werth der Linie $GL = LH$ oder, was hier, wo der Punct A mit L zusammenfällt, dasselbe ist, für den Werth der Linie

$$GA = AH = f\,\text{Sin}.\omega,$$

woraus daher sofort folgt, daſs die Antwort auf die gegenwärtige Frage gegeben seyn wird, wenn man in der Formel des §. 22. statt f Sin. ω die Gröſse $(\mu - 1) f\,\text{Sin}.\omega$ setzt, so daſs man daher sogleich für die hier zu suchende Intensität I des Lichtes den Ausdruck erhält

$$I = \frac{4a^2}{(f+g)^2}\,\text{Cos.}^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{(\mu-1)\,f\,\text{Sin}.\omega}{f+g}\cdot OM\right) \ldots (E')$$

und aus dieser Gleichung wird man ganz ähnliche Folgerungen, wie aus der Gleichung (E) des §. 22. ableiten. So erhalten wir z. B. für die Breite der hellen und dunklen Streifen oder Fransen auf dem Schirm EF den Ausdruck

$$\frac{(f+g)}{(\mu-1)\,f\,\text{Sin}.\omega}\cdot\frac{\lambda}{4},$$

so daſs also hier die Distanzen der Mittelpuncte der hellen und

dunklen Streifen nicht mehr (wie in §. 22. IX.) bloſs von λ, sondern vielmehr von der Gröſse

$$\frac{\lambda}{\mu - 1}$$

abhängen. Allein μ variirt bekanntlich mit λ, da μ am gröſsten ist für die kleinsten λ und umgekehrt durch die ganze Reihe des Farbenspectrums. Die Breiten dieser Streifen sind also von denen des §. 22. etwas verschieden und mehr ungleich und die oben erwähnte Mischung der Farben, zugleich mit der Verschwindung der dunklen Streifen, hat schon für kleinere Distanzen von dem Puncte O statt, als in §. 22.

24) Intensität des interferirten Lichts, wenn einer der beiden Lichtströme durch einen diaphanen Körper geht.

Setzen wir nun voraus, daſs von dem nach §. 22. oder 23. interferirten Lichte einer der beiden Lichtströme durch eine Glasplatte geht, deren beide Seiten unter sich parallel sind. Sey für den Fall des §. 22., wo die Interferenz durch zwei Spiegel erzeugt wird, PQ diese Glasplatte und Δ die Dicke derselben. Da das Verhältniſs der Geschwindigkeit des Lichts in der Luft zu der im Glase durch μ bezeichnet wird, so wird man den Weg des durch die Glasplatte gehenden Lichtstroms, der ohne dieses Glas gleich LO seyn würde, jetzt nur gleich

Fig. 192.

$$LO + (\mu - 1)\Delta$$

setzen, um auf diesen Durchgang des Lichts durch die Platte Rücksicht zu nehmen. Nun hatten wir oben (§. 22.) für die Intensität I den Ausdruck erhalten

$$I = \frac{4a^2}{(f+g)^2} \text{Cos.}^2 \frac{\pi}{\lambda} (GM - HM),$$

also wird man auch hier, bei dem Durchgange des Lichts durch die Platte, haben

$$I = \frac{4a^2}{(f+g)^2} \text{Cos.}^2 \frac{\pi}{\lambda} [GM - HM - (\mu - 1)\Delta],$$

oder, wenn dieser Ausdruck, wie der analoge des §. 22., reducirt wird,

$$I = \frac{4a^2}{(f+g)^2} \operatorname{Cos.}^2 \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{f \operatorname{Sin.} \omega}{f+g} OM - \frac{\mu-1}{2} . \Delta \right) \ldots (E'')$$

Behandelt man diese Gleichung, wie zuvor die Gleichung (E) des §. 22., so sieht man, dafs jetzt die Orte der gröfsten Intensität oder der stärksten Beleuchtung erhalten werden, wenn man die Gröfse

$$\frac{f \operatorname{Sin.} \omega}{f+g} OM - \frac{\mu-1}{2} \Delta$$

nach der Reihe gleich

$$0 \text{ oder } \pm \frac{\lambda}{2} \text{ oder } \pm \lambda \text{ u. s. w.}$$

setzt, das heifst, wenn man annimmt

$$OM = \frac{f+g}{2 f \operatorname{Sin.} \omega} (\mu - 1) \Delta,$$

oder

$$= \frac{f+g}{2 f \operatorname{Sin.} \omega} [(\mu - 1) \Delta \pm \lambda],$$

oder

$$= \frac{f+g}{2 f \operatorname{Sin.} \omega} [(\mu - 1) \Delta \pm 2\lambda] \text{ u. s. w.}$$

I. Wenn nun die Gröfse $\mu - 1$ für alle Farben des Sonnenspectrums denselben Werth hätte, so würden die letzten Ausdrücke mit denen des §. 22. I., II., III. . . völlig übereinstimmen, nur würde die Breite der Fransen jetzt gleich

$$\frac{f+g}{2 f \operatorname{Sin.} \omega} (\mu - 1) \Delta$$

seyn. Das ganze System dieser Fransen würde daher durch die Interposition der Glasplatte blofs die Aenderung erleiden, dafs es etwas näher an den oberen Punct K oder F des Schirms gerückt würde. Da aber $\mu - 1$ für verschiedene Farben auch in der That verschiedene, wenn gleich nur wenig verschiedene Werthe hat, so wird nebst jener Veränderung des ganzen Systems auch noch eine geringe Aenderung in der Breite und Colorirung der Fransen eintreten; Aenderungen übrigens, die alle vollständig durch Hülfe der letzten Gleichung (E″) bestimmt werden können.

II. Man sieht leicht, dafs man, wenn zu diesem Ex-

periment eine Platte von ganz gemeinem Glase genommen wird, die beiden Längen des Weges der zwei Lichtströme

$$GM \text{ und } HM + (\mu - 1)\Delta$$

wegen der ungemein kleinen Gröſse λ für jeden Punct der Tafel zwischen I und K um mehrere Multipla von λ verschieden erhalten müsse, da eine solche Glasplatte in jedem ihrer Puncte eine andere Dicke hat. In diesem Falle würde man also nur gemischtes weiſses Licht und durchaus keine Fransen sehn. Man kann sich aber dadurch helfen, daſs man eine zu beiden Seiten nahe parallele und dünne Spiegelscheibe in zwei Stücke bricht und das eine dieser Stücke in den einen, das andere aber in den andern der beiden Lichtströme hält. Besser noch wird man das eine dieser Stücke auf den ersten Lichtstrahl senkrecht halten, während man das andere gegen den zweiten Lichtstrahl unter einer kleinen Neigung stellt, wo man dann diese Neigung des letztern Stücks so lange ändern kann, bis jene Fransen ganz rein erscheinen. Die schiefe Stellung des zweiten Stücks gegen den zweiten Lichtstrom hat nämlich dieselbe Wirkung, als ob dieses zweite Stück an Dicke etwas zugenommen hätte, bis es die gewünschte Wirkung hervorbringt.

D. Farbige Kreise.

25) Erscheinungen der farbigen Kreise.

Auſser dem erwähnten Experimente mit zwei nur wenig gegen einander geneigten Spiegeln giebt es noch eine groſse Menge anderer Versuche, bei welchen ebenfalls jene merkwürdigen hellen und dunklen Streifen erscheinen. Sie gehören eigentlich alle zu dem Capitel von der Interferenz des Lichtes, von der sie als eine bloſse Folge zu betrachten sind. Zur bequemeren Uebersicht wollen wir sie aber besonders betrachten und in zwei Classen eintheilen, deren erste die farbigen Ringe begreift, die bei dem Durchgange des Lichts durch sehr dünne Körper entstehn, während die zweite Classe alle diejenigen Phänomene umfassen soll, die bei dem Durchgange des Lichts durch sehr kleine Oeffnungen statt haben, Phänomene, die unter der Benennung der *Diffraction* (oder der *Beugung*) des Lichtes bekannt sind.

Der Apparat, den Newton zur Beobachtung der farbigen

nach ihm benannten Ringe gebrauchte, bestand aus einem Spiegelglas, dessen Seiten parallel sind, und aus einer planconvexen Glaslinse von grofsem Krümmungshalbmesser (von nahe hundert Fufs Länge). Wenn man die convexe Seite der Linse gegen das Spiegelglas sanft andrückt und auf den Berührungspunct beider Gläser z. B. rothes Sonnenlicht (das man durch die bekannte Brechung des weifsen Lichts durch ein Prisma erhält) fallen läfst, so sieht das Auge in O, wenn es auf derselben Seite der Gläser, wie die Sonne S steht, in dem Berührungspuncte der Gläser einen schwarzen runden Flecken, um diesen Flecken aber einen rothen Ring, um diesen Ring wieder einen schwarzen, dann einen rothen Ring u. s. w. Diese Ringe werden also von dem Auge in O durch *Reflexion* gesehn. Steht aber das Auge in O′ auf der der Sonne gegenüberliegenden Seite der Gläser, wo es die von den Gläsern *gebrochenen* Strahlen erhält, so sieht es in dem Berührungspuncte einen runden, rothen Flecken, um denselben einen dunklen Kreis, um diesen wieder einen rothen Kreis u. s. w. Doch ist hier die dunkle, so wie auch die rothe Farbe nicht so lebhaft, wie in der ersten Lage O des Auges. Fig. 194.

Es würde schwer seyn, die veränderliche Dicke der sehr dünnen Luftschicht unmittelbar zu messen, die zwischen den beiden Gläsern enthalten ist. Aber dafür lassen sich die Halbmesser jener Ringe desto genauer messen und daraus kann man die Dicke der Schichten leicht durch Rechnung ableiten. Ist nämlich $eq = x$ die Dicke der Luftschicht für den Punct e und $de = cq = r$ der Halbmesser eines Rings, so wie R der Krümmungshalbmesser der convexen Seite der Linse, so hat man aus der bekannten Eigenschaft des Kreises

$$r^2 = x(2R - x)$$

oder, da x gegen $2R$ nur sehr klein ist, nahe

$$r^2 = 2R.x,$$

so dafs also die Dicke der Schichten für dieselbe Linse dem Quadrate des Halbmessers des Rings proportionirt ist. Newton, der diese Versuche zuerst anstellte, fand, dafs die Quadrate der Halbmesser der aufeinander folgenden rothen Ringe sich wie die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 . . verhalten und die der schwarzen wie die geraden Zahlen 0, 2, 4, 6 . . ., wenn er dieselben aus O oder durch Reflexion betrachtete.

Aus dem Puncte O' aber, durch Refraction betrachtet, fand er umgekehrt die Quadrate der Halbmesser der rothen Ringe gleich 0, 2, 4, 6 .. und die der schwarzen 1, 3, 5, 7 .., so daſs also, auch die Dicke der Luftschicht zwischen den beiden Gläsern nach dem Vorhergehenden in demselben Verhältnisse steht. Ganz dieselben Verhältnisse fand er auch für jeden andern einfachgefärbten Strahl, so wie, wenn statt der Luft eine andere Flüssigkeit, z. B. Wasser, zwischen die Gläser gebracht wurde, obschon der absolute Werth der Zahlen eines jeden Ringes für jede Farbe und für jede Flüssigkeit ein anderer ist. In derselben Flüssigkeit sind z. B. die Ringe der rothen Farbe gröſser, als die der violetten, und für dieselbe Farbe verhalten sich die Dicken der Luft- und Wasserschichten desselben (z. B. des dritten Rings) wie sich die Sinus des Einfalls- und des Refractionswinkels bei dem Uebergange des Lichts aus der Luft in das Wasser verhalten. Läſst man endlich, statt des bisher gebrauchten einfachen farbigen, das zusammengesetzte weiſse Sonnenlicht auf die Gläser fallen, so sieht man zwar noch jene Ringe, aber unter ihnen keine schwarzen mehr, sondern man erblickt nur die in allen Farben des Regenbogens schimmernden oder die irisirten Ringe, wie sie in der Reihe des prismatischen Spectrums auf einander folgen, was nach Newton bloſs der Superposition der verschiedenen Farben dieses Spectrums zuzuschreiben ist. Je näher übrigens das Sonnenlicht Sd senkrecht auf die Gläser fällt, desto kleiner, heller und schärfer begrenzt sind jene Ringe, da sie im Gegentheil für schief auffallende Strahlen gröſser und matter gefärbt erscheinen.

I. Aehnliche Erscheinungen findet man auch in den natürlichen Krystallen, wenn sie in ihrem Innern dünne, mit Luft oder andern Flüssigkeiten gefüllte Spalten haben, ferner in dünnen Schichten von Wasser, Weingeist, Oel u. dgl., womit man einen glatten, dunklen Körper überzieht, so wie an dünnen Fischschuppen, an den Wänden fein ausgeblasener Glaskugeln, und selbst an den dünnen Oxydschichten, die sich an polirtem Stahl oder Kupfer während einer starken Erhitzung bilden. Diese Farben erscheinen sowohl im durchgelassenen als auch im reflectirten Licht und sie ändern sich mit der Natur und Dicke der Plättchen und mit dem Einfallswinkel des Lichtes. Besonders lebhaft wird dieses Farbenspiel be-

merkt, wenn man auf die Oberfläche des Wassers einen kleinen Tropfen Terpentinöl herabfallen läfst und sich so stellt, dafs man den Himmel darin abgespiegelt sieht. Das Oel verbreitet sich schnell auf der Oberfläche des Wassers und bildet eine sehr dünne Schicht, die durch die schnelle Verdunstung immer dünner wird. Am deutlichsten endlich sieht man dieses Hervorgehn der Farben selbst aus farblosen Körpern und die Aenderungen dieser Farben mit der Dicke der Körper bei den gewöhnlichen *Seifenblasen*. Diese sehn anfangs ganz weifslich aus, nehmen aber bald, wie ihre Wände dünner werden, verschiedene lebhafte Farben an, die auch beständig wechseln, wenn durch die Vergröfserung der Blase die Dicke der Wand immer mehr abnimmt. Wenn sie dem Zerplatzen nahe ist, so erscheint in ihrem höchsten, dem Halme nächsten Theile (wenn der Blasende den Halm senkrecht von sich hält) ein schwarzer Punct, und um ihn reihen sich irisirende helle Kreise in symmetrischer Ordnung [1].

II. Man sieht ohne Erinnerung schon aus dem angeführten Beispiele, dafs es zur Erzeugung jenes Farbenspieles nicht nöthig ist, die Schicht irgend eines flüssigen Mittels zwischen zwei Glasplatten einzuschliefsen, da sich dieselben Farben auch und zwar noch lebhafter zeigen, so oft ein sehr dünnes Blättchen eines festen Körpers in der Luft (oder in irgend einer anderen Flüssigkeit) dem Lichte ausgesetzt wird. Erscheint ein solches Blättchen bei einer bestimmten Dicke x, zum Beispiel im rothen Lichte, so wird es bei der Dicke 3x, 5x, 7x . . durch Reflexion wieder roth, obschon immer schwächer erscheinen, je mehr diese Dicke zunimmt. Uebrigens ändert sich der Werth von x mit der Brechbarkeit (Far-

---

1 Neuerdings ist vorgeschlagen worden, in einer etwa 4 bis 6 Unzen Wasser haltenden Flasche von hellem Glase ein kleines Stückchen Seife in etwa 2 Unzen Wasser aufzulösen, die Luft aus dem Glase durch Sieden zu entfernen und die luftleere Flasche fest zu verkorken und zu verpichen. Wird die Auflösung erwärmt und geschüttelt, so bildet sich eine Blase die zuweilen während 12 und mehreren Stunden nicht platzt, und die Kreise vortrefflich zeigt. Taucht man die Oeffnung eines grofsen Weinglases oder kleinen Bierglases in Seifenwasser, so erhält man nach dem Herausziehn und Umkehren leicht eine Blase mit herrlichen Kreisen.

be) des Lichts und mit dem Brechungsverhältnifs des Blättchens in Beziehung auf das es umgebende Mittel.

III. Um die Dicke dieser Körper, bei welcher sie jene Lichterscheinungen erzeugen, näher kennen zu lernen, fand Newton mittelst seines oben erwähnten Apparats für das zwischen Orange und Gelb in die Mitte fallende Sonnenlicht die Dicke x der Luftschicht zwischen den beiden Gläsern an der Stelle des fünften schwarzen Rings, dessen Halbmesser $\frac{1}{10}$ engl. Zoll betrug,

$$x = \frac{1}{17800} = 0{,}0000562 \text{ Zoll}$$

oder $x = 0{,}001427$ Millimeter. Da aber die Dicke an der Stelle des fünften dunklen Rings, nach dem Vorhergehenden, gleich $10X$ ist, wo X die Dicke derselben Farbe für den ersten dieser Ringe bezeichnet, so ist die Dicke der Schicht an der Stelle des ersten gelborangefarbnen Lichts

$$X = 0{,}0001427 \text{ Millimeter.}$$

Für das äufserste Roth fand er ebenso $X = 0{,}000161$ und für das äufserste Violett $X = 0{,}000101$.

26) Erklärung dieser Erscheinung nach Newton.

Dieser grofse Physiker, der die von Huyghens, seinem Zeitgenossen, aufgestellte und vertheidigte Undulationstheorie des Lichtes durchaus nicht annehmen wollte, suchte jene Erscheinungen durch eine eigens von ihm zu diesem Zwecke ausgedachte Eigenschaft des Lichtes zu erklären. Nach ihm soll das Licht eine Disposition besitzen, vermöge deren es bald den anziehenden, bald wieder den abstofsenden Kräften der Körper, die es auf seinem Laufe trifft, leichter zu folgen geneigt ist. Er nannte dieses *Anwandelungen* (*accessus; fits; accès*) des Lichts zur Refraction und zur Reflexion. Die Anwandlung des Lichts zur Refraction (zum Durchgang durch andere Körper) soll ihr Maximum erreichen, wenn die Dicke des Körpers 0, 2x, 4x, 6x . . beträgt, und die Anwandlung zur Reflexion soll bei der Dicke x, 3x, 5x.. des Körpers am gröfsten seyn, so dafs also der Weg 2x die Periode angiebt, in welcher der Lichtstrahl alle Phasen seiner doppelten An-

wandlung zurücklegt, daher er auch die Gröfse $2x$ die Länge einer Anwandlung genannt hat. Fällt ein farbiger Lichtstrahl auf ein dünnes Blättchen, dessen Dicke $2x$, $4x$, $6x$.. ist, so gelangt er an die Hinterseite des Blatts genau in derselben Phase, mit welcher er an die Vorderseite kam; wenn er daher vorhin durchging, so wird er auch jetzt durchgehn, und das Blättchen wird daher im reflectirten Lichte *schwarz* erscheinen. Ist aber die Dicke des Blättchens x, $3x$, $5x$..., so befindet sich nach Newton jeder durch die Vorderseite gegangene Lichtstrahl bei seiner Ankunft an der Rückseite in einer der vorigen entgegengesetzten Phase der Anwandlung. War nun der Strahl bei seinem Eintritte in einer Anwandlung zum Durchgange, so wird er jetzt in einer Anwandlung zum Reflex seyn und daher an der Hinterseite, wie von einem Spiegel, zurückgeworfen werden. Dieser zurückgeworfene Strahl gelangt dann abermals an die Vorderseite des Blatts mit der Anwandlung zum Durchgange, da der ganze Weg, den er von der ersten bis zur zweiten und von da wieder bis zur ersten Seite zurückgelegt hat, gleich $2x + 6x + 10x + ..$, also ein gerades Vielfache von x ist. Vermöge dieser Zurückwerfung an der Hinterseite und dieser Refraction auf der Vorderseite wird daher der Strahl wieder in das Auge des Beobachters gelangen und das Blättchen wird ihm *gefärbt* erscheinen.

So sinnreich diese Erklärung auch erscheinen mag, so wird doch diese Anwandlung des Lichts durch keine andere Erscheinung bestätigt, sondern sie steht nur als eine isolirte Hypothese ohne weitere Verbindung mit der Natur da, um jene Phänomene der Farbenringe so gut, als es eben angeht, zu erläutern. Es erscheint sonderbar und gewagt, dem Lichte zwei entgegengesetzte Eigenschaften und überdiefs eine abwechselnde Neigung, bald dieser, bald jener Eigenschaft den Vorzug zu geben, anzudichten. Auch sieht man nicht, wie es kommt, dafs die Vorderseite des Mittels, die doch auch nach Newton immer einen Theil des auffallenden Lichtes zurückwirft, ganz ohne Einflufs auf diese Erscheinungen bleiben soll.

27) Erklärung dieser Erscheinungen nach der Undulationstheorie.

In der Undulationstheorie lassen sich jene Erscheinungen sehr leicht darstellen, ohne dafs es nöthig wäre, dem Lichte irgend eine neue Eigenschaft anzudichten. Diese Erklärung läfst sich auf die zwei folgenden Puncte zurückführen.

I. Die durch Reflexion gesehenen Farbenringe entstehn aus der *Interferenz* der auf der Vorder- und auf der Rückseite des Blättchens (oder der Luftschicht) reflectirten Strahlen, und II. die durch Refraction gesehenen Farbenringe entstehn aus der *Interferenz* der direct durch das Blättchen gebrochenen und der von den beiden Seiten desselben reflectirten und dann durch Brechung in das Auge des Beobachters gelangten Strahlen. Ehe wir dieses näher zeigen, wollen wir die Fortpflanzung der Wellen in flüssigen Mitteln im Allgemeinen betrachten. Wenn das elastische Mittel durchaus dieselbe Dichte hat, so wird jede augenblickliche Erschütterung, die ein Theilchen dieses Mediums erhält, sogleich dem nächstfolgenden Theilchen mitgetheilt werden, und dann wird das erste Theilchen in Ruhe bleiben, wenn es anders nicht durch weitere Einwirkung äufserer Kräfte in fortgesetzter Bewegung erhalten wird, ganz ebenso, wie dieses bei zwei elastischen Kugeln von gleicher Gröfse der Fall ist, wenn die eine derselben sich gegen die zweite ruhende bewegt. Nach dem Stofse wird die erste Kugel ruhn und die zweite wird sich mit der Geschwindigkeit der ersten und in derselben Richtung bewegen, in welcher sich zuvor die erste bewegte. Seyen A und A′ diese zwei vollkommen elastischen Kugeln, A die bewegte und A′ die ruhende. Seyen m und m′ die Massen dieser beiden Kugeln und v die Geschwindigkeit der ersten Kugel A. Ist $m = m'$, so wird, wie man aus den ersten Gründen der Mechanik weifs, nach dem Stofse die Kugel A ruhen und A′ wird sich mit der Geschwindigkeit v in der Richtung der ersten Kugel weiter bewegen. Dieses ist der vorige Fall, in welchem bei einem gleich dichten elastischen Medium alle Elemente desselben als gleichmäfsig zu betrachten sind. Ist aber für einen zweiten Fall m gröfser als m′, so wird A durch den Stofs nicht mehr, wie zuvor, seine ganze Geschwindigkeit verlieren, sondern beide Kugeln wer-

den sich in der *vorigen* Richtung gemeinschaftlich weiter bewegen. Ist endlich für einen dritten Fall m kleiner als m, so wird die erste Kugel A nicht nur ihre ganze Geschwindigkeit verlieren, sondern überdiefs noch eine andere in entgegengesetzter Richtung erhalten, so dafs sich jetzt beide Kugeln in verschiedenen Richtungen weiter bewegen werden.

Wenden wir dieses auf unsern Gegenstand an, so wird also bei einem gleichdichten elastischen Mittel die Vibration oder die Welle von einem Elemente des Mittels zu dem andern übergehn, und jedes dieser Elemente wird, sobald es seine Vibration an das nächstfolgende Element abgegeben hat, in Ruhe verbleiben, wenn es anders nicht durch neue, auf dasselbe einwirkende Kräfte gestört wird. Wenn aber die Welle aus einem Mittel in ein anderes von verschiedener Dichtigkeit übertritt, so wird sie an der Grenze beider Mittel eine Reflexion erleiden. Diese Reflexion aber kann doppelter Art seyn. Kommt, wie in unserm obigen zweiten Falle, die Welle aus dem dichtern Mittel in das dünnere (z. B. aus Glas in Luft), so behalten die Elemente des dichtern Mittels, die jetzt mit denen des dünneren zusammenstofsen, nach diesem Stofse noch einen Theil ihrer frühern Geschwindigkeit und gehn auch mit derselben in der früheren Richtung fort. Wenn aber, wie in unserm obigen dritten Falle, die Welle aus dem dünneren Mittel in das dichtere (aus Luft in Glas) übergeht, so verlieren die Elemente des dünnern Mittels durch den Zusammenstofs mit denen des dichtern nicht nur ihre frühere Geschwindigkeit gänzlich, sondern sie erhalten noch von den Elementen des dichtern Mittels eine Geschwindigkeit in einer der vorigen entgegengesetzten Richtung, so dafs sich jetzt die Elemente der beiden Medien in entgegengesetzten Richtungen bewegen oder dafs die Welle, die früher in dem dünnern Mittel vorwärts ging, jetzt in dem dichtern Mittel rückwärts geht oder reflectirt wird.

I. Gehn wir nun wieder zu dem vorhergehenden Apparate Newton's zurück und nehmen wir an, dafs z. B. das reine rothe Licht, dessen Wellenlänge λ seyn mag, nahe senkrecht auf die beiden Gläser falle, und dafs das Auge in O die Lichtstrahlen durch Reflexion erhalte. Ist wieder x die Dicke der Luftschicht in dem betrachteten Puncte, so wird das an der zweiten Seite der Schicht reflectirte Licht den Weg 2x

mehr zurückgelegt haben, als das von der ersten Seite; jenes wird also in seiner Welle um 2x hinter diesem zurückbleiben, und da es aus dem dünneren in das dichtere Mittel reflectirt wird, so ändert die Vibrationsgeschwindigkeit an der zweiten Seite der Schicht ihr Zeichen. Dieses ist aber ebenso viel, als ob diese Verzögerung 2x um eine halbe Welle oder um $\frac{1}{2}\lambda$ vermehrt worden wäre, so dafs also die zwei interferirenden Lichtströme gegen einander um die Gröfse $2x + \frac{1}{2}\lambda$ abstehn werden, und daraus folgt, dafs beide in vollständiger Uebereinstimmung seyn werden, so oft die Gröfse x eines von den Gliedern der Reihe

$$\tfrac{1}{4}\lambda,\ \tfrac{3}{4}\lambda,\ \tfrac{5}{4}\lambda\ \ldots$$

ist oder so oft die Dicken der Luftschichten, die der Mitte der farbigen Kreise entsprechen, sich wie die Zahlen 1, 3, 5, 7.. verhalten. Im Gegentheile werden diese Lichtwellen in vollständiger Discordanz seyn, wenn x eines der Glieder der Reihe

$$\tfrac{2}{4}\lambda,\ \tfrac{4}{4}\lambda,\ \tfrac{6}{4}\lambda\ ..$$

ist oder wenn die Dicken der Luftschichten sich wie die geraden Zahlen 0, 2, 4, 6 .. verhalten, wo dann die Ringe schwarz erscheinen müssen.

II. Wenn aber das Auge in O′ die Strahlen von dem Glase durch Refraction erhält, so wird das an den beiden inneren Wänden der Luftschicht zweimal zurückgeworfene Licht den Weg 2x mehr, als das durch das Glas rein gebrochene Licht zurücklegen; jene zwei Zurückwerfungen sind beide aus dem dünneren ins dichtere Mittel geschehn, daher sich auch die Zeichenänderungen der Vibrationsgeschwindigkeiten an den beiden Seiten der Luftschicht gegenseitig aufheben und der totale Rückstand der einen Welle über die andere gleich 2x ist. Es wird also wieder Uebereinstimmung der beiden Wellen bei ihrer Interferenz geben, so oft x eines der Glieder der Reihe

$$0,\ \tfrac{2}{4}\lambda,\ \tfrac{4}{4}\lambda,\ \tfrac{6}{4}\lambda\ ..$$

ist, und eine völlige Discordanz, so oft x eines der Glieder der Reihe

$$\tfrac{1}{4}\lambda,\ \tfrac{3}{4}\lambda,\ \tfrac{5}{4}\lambda\ ..$$

ist. Daraus folgt, dafs die Dicke der Luftschichten, die den Mitten der farbigen Ringe entsprechen, sich wie die geraden

Zahlen 0, 2, 4, 6 . . und die Dicken der schwarzen Ringe wie die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 . . verhalten müssen.

Diese einfache Erklärung stimmt vollkommen mit den beobachteten Erscheinungen überein, und aus ihr folgt noch unmittelbar, 1) dafs die kleinste Dicke einer Luftschicht oder irgend eines dünnen körperlichen Blättchens, für welches ein bestimmtes farbiges Licht die Anwandlung zur leichtesten Reflexion hat (um mit Newton's Ausdrücken zu reden), gleich $\frac{1}{4}\lambda$ ist, das heifst, gleich dem vierten Theile der Wellenlänge desselben gefärbten Lichts, das sich in der Substanz dieser Schicht oder dieses Blättchens bewegt; 2) dafs diese Dicke, für dieselbe Substanz, von einer Farbe zur andern sich wie der Werth von λ für diese Farben ändert, dafs also diese Dicke am gröfsten für die rothe und am kleinsten für die violette Farbe ist; 3) endlich dafs diese Dicke für dieselbe Farbe von einer Substanz zur andern in demselben Verhältnifs sich ändert, wie sich die Wellenlänge dieser Farben in den verschiedenen Substanzen ändert, d. h. also in dem Verhältnifs des Sinus des Einfallswinkels zu dem Sinus des Refractionswinkels, wenn das Licht aus der ersten dieser Substanzen in die zweite übergeht.

Nachdem wir nun in §. 25. die Erscheinungen der farbigen Dinge und in §. 27. die allgemeine Erklärung derselben vorgetragen haben, wollen wir, wie dieses ebenfalls oben bei den allgemeinen Phänomenen der Interferenz geschehn ist, die mathematische Analyse auf diesen Gegenstand anwenden, um ihn dadurch erst in sein volles Licht zu setzen.

28) Interferenz des mehrmals reflectirten Lichts.

Seyen BK und HM zwei parallele Glasplatten, die an ihren inneren Seiten CK und EH nur sehr wenig von einander entfernt sind. Von dem auf diese Platten fallenden Lichtstrome AB wird ein Theil an der untern Seite CK der obern Platte und ein Theil an der obern Seite EH der untern Platte reflectirt. Wenn nun diese verschiedenen Theile, nachdem sie die Platte verlassen haben, interferiren, welches wird das Resultat dieser Interferenz seyn? Fig. 195.

Es werde der Strahl oder der Lichtstrom AB in der er-

sten Platte nach BC gebrochen. Von diesem in C ankommenden Lichte werde ein Theil nach CD reflectirt, während der andere Theil nach CE auf die zweite Platte gebrochen wird. Dieser letzte in E ankommende Theil werde von der zweiten Platte wieder theilweise nach EF reflectirt und von da theilweise nach FG in der ersten Platte gebrochen, wo FG parallel mit CD ist. Es habe nun μ wieder dieselbe Bedeutung, wie in §. 23., oder es sey

$$\mu = \frac{\text{Sinus des Einfallswinkels}}{\text{Sinus des Refractionswinkels}}$$

oder auch (nach §. 12. VIII.)

$$\mu = \frac{\text{Geschwindigkeit des Lichts in der Luft}}{\text{Geschwindigkeit des Lichts im Glase}}.$$

Zieht man FD senkrecht auf CD, so ist der Weg, welchen die eine Welle von C durch E nach F in der Luft beschrieben hat, gleich CE + EF, während der Weg, den die andere Welle in der ersten Glasplatte von C bis D beschrieben hat, nach §. 12. X. durch μ.CD ausgedrückt wird. Der Unterschied dieser beiden Wege ist also

$$CE + EF - \mu . CD.$$

Sey Δ die Distanz der innern Seiten der beiden Platten und β der Einfallswinkel des Lichts in B, so wie γ der Refractionswinkel in F. Zieht man En senkrecht auf CK, so ist $En = \Delta$ und der Einfallswinkel $CEn = nEF = \beta$, so wie $CFD = \gamma$ der Refractionswinkel, also hat man auch

$$CE = EF = \frac{\Delta}{\text{Cos. } \beta} \text{ und } CE + EF = \frac{2\Delta}{\text{Cos. } \beta}.$$

Weiter ist

$$Cn = Fn = \Delta \, \text{Tang.} \beta \text{ und } FC = 2\Delta \, \text{Tang.} \beta,$$

so wie

$$CD = FC \, \text{Sin.} \gamma = 2\Delta \, \text{Tang.} \beta \, \text{Sin.} \gamma.$$

Jener Unterschied der Wege ist also

$$CE + EF - \mu . CD = \frac{2\Delta}{\text{Cos. } \beta} - 2\Delta \mu \, \text{Tang.} \beta \, \text{Sin.} \gamma$$

oder, da $\mu = \frac{\text{Sin.} \beta}{\text{Sin.} \gamma}$ ist,

$$CE + EF - \mu . CD = 2\Delta \, \text{Cos.} \beta.$$

Wird demnach die Vibrationsgeschwindigkeit oder auch die Amplitüde der Welle des in dem Glase von C nach D reflectirten Lichtes nach der Gleichung (D) des §. 18. durch

$$a \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha t - x)$$

ausgedrückt, wo die Distanz x durch den entsprechenden Weg des Lichts in der Luft gemessen wird, so wird die Vibrationsgeschwindigkeit des von E nach F in der Luft reflectirten Lichts durch

$$a' \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha t - x - 2\Delta \text{ Cos. } \beta)$$

ausgedrückt, und die Intensität dieser beiden Wellen, wenn sie interferiren, wird durch die Intensität derjenigen Welle dargestellt werden, die durch die Summe der beiden letzten Ausdrücke bezeichnet ist.

I. Allein wir haben bisher noch nicht dasjenige Licht betrachtet, das von F nach H reflectirt und dann in H wieder zum Theil nach K reflectirt und in K wieder nach KL gebrochen wird u. s. w. Es ist aber klar, daſs, wenn man der Kürze wegen $A = 2\Delta \text{ Cos. } \beta$ setzt, das in K reflectirte Licht um die Gröſse 2A verspätet seyn wird und ebenso das ihm nächstfolgende um die Gröſse 3A u. s. w. Setzt man für das von Glas in Luft gehende Licht die Vibration gleich

$$a \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha t - x),$$

so wird die ihr entsprechende reflectirte Vibration gleich

$$b . a \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha t - x),$$

so wie die entsprechende refractirte Vibration gleich

$$c . a \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha t - x)$$

seyn, wo b und c constante Gröſsen bezeichnen. Nehmen wir nun an, daſs bei dem Uebergange des Lichts aus Luft in Glas der Factor dieser Sinus multiplicirt werden soll durch e für die reflectirte und durch f für die refractirte Vibration, so hat man, wenn dieser Factor für das durch BC gehende Licht, wie oben, a heiſst, für den Factor des in C reflectirten Lichts ab, für den Factor des in

F gebrochenen Lichts $acef$, für den Factor des in K gebrochenen Lichts ace^3f u. s. w. Setzt man also der Kürze wegen

$$\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x) = \varphi \text{ und } \frac{2\pi}{\lambda}.A = \frac{2\pi}{\lambda}.2\Delta \text{Cos.}\beta = B,$$

so erhält man für die Summe aller dieser Vibrationen den Ausdruck

$$ab \text{Sin.}\varphi + acef[\text{Sin.}(\varphi - B) + e^2 \text{Sin.}(\varphi - 2B) + e^4 \text{Sin.}(\varphi - 3B) + e^6 \text{Sin.}(\varphi - 4B) + ..]$$

oder auch nach einer bekannten Summation der letzten Reihe (§. 43. im Anf.)

$$ab \text{Sin.}\varphi + acef.\frac{\text{Sin.}(\varphi - B) - e^2 \text{Sin.}\varphi}{1 - 2e^2 \text{Cos.}B + e^4}.$$

II. Diese Summe aller bisher betrachteten einzelnen Vibrationen kann man aber ganz analog mit dem im §. 20. Gesagten wieder als eine einzige Vibration betrachten, welche die Form hat

$$F.\text{Sin.}\varphi + G.\text{Cos.}\varphi,$$

wo dann wieder die Gröſse $F^2 + G^2$ die *Intensität* des Lichtes in dem Puncte ausdrückt, wo alle jene einzelnen Wellen sich in der Interferenz begegnen. Nimmt man zwischen den Gröſsen e und f die Bedingungsgleichungen

$$b = -e \text{ und } cf = 1 - e^2,$$

wodurch die Bestimmung der Gröſsen F und G einfacher wird, so hat man, wenn man in dem vorhergehenden Ausdrucke

$$ab\text{Sin.}\varphi + acef.\frac{\text{Sin.}(\varphi - B) - e^2 \text{Sin.}\varphi}{1 - 2e^2 \text{Cos.}B + e^4}$$

den Factor von Sin. φ gleich F und den von Cos. φ gleich G setzt, nach einer einfachen Entwickelung für diese Intensität $I = F^2 + G^2$ wie in §. 22. den Ausdruck

$$I = \frac{4a^2e^2 \text{Sin.}^2 \frac{B}{2}}{(1 - e^2)^4 + 4e^2 \text{Sin.}^2 \frac{B}{2}},$$

oder, da man hat

$$B = \frac{2\pi}{\lambda}A = \frac{4\pi\Delta}{\lambda} \text{Cos.}\beta,$$

$$I = \frac{4a^2 e^2 \,\mathrm{Sin.}^2 \frac{2\pi\Delta}{\lambda} \,\mathrm{Cos.}\,\beta}{(1-e^2)^4 + 4e^2 \,\mathrm{Sin.}^2 \frac{2\pi\Delta}{\lambda} \mathrm{Cos.}\,\beta}.$$

III. Dieses ist also der gesuchte Ausdruck für die Intensität des durch eine dünne Luftschicht gegangenen Lichts, wenn man bloſs das von den beiden Glasplatten *reflectirte* Licht betrachtet. Wir wollen in dem folgenden §. 29. auch das durch die zweite Glasplatte *gebrochene* Licht auf gleiche Weise betrachten. Es ist aber für sich klar, daſs statt dieser dünnen Luftschicht zwischen zwei parallelen Glasplatten auch ein dünnes Glasblättchen oder überhaupt jeder andere sehr dünne Körper, z. B. der äuſserste Rand einer Seifenblase zwischen zwei Luftschichten gesetzt werden kann, ohne daſs dadurch der Ausdruck von I geändert wird.

IV. Ist nun der Abstand $En = \Delta$ der beiden Glasplatten oder die Dicke Δ des von einem festen Körper genommenen Blättchens gleich Null, so ist auch die Intensität I gleich Null, welches auch der Werth von λ seyn mag, d. h. mit welchen Farben man auch den Versuch anstellt. Auch ist es den Beobachtungen gemäſs, daſs, wenn zwei Glasplatten u. dgl. sich in allen Puncten genau berühren, keine Reflexion statt hat, und ebenso haben wir bereits oben gesehn, daſs eine Seifenblase an ihrem höchsten oder dünnsten Theile, kurz vor dem Zerplatzen, vollkommen schwarz wird.

V. Aber die Intensität I verschwindet auch noch in allen den Fällen, wo

$$\Delta\,\mathrm{Cos.}\beta = \frac{\lambda}{2} \text{ oder } \lambda \text{ oder } \frac{3\lambda}{2} \text{ oder } \frac{5\lambda}{2} \text{ u. s. w.}$$

ist; für jede bestimmte Farbe wird man aber der Gröſse Δ oder auch dem Winkel β immer die zu diesen Gleichungen erforderliche Gröſse geben können. Nicht so für das zusammengesetzte oder weiſse Licht. Für das letzte wird man die Gröſse Δ Cos. β nie so bestimmen können, daſs sie für alle einzelnen Farben gleich $\frac{1}{2}\lambda$ oder $\frac{2}{2}\lambda$ oder $\frac{3}{2}\lambda$.. wird, oder hier wird man nur die irisirten Farbenringe, aber keine ganz dunklen Stellen sehn.

VI. Nimmt man $\Delta\,\mathrm{Cos.}\beta = \frac{\lambda}{4}$, so erhält man

$$I = \frac{4a^2e^2}{(1+e^2)^2}.$$

Nimmt man also z. B. den Werth von λ, der für die mittleren Strahlen des Spectrums (für die grüngelben) gehört, so wird die Intensität des Lichts in den verschiedenen Farbenringen nahe dieselbe, wie bei dem einfallenden Lichte, das heifst, das durch die Glasplatten reflectirte Licht wird nahe weifs seyn. Für gröfsere Werthe von Δ aber wird dieser Fall nicht mehr statt haben, d. h. das reflectirte Licht wird dann noch immer farbig erscheinen, bis endlich Δ so grofs wird, dafs für eine gröfsere Anzahl von verschiedenen Farben (die nämlich ebenfalls nur wenig verschiedenen Werthen von λ entsprechen) der Werth von $\frac{4\Delta \text{Cos.}\beta}{\lambda}$ gleich den ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 .. wird, in welchem Falle

$$\frac{4\Delta \text{Cos.}\beta}{\lambda} = 1;\ 3;\ 5;\ 7\ ..,$$

also auch

$$\frac{2\pi}{\lambda}\Delta \text{Cos.}\beta = \frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2};\ \frac{7\pi}{2}\ ..\ \text{wird},$$

welche Winkel wieder nahe den gröfsten Werth von I geben.

29) Interferenz des mehrmals gebrochenen Lichts.

Wenn aber der auf die erste Platte auffallende Lichtstrom AB durch die zweite Platte gebrochen wird, so wird nach dem Vorhergehenden der Factor des Sinus für das in E gebrochene Licht gleich $a.cf$ und für das in H gebrochene Licht gleich $a.ce^2f$ seyn u. s. w. Demnach ist die in dem Puncte H in die zweite Glasplatte eintretende Welle hinter der in E eingetretenen wieder um dieselbe Gröfse $A = 2\Delta \text{Cos.}\beta$ zurück, wie in §. 28., so dafs man also wieder, wie dort, für die Summe aller Vibrationen erhalten wird

$$a.cf[\text{Sin.}\varphi + e^2\,\text{Sin.}(\varphi - B) + e^4\,\text{Sin.}(\varphi - 2B) + ..],$$

wo wieder

$$B = \frac{2\pi}{\lambda}A = \frac{4\pi}{\lambda}\Delta \text{Cos.}\beta \text{ und } \varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x) \text{ ist.}$$

Summirt man diese Reihe, wie oben, so erhält man

$$a . cf. \frac{\text{Sin.}\varphi - e^2 \text{Sin.}(\varphi + B)}{1 - 2 e^2 \text{Cos.} B + e^4},$$

so dafs man also für die Interferenz des gebrochenen Lichts die Intensität I', wie zuvor, gleich

$$I' = \frac{a^2 (1 - e^2)^2}{(1 - e^2)^2 + 4 e^2 \text{Sin.}^2 \frac{B}{2}}$$

oder

$$I' = \frac{a^2 (1 - e^2)^2}{(1 - e^2)^2 + 4 e^2 \text{Sin.}^2 \frac{2\pi}{\lambda} \Delta \text{Cos.} \beta}$$

erhält.

I. Die verhältnifsmäfsigen Aenderungen der Intensität I' des gebrochenen Lichts sind also, wie die letzte Formel zeigt, viel geringer, als die der Intensität I des reflectirten Lichts in §. 28. Der gröfste Werth von I' ist a^2 und der kleinste ist

$$\frac{a^2 (1 - e^2)^2}{(1 + e^2)^2}.$$

Aber die absoluten Aenderungen von I' sind doch ganz dieselben, wie die von I, wie denn auch in der That die Summe der beiden Ausdrücke von I und I' immer gleich a^2 ist. Da man sonach die Gleichung

$$I + I' = a^2 \text{ oder } \frac{I}{a^2} = 1 - \frac{I'}{a^2}$$

hat, so sagt man, dafs die eine dieser beiden Intensitäten das *Complement* der andern ist.

II. Das in I. erwähnte Verhältnifs der beiden Intensitäten überhebt uns der Aufzählung der einzelnen Fälle für I', wie wir dieses oben in §. 28. für I gethan haben. Wenn nämlich für irgend einen besondern Werth von Δ die Gröfse I ein Maximum bei einer bestimmten Farbe giebt, so giebt I' für dieselbe Farbe und denselben Werth von Δ ein Minimum u. s. w. Giebt ein Werth von Δ ein Maximum von I für die rothe, einen mittlern Werth von I für die grüne und endlich $I = 0$ oder die schwarze statt der violetten Farbe, so wird zu gleicher Zeit die Gröfse I' ein Minimum für das

rothe, einen Mittelwerth für das grüne und ein Maximum für das violette Licht geben.

III. Bemerken wir noch, dafs bei dem gebrochenen Lichte die Farben nie so lebhaft sind, als sie unter gleichen Verhältnissen bei dem reflectirten Lichte erscheinen, weil bei dem gebrochenen Lichte, wie der vorhergehende Ausdruck von I′ zeigt, keine der Farben *gänzlich* verschwindet, d. h. weil kein Werth von Δ oder von λ die Gröfse I′ gleich Null machen kann, wie dieses auch der Erfahrung vollkommen gemäfs ist.

30) Interferenz des durch zwei Prismen gehenden Lichts.

Wenn zwei nahe rechtwinklige Prismen mit ihren Hypotenusen CK und EH sich sehr nahe berühren, und wenn von dem einfallenden Lichte der innere Einfallswinkel an der Seite der Hypotenuse nahe gleich ist dem ganzen Reflexionswinkel, so dafs ein Theil des Lichtes durch das erste Prisma reflectirt und ein Theil durch das zweite Prisma gebrochen wird, so wird man für die Intensität der Interferenz beider Theile ganz dieselben Ausdrücke, wie in §. 28. und 29. finden. Indefs verdient dieser besondere Fall doch eine eigene Betrachtung, weil es hier ganz in unserer Macht steht, den Einfallswinkel dem totalen Reflexionswinkel so nahe, als wir nur eben wollen, gleich zu nehmen (was in §. 28. und 29. nicht der Fall ist), weil wir also auch den Winkel β (d. h. den Refractionswinkel des ersten Prisma's in die Luft) so nahe, als wir wollen, an 90 Graden annehmen können, so dafs also der Werth von Δ Cos. β ungemein klein werden kann, ohne eben auch die Entfernung Δ der beiden Prismen sehr klein zu nehmen. Wenn nun in den Ausdrükken für die Intensität I und I′ der Werth von Δ Cos. β nur mäfsig klein (z. B. gleich dem tausendsten Theil eines Zolls) genommen wird, so wird man zwischen den beiden äufsersten (rothen und violetten) Farben des Spectrums wohl zwanzig und mehr deutlich verschiedene Farben erhalten, die alle durch dunkle Schattenstreifen getrennt sind, da jede von ihnen, in Folge ihres verschiedenen Werthes von λ, den Werth von

Fig. 196.

$$\text{Sin.}^2 \frac{2\pi}{\lambda} \Delta \text{Cos.}\beta = 1$$

machen wird. Die ganze auf diese Weise entstehende Mischung des Lichts wird demnach im Allgemeinen wieder weiſs, wie bei dem gewöhnlichen Sonnenlichte, erscheinen. Wenn aber der Werth von Δ Cos. β ungemein klein, beinahe unendlich klein genommen wird (so daſs z. B. Δ Cos. β noch kleiner als λ ist), so wird man kaum eine oder höchstens zwei Farben finden, für welche der Ausdruck

$$\text{Sin.}^2 \frac{2\pi}{\lambda} \Delta \text{Cos.}\beta = 1$$

wird, so daſs also dann in dem so entstehenden Lichtbilde eine oder zwei Farben vorherrschen und sehr hell erscheinen.

I. Auch muſs bemerkt werden, daſs für unsern Fall, wo β nahe gleich 90° ist, schon eine sehr geringe Aenderung des Refractionswinkels γ den Einfallswinkel β sehr stark ändern kann. Es war nämlich (§. 28.)

$$\mu = \frac{\text{Sin.}\beta}{\text{Sin.}\gamma}.$$

Differentiirt man diese Gleichung, indem man μ als constant voraussetzt, so erhält man

$$\partial\beta\,\text{Cos.}\beta\,\text{Sin.}\gamma - \partial\gamma\,\text{Cos.}\gamma\,\text{Sin.}\beta = 0$$

oder

$$\frac{\partial\beta}{\partial\gamma} = \frac{\text{Tang.}\beta}{\text{Tang.}\gamma},$$

so daſs also, da β nahe an 90° oder Tang. β sehr groſs ist, ein kleiner Werth von $\partial\gamma$ die Gröſse $\partial\beta$ schon sehr groſs machen kann. Also wird auch eine kleine Veränderung des Refractionswinkels γ den Werth von Δ Cos. β schon bedeutend ändern können, wodurch denn auch der Ausdruck für die Intensität I oder I′ sehr geändert wird. Fällt daher auf diese beiden Prismen z. B. Wolkenlicht in verschiedenen Richtungen ein, oder wird das Sonnenlicht (durch eine Glaslinse) in verschiedenen Richtungen auf jene Prismen geleitet, so wird das reflectirte Licht sowohl als auch das durch diese Prismen gebrochene Licht, wenn es von einem Schirm aufgefangen wird, sehr helle Streifen oder Fransen zeigen. Da die Lage und die Breite dieser Streifen für jede Farbe eine andere ist,

so wird das Ganze derselben eine Reihe von sehr lebhaften Farbenbildern geben. Dasselbe erhält man auch, wenn man ein solches Doppelprisma so vor das Auge hält, dafs das Licht durch dasselbe in verschiedenen Richtungen zu dem Auge gelangt.

31) Farbenringe zwischen zwei Glaslinsen.

Wenn zwei convexe Linsen oder wenn eine solche Linse und ein Planglas sich in dem Puncte O berühren, so wird man die Intensität des interferirten Lichts für jeden dem O nahen Punct M der Linse auf folgende Weise durch die Analyse bestimmen. Wenn die Linse, wie wir hier voraussetzen, einen sehr grofsen Krümmungshalbmesser hat, so wird man für jeden dem Berührungsorte O sehr nahen Punct M die beiden Flächen sehr nahe als parallel ansehn können, so dafs also auch das in §. 28. und 29. Gesagte hier wieder seine Anwendung findet. Um aber den unserem gegenwärtigen Falle angemessenen Ausdruck für $\Delta = MM'$ zu finden, so sey, für zwei Convexlinsen, r der Krümmungshalbmesser der unteren Seite der oberen und r′ der der oberen Seite der unteren Linse. Dann ist aber Δ oder die Distanz MM′ gleich der Summe der zwei Sinusversus eines Bogens, dessen Halbmesser r und r′ ist. Allein Sin. vers. $\Theta = 1 - \text{Cos.}\,\Theta$, $\text{Cos.}\,\Theta = 1 - \frac{\Theta^2}{1.2} + \frac{\Theta^4}{1.2.3.4} - \ldots$ oder, wenn Θ klein ist, $\text{Cos.}\,\Theta = 1 - \frac{\Theta^2}{1.2}$, also auch Sin. vers. $\Theta = \frac{\Theta^2}{2}$ für einen Bogen Θ, dessen Halbmesser die Einheit ist, und daher auch

Fig. 197.

$$\text{Sin. vers.}\,\Theta = \frac{\Theta^2}{2r}$$

für einen Bogen, dessen Halbmesser gleich r ist. Dieser Bogen Θ ist aber hier OM, also ist auch

$$\Delta = \frac{\Theta}{2r} + \frac{\Theta.}{2r} = \tfrac{1}{2}\,\Theta.\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right).$$

Substituiren wir diesen Werth von Δ in den Ausdrücken, die wir oben (§. 28. und 29.) für die Intensitäten I und I′ erhalten haben, so hat man für die Intensität I des reflectirten Lichts

$$I = \frac{4a^2 e^2 \text{Sin.}^2 \psi}{(1-e^2)^2 + 4e^2 \text{Sin.}^2 \psi}$$

und für die Intensität des gebrochenen Lichts

$$I' = \frac{a^2(1-e^2)^2}{(1-e^2)^2 + 4e^2 \text{Sin.}^2 \psi},$$

wo der Kürze wegen der Winkel

$$\psi = \frac{\pi}{\lambda} \Theta^2. \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \text{Cos.}\,\beta$$

gesetzt worden ist. Dieses vorausgesetzt wollen wir nun die beiden Werthe von I und I′ besonders betrachten.

I. Intensität I des reflectirten Lichts.

1) Diese Intensität verschwindet in allen den Fällen, wo $\psi = 0$ ist, d. h. wo man hat

$$\Theta^2 = 0 \text{ oder} = \frac{\lambda \text{Sec.}\beta}{\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}} \text{ oder} = \frac{2\lambda \text{Sec.}\beta}{\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}} \text{ oder} = \frac{3\lambda \text{Sec.}\beta}{\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}} \cdots$$

Man hat folglich für jede einzelne Farbe einen schwarzen Punct an der Berührungsstelle O der beiden Linsen und überdiefs noch eine Reihe von schwarzen kreisförmigen Ringen, deren gemeinschaftlicher Mittelpunct O ist, und von diesen schwarzen Ringen verhalten sich die Quadrate ihrer Halbmesser wie die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4 . . .

2) Die hellsten oder lebhaftesten farbigen Ringe aber erhält man, wenn man $\psi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \,..$ setzt, das heifst für

$$\Theta^2 = \frac{\lambda \text{Sec.}\beta}{2\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)} \text{ oder} = \frac{3\lambda \text{Sec.}\beta}{2\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)} \text{ oder} = \frac{5\lambda \text{Sec.}\beta}{2\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)} \cdots$$

Also liegen zwischen jenen schwarzen Ringen mehrere farbige Ringe und von diesen haben die lebhaftesten zu den Quadraten ihrer Halbmesser die Zahlen

$$\tfrac{1}{2},\ \tfrac{3}{2},\ \tfrac{5}{2},\ \tfrac{7}{2} \ldots$$

3) Da sich die Halbmesser der hellsten farbigen Ringe (in 2) für jede bestimmte Farbe wie die Gröfsen $\sqrt{\text{Sec.}\beta}$

verhalten, so folgt, dafs diese Halbmesser gröfser werden wenn man den einfallenden Lichtstrahl gegen die Oberflächen der Linsen in O mehr neigt oder, was dasselbe ist, wenn man das Auge des Beobachters von der auf diese Oberfläche senkrechten Linie OS mehr und mehr rechts oder links bewegt.

4) Für dieselbe Neigung β, aber für verschiedene Farben, verhalten sich die Halbmesser jener farbigen Ringe (in 2) wie die Gröfse $\sqrt{\lambda}$. Die verschiedenen gefärbten Strahlen, die in dem weifsen Sonnenlichte enthalten sind, bringen daher eine Reihe von Ringen hervor, deren Halbmesser verschieden sind und die durch ihre Superposition eine Reihe von Farben erzeugen, die mit den in §. 22. VIII. angeführten analog ist. Für die gröfseren Halbmesser oder für die von O weiter entfernten Ringe mischen sich endlich diese Farben so stark unter einander, dafs keine weitere Spur von Ringen, sondern nur vermischtes weifses Licht bemerkbar bleibt.

5) Für dieselbe Neigung β und dieselbe Farbe λ endlich ändern sich die Halbmesser dieser farbigen Ringe, wie die Gröfse

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)}}.$$

Um also sehr breite Ringe zu erhalten, mufs man die Gröfse

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=\frac{r+r'}{rr'}$$

sehr klein, also r und r', jedes für sich, sehr grofs annehmen oder die Krümmungshalbmesser der beiden Linsen müssen sehr grofs seyn.

6) Ist endlich die untere Linse vollkommen eben oder ein *Planglas*, so wird man r' unendlich grofs oder $\frac{1}{r'}=0$ setzen, und dann verhalten sich in (5) die Halbmesser der farbigen Ringe wie die Gröfse $\sqrt{r}$.

II. Intensität I' des gebrochenen Lichts.

Die schwarzen und ebenso die farbigen Ringe, welche die beiden Linsen durch Brechung erzeugen, sind, wie oben

in §. 29. I., die Complemente von den durch Reflexion erzeugten. Der Mittelpunct aller dieser Ringe ist daher für zusammengesetztes Licht lebhaft weiſs und von einem schwarzen Kreise umgeben, den wieder ein weiſser umgiebt, worauf ein schwarzer folgt u. s. w., bis endlich, in gröſsern Entfernungen von O, diese weiſsen Kreise in die irisirenden farbigen übergehn und zuletzt sich so unter einander mischen, daſs sie nicht mehr getrennt werden können und daher unsichtbar werden. Der Halbmesser eines jeden dieser Ringe ist genau derselbe, wie jener von entgegengesetztem Charakter bei dem reflectirten Lichte, daher es überflüssig ist, sie hier wieder einzeln durchzugehn.

Daſs aber alle diese Erscheinungen mit den Beobachtungen auf das vollkommenste übereinstimmen, ist aus dem klar, was oben (§. 25.) gesagt worden ist.

E. Diffraction oder Beugung des Lichts.

32) Erklärung der Phänomene der Diffraction.

Wenn das Licht nahe an den Grenzen undurchsichtiger Körper vorbeigeht, so erleidet es eigene Modificationen, die man die *Diffraction* oder auch die *Beugung*, *Inflexion*, des Lichts zu nennen pflegt. Die hierher gehörenden Erscheinungen lassen sich in zwei verschiedene Classen ordnen.

I. Wenn man das Sonnenlicht durch eine Sammellinse von kurzer Brennweite gehn läſst, die man in der Oeffnung des Ladens eines verfinsterten Zimmers angebracht hat, und einen Theil des aus dem Brennpuncte F divergirend ausströmenden Lichtkegels mit einem undurchsichtigen Schirme CE auffängt, so wird man auf einer hinter diesen Schirm gestellten Tafel BAD (z. B. von gespanntem weiſsem Papier) nicht, wie man erwarten sollte, den Theil AD dieser Tafel im vollen Schatten und die Seite AB derselben im gleichförmigen Lichte erblicken, sondern man wird in der Schattenseite AD noch einen nicht wenig lebhaften Lichtschimmer bemerken, dessen Intensität mit der Entfernung von der eigentlichen Schattengrenze A abnimmt, während sich auf der Lichtseite AB der Tafel hellere Streifen zeigen, die in den Farben des

Fig. 198.

Regenbogens glänzen und deren Intensität ebenfalls mit der Entfernung von A abnimmt. Stellt man zwischen den Brennpunct F der Linse und den Schirm CE ein gefärbtes Planglas, das nur die Strahlen seiner Farbe durchläſst, so sieht man auf der Tafel BD statt jener irisirenden Farben bloſs helle Streifen von der Farbe des Glases, welche durch andere dunkle oder schwach erleuchtete Streifen von einander getrennt sind. Nimmt man die Intensität dieser hellen Streifen für die Ordinate einer Curve an, deren Abscisse die Entfernung von dem Puncte A in der Linie AB ist, so hat diese Curve die Gestalt einer Schlangenlinie, bei welcher aber die Differenz zwischen je zwei nächsten gröſsten und kleinsten Ordinaten für die wachsenden Abscissen schnell abnimmt und schon in einer geringen Entfernung von A ganz unmerklich wird. Diese Erscheinungen hat bereits Grimaldi im 17ten Jahrhundert bemerkt, aber ohne sie erklären zu können. Er bemerkte nämlich, daſs der Schatten eines Drahts, den er in den Lichtkegel des verfinsterten Zimmers stellte, auf einem gegenüberstehenden Schirme viel breiter sey, als er nach der Entfernung des Drahts von dem Schirme bei der geradlinigen Fortpflanzung des Lichts hätte seyn sollen. Auch sah er diesen Schatten auf beiden Seiten von farbigen Säumen umgeben.

II. Wenn man demselben aus dem Brennpuncte F der Linse ausströmenden Lichtkegel einen opaken Schirm CEC' entgegenstellt, in welchem man eine oder mehrere sehr kleine Oeffnungen angebracht hat, so sieht man auf der Tafel BD nicht die erleuchteten Projectionen dieser Oeffnungen, wie man erwarten sollte, sondern vielmehr (an der Stelle dieser Projectionen sowohl als auch zwischen denselben) mehrere gefärbte Bilder von verschiedenen Gestalten, die alle in regelmäſsigen Gruppen geordnet erscheinen, wenn auch jene Oeffnungen eine regelmäſsige Lage gegen einander haben. Auch hier kann man wieder durch die Zwischenstellung eines gefärbten Glases die Bilder alle gleichfarbig und mit ganz dunklen Stellen abwechselnd machen, und sie werden in beiden Fällen desto reiner und heller erscheinen, je kleiner der Brennpunct der Linse F ist. Wir werden von diesen Erscheinungen bald eine vollkommen genügende Rechenschaft durch Analyse geben.

33) Darstellung dieser Phänomene durch Beobachtung.

Bei den Beobachtungen der Diffraction des Lichtes kann man statt der erwähnten Tafel, auf welcher sich das Licht ausbreitet, vortheilhafter noch den Schirm, durch dessen Oeffnung der leuchtende Punct sein Licht sendet, unmittelbar vor das Auge halten oder am vortheilhaftesten endlich diese Oeffnung selbst durch ein darauf gerichtetes Fernrohr betrachten. Durch das Fernrohr sieht man endlich jene Lichtstreifen zugleich gröſser und deutlicher, und wenn man das Fernrohr mit einem eingetheilten Kreise (wie bei dem Theodoliten) verbindet, so werden dadurch die Dimensionen jener Lichtbilder auſserdem genau meſsbar. Auch kann man, wenn Fernröhre zu diesem Zwecke angewendet werden, jene Oeffnungen beträchtlich gröſser machen, als dieses für das unbewaffnete Auge angeht, wodurch die Erscheinungen offenbar lichtvoller werden. Man hat diese Beobachtungen, wie gesagt, anfangs nur in verfinsterten Zimmern und mit Beihülfe eines Heliostaten angestellt, um dadurch das Licht der Sonne immer auf demselben Puncte zu erhalten. Allein Schwerd (in seinem oben angeführten Werke) hat gezeigt, daſs das verfinsterte Zimmer und der Heliostat auch wohl entbehrt werden können. Er bediente sich gewöhnlich eines Taschenuhrglases, welches er auf der inneren Seite mit einer dicken Auflösung von Asphalt oder mit einer aus Lampenruſs und Bernsteinfirniſs gemachten Farbe bestrich und mit seiner obern Seite der Sonne zuwendete. Das auf dieser Seite des Uhrglases und selbst das auf der Oberfläche eines gewöhnlichen gut polirten metallenen Knopfes entstehende Sonnenbildchen hatte, wenn er es durch jene Oeffnungen mittelst eines Fernröhrchens von 8 Zoll Focallänge betrachtete, selbst im unverfinsterten Zimmer eine für die meisten Beobachtungen hinlängliche Stärke und Klarheit. Dabei wird das kleine Fernrohr in eine Distanz von 10 bis 20 Schritten von dem Uhrglase gestellt[1] und auch der Schirm,

1 Die richtige Entfernung für jedes gegebene Fernrohr findet man leicht, wenn man die Ocularröhre desselben so weit herauszieht, bis das Uhrglas oder besser der Apparat, durch welchen der feine

in welchem die Oeffnungen angebracht sind, wird am bequemsten unmittelbar vor dem Objective des Fernrohrs an demselben (mittelst einer einfachen Vorrichtung, die sich jeder leicht ausdenken kann) befestigt. Ohne daher weiter bei dem im Allgemeinen sehr einfachen Verhalten, welches man bei diesen Experimenten für die Diffraction des Lichtes zu beobachten hat, zu verweilen, wollen wir sofort zu der analytischen Darstellung derjenigen Erscheinungen übergehn, welche diese Experimente gewähren. Bemerken wir nur noch, dafs sich aus dieser Diffraction des Lichtes eine grofse Anzahl der gewöhnlichsten Erscheinungen erklären läfst. Hierher gehören z. B. die Farbenspiele, die man bemerkt, wenn man durch den dünnen Theil des Bartes einer Vogelfeder, durch enggewebte Zeuge, durch die feinen Haare der Hüte sieht, wenn man durch diese Körper nach der Sonne blickt; ferner die dunklen Streifen zwischen den enggeschlossenen, ausgestreckten Fingern der Hand, die Farbenringe um den dunklen Mond bei totalen Mondfinsternissen, und selbst die bekannten Farbenspiele der Flügeldecken mehrerer Insecten, das Schillern abgestandener Gläser, der trockenen Farbenstoffe von Indigo und die bekannten irisirenden Bilder der Perlmutter. Brewster überzeugte sich, dafs z. B. die Oberfläche der Perlmutter sehr viele feine und regelmäfsige Furchen hat und dafs man dieselbe irisirende Eigenschaft auch andern weichen Körpern, z. B. dem Siegellack, dem arabischen Gummi, selbst dem Blei mittheilen kann, wenn man ein Blättchen Perlmutter darauf abdruckt. Auch die Erscheinungen der oben dargestellten Interferenz des Lichts, sollte man glauben, müfsten bei dem häufigen Durchkreuzen des Lichts durch so viele Körper an der Oberfläche der Erde ebenso häufig vorkommen. Allein dieses ist nicht der Fall, und man wird auch leicht die Ursache davon auffinden. Die Interferenzphänomene hängen nämlich nicht blofs von jenen Durchkreuzungen des Lichts, die allerdings sehr häufig sind, sondern auch noch von andern Bedingungen ab, die nur sehr selten alle in dem hier geforderten Mafse eintreten, indem die beiden Strahlen von *derselben* Lichtquelle ausgehn müssen, indem diese Quelle nur

---

vom Spiegel reflectirte Lichtstrahl dringt, ein deutliches Bild giebt oder deutlich gesehn wird.

einen sehr kleinen Raum einnehmen darf, indem die Wege der Lichtstrahlen in ihrer Länge nur äuſserst wenig verschieden, ihre Neigung gegen einander nur sehr klein seyn darf u. s. w.

34) Allgemeine Theorie der Intensität des durch eine kleine Oeffnung gehenden Lichts.

Wir haben bereits oben (§. 21.) das allgemeine Verhalten des durch kleine Oeffnungen dringenden Lichts, wenn es sich dieser Oeffnung gegenüber auf einer ebenen oder sphärischen Tafel verbreitet, untersucht. Wir wollen nun auch die Intensität dieses auf die ebene Tafel fallenden Lichtes bestimmen. Wenn das Licht aus dem Mittelpuncte A kommt und sich in sphärischen Wellen verbreitet, bis ein Theil desselben die kleine Oeffnung BC des Schirms erreicht, so wird jeder Theil einer solchen sphärischen Welle, der zwischen den Grenzen jener Oeffnung enthalten ist, der Mittelpunct einer andern kleinen Welle seyn, deren Intensität der Oberfläche dieses Theils der ersten Welle proportional ist. Nach dem in §. 13. erklärten allgemeinen Princip der Bewegung wird die Summe aller der kleinen Vibrationen, welche jede dieser kleinen Wellen in einem Puncte M der Tafel DE hervorbringt, für die ganze Vibration dieses Punctes M genommen werden können. In dieser Voraussetzung wird man also die Intensität des Lichts in M ganz auf dieselbe Weise, wie bei den Problemen des §. 21., 22. u. s. w. bestimmen können. Man ziehe demnach die Gerade AO senkrecht auf die Tafel BC und auf den Schirm DE und betrachte sie als die Axe der z oder als die Axe der dritten der unter einander senkrechten Coordinaten x, y und z, deren Anfang der Punct A seyn soll. Nehmen wir an, daſs diese Axe der z, so wie auch die der x, in der Ebene der Zeichnung (des Papiers) liege, so daſs also die Axe der y auf dieser Ebene senkrecht steht. Sey $AB = AC = a$ und $AO = a + b$, wo also $b = OF$ sehr nahe den Abstand der Tafel von der Oeffnung BC bezeichnet. Sind nun x, y, z die Coordinaten irgend eines Punctes P der Welle, und bezeichnen ξ, v und ζ die analogen Coordinaten des Punctes M des Schirms, wo man $\zeta = a + b$ hat, so kann man sich die Oberfläche der sphärischen Welle BC (durch ge-

Fig. 199.

rade, auf der Ebene des Papiers senkrechte und durch andere mit dieser Ebene parallele Linien) in sehr schmale Parallelogramme getheilt vorstellen, von deren jedem die Oberfläche gleich $\partial x . \partial y$ ist, so dafs also die kleine, in dem Puncte P entstehende Welle in M die Vibration

$$\partial^2 V = \partial x . \partial y . \text{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha t - PM)$$

hervorbringen wird. Allein es ist auch

$$PM^2 = (\xi - x)^2 + (v - y)^2 + (\zeta - z)^2$$

und überdiefs

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

so dafs man daher hat

$$PM^2 = \zeta^2 + a^2 - 2\xi x - 2vy - 2\zeta z.$$

Da aber x und y selbst in ihren gröfsten Werthen nur sehr kleine Gröfsen sind, weil wir die Oeffnung BC sehr klein vorausgesetzt haben, so kann man annehmen

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{y^2}{2a},$$

und dadurch geht der Ausdruck $2\zeta z$ über in

$$2\zeta z = 2a^2 + 2ab - \frac{\zeta x^2}{a} - \frac{\zeta y^2}{a}$$

und wir erhalten für den vorhergehenden Werth von PM die Gleichung

$$PM^2 = b^2 + \frac{\zeta x^2}{a} - 2\xi x + \frac{\zeta y^2}{a} - 2vy,$$

oder sehr nahe, wenn man von dieser Gröfse die Quadratwurzel nimmt,

$$PM = b + \frac{\zeta x^2}{2ab} - \frac{\xi x}{b} + \frac{\zeta y^2}{2ab} - \frac{vy}{b},$$

oder endlich

$$PM = b - \frac{a\xi^2}{2b\zeta} - \frac{av^2}{2b\zeta} + \frac{\zeta}{2ab}\left(x - \frac{a\xi}{\zeta}\right)^2 + \frac{\zeta}{2ab}\left(y - \frac{av}{\zeta}\right)^2.$$

Setzt man diesen Werth von PM in den Ausdruck der oben gefundenen Vibration, so erhält man

$$\partial^2 V = \partial x \partial y . \text{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda}\left\{\alpha t - B - \frac{\zeta}{2ab}\left(x' - \frac{a\xi}{\zeta}\right)^2 - \frac{\zeta}{2ab}\left(y - \frac{ay}{\zeta}\right)^2\right\},$$

wo der Kürze wegen

$$B = b - \frac{a\xi^2}{2b\zeta} - \frac{a v^2}{2b\zeta}$$

gesetzt worden ist. Dieser Ausdruck läſst sich, wenn man den Sinus des zusammengesetzten Winkels auflöst, auch so darstellen

$$\partial^2 V = \partial x . \partial y . \text{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - B) . \text{Cos.} \frac{\pi}{\lambda} . \frac{\zeta}{ab}\left\{\left(x - \frac{a\xi}{\zeta}\right)^2 + \left(y - \frac{av}{\zeta}\right)^2\right\}$$

$$-\partial x \partial y . \text{Cos.} \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - B) . \text{Sin.} \frac{\pi}{\lambda} . \frac{\zeta}{ab}\left\{\left(x - \frac{a\xi}{\zeta}\right)^2 + \left(y - \frac{av}{\zeta}\right)^2\right\}.$$

Dieser Ausdruck muſs daher einmal in Beziehung auf x und dann in Beziehung auf y integrirt werden. Die Constanten der beiden Integrationen wird man durch die gegebene Form der Oeffnung BC bestimmen, wenn diese z. B. ein Kreis, eine Ellipse, ein Rechteck u. s. w. ist. Da die beiden Gröſsen

$$\text{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - B) \text{ und } \text{Cos.} \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - B)$$

constant oder von x und y unabhängig sind, so wird man den Ausdruck zu integriren haben:

$$V = \text{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - B) \int \partial x \int \partial y \, \text{Cos.} \frac{\pi}{\lambda} . \frac{\zeta}{ab}\left[\left(x - \frac{a\xi}{\zeta}\right)^2 + \left(y - \frac{av}{\zeta}\right)^2\right]$$

$$- \text{Cos.} \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - B) \int \partial x \int \partial y \, \text{Sin.} \frac{\pi}{\lambda} . \frac{\zeta}{ab}\left[\left(x - \frac{a\xi}{\zeta}\right)^2 + \left(y - \frac{av}{\zeta}\right)^2\right].$$

Drückt man diese Gleichung, nach vollendeter Integration, durch

$$V = F . \text{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - B) - G . \text{Cos.} \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - B)$$

aus, so hat man, wie in §. 20., für die gesuchte Intensität I der durch die kleine Oeffnung gegangenen Welle für den Punct M des Schirms den Ausdruck

$$I = F^2 + G^2.$$

I. Die hier angezeigten Doppelintegrale kann man, bei dem gegenwärtigen Zustande unserer Analysis, nicht in geschlossenen Ausdrücken geben. Dieses gilt selbst von den in ihnen enthaltenen einfachen Integralen

$$\int \partial y \, \text{Cos.} \left[\frac{\pi}{\lambda} . \frac{\zeta}{ab}\left(y - \frac{av}{\zeta}\right)^2\right] \text{und} \int \partial y \, \text{Sin.} \left[\frac{\pi}{\lambda} . \frac{\zeta}{ab}\left(y - \frac{av}{\zeta}\right)^2\right],$$

daher sich auch das gegebene Problem in seiner ganzen Allgemeinheit (wenn die Form der Oeffnung BC irgend welche seyn soll) nicht auflösen läfst. Blofs einige besondere Fälle, wenn z. B. jene Oeffnung ein Kreis, ein Rechteck u. s. w. ist, lassen jene Doppelintegration zu; wir werden von diesen Fällen in den nächsten Abschnitten reden. Hier wollen wir nur in Beziehung auf die so eben erwähnten einfachen Integrale bemerken, dafs man die Werthe von

$$\int \partial s \, \text{Cos.} \frac{\pi s^2}{2} \text{ und } \int \partial s \, \text{Sin.} \frac{\pi s^2}{2}$$

für verschiedene Werthe von s durch Tafeln ausgedrückt hat, von denen hier ein Theil angehängt ist. Diese Tafeln lassen sich durch folgendes allgemeine Verfahren construiren. Ist $U = \int S \partial s$ ein Ausdruck von unbekannter Form, welcher als das unentwickelte Integral von $S \partial s$ gegeben ist, wo S eine Function von s bezeichnet, so hat man für die beiden Werthe von U, die zu $s + h$ und zu $s - h$ gehören, nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$U + \frac{\partial U}{\partial s} h + \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{\partial^3 U}{\partial s^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

und

$$U - \frac{\partial U}{\partial s} h + \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} \frac{h^2}{1.2} - \frac{\partial^3 U}{\partial s^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \ldots\ldots,$$

so dafs demnach der Werth des gesuchten Integrals U zwischen den beiden Grenzen $s + h$ und $s - h$ oder dafs

$$\int_{s-h}^{s+h} S \partial s = 2 \frac{\partial U}{\partial s} h + 2 \frac{\partial^3 U}{\partial s^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \ldots,$$

also auch

$$\int_{s-h}^{s+h} S \partial s = 2 S h + 2 \frac{\partial^2 S}{\partial s^2} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \ldots.$$

seyn wird. Nimmt man, wie gewöhnlich, die beiden Grenzen $s + h$ und $s - h$ nur wenig verschieden, also h sehr klein, so genügt das erste oder die beiden ersten Glieder des letzten Ausdrucks. Hier folgt die oben erwähnte kleine Tafel.

Werthe der Integrale

$$\int \partial s \,\mathrm{Sin.}\frac{\pi s^2}{2} \text{ und } \int \partial s \,\mathrm{Cos.}\frac{\pi s^2}{2}$$

Grenzen d. Integrals von s=0 bis	$\int \partial s \,\mathrm{Sin.}\frac{\pi s^2}{2}$	$\int \partial s \,\mathrm{Cos.}\frac{\pi s^2}{2}$	Grenzen d. Integrals von s=0 bis	$\int \partial s \,\mathrm{Sin.}\frac{\pi s^2}{2}$	$\int \partial s \,\mathrm{Cos.}\frac{\pi s^2}{2}$
s=0 s=0,1	0,0006	0,0999	s=0 s=2,9	0,4098	0,5627
0,2	0,0042	0,1999	3,0	0,4959	0,6061
0,3	0,0140	0,2993	3,1	0,5815	0,5621
0,4	0,0332	0,3974	3,2	0,5931	0,4668
0,5	0,0644	0,4923	3,3	0,5191	0,4061
0,6	0,1101	0,5811	3,4	0,4294	0,4388
0,7	0,1716	0,6597	3,5	0,4149	0,5328
0,8	0,2487	0,7230	3,6	0,4919	0,5883
0,9	0,3391	0,7651	3,7	0,5746	0,5424
1,0	0,4376	0,7803	3,8	0,5654	0,4485
1,1	0,5359	0,7643	3,9	0,4750	0,4226
1,2	0,6229	0,7161	4,0	0,4202	0,4986
1,3	0,6859	0,6393	4,1	0,4754	0,5739
1,4	0,7132	0,5439	4,2	0,5628	0,5420
1,5	0,6973	0,4461	4,3	0,5537	0,4497
1,6	0,6388	0,3662	4,4	0,4620	0,4385
1,7	0,5492	0,3245	4,5	0,4339	0,5261
1,8	0,4509	0,3342	4,6	0,5158	0,5674
1,9	0,3732	0,3949	4,7	0,5668	0,4917
2,0	0,3432	0,4886	4,8	0,4965	0,4340
2,1	0,3739	0,5819	4,9	0,4347	0,5003
2,2	0,4553	0,6367	5,0	0,4987	0,5638
2,3	0,5528	0,6271	5,1	0,5620	0,5000
2,4	0,6194	0,5556	5,2	0,4966	0,4390
2,5	0,6190	0,4581	5,3	0,4401	0,5078
2,6	0,5499	0,3895	5,4	0,5136	0,5573
2,7	0,4528	0,3929	5,5	0,5533	0,4785
2,8	0,3913	0,4678	∞	0,5	0,5

35) **Besonderer Fall, wenn die Oeffnung ein Rechteck ist.**

Ist die Oeffnung BC, durch welche das Licht geht, ein Rechteck, dessen Seiten in der Richtung der Coordinaten x und y liegen und 2e und 2f zu ihren Längen haben, und geht die auf die Tafel DE senkrechte Richtung AO durch den Mittelpunct dieses Rechtecks (d. h. durch den Durchschnittspunct seiner beiden Diagonalen), so nenne man der Kürze wegen

$$\frac{\zeta}{\lambda a b}\left(y - \frac{a v}{\zeta}\right)^2 = \tfrac{1}{2} s^2$$

oder

$$y - \frac{a v}{\zeta} = s\sqrt{\frac{\lambda a b}{2\zeta}},$$

so dafs man also auch hat

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \sqrt{\frac{\lambda a b}{2\zeta}}$$

oder

$$\int \partial y \operatorname{Cos.}\left[\frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{\zeta}{a b}\left(y - \frac{a v}{\zeta}\right)^2\right] = \sqrt{\frac{\lambda a b}{2\zeta}} \cdot \int \partial s \operatorname{Cos.}^2 \frac{\pi s^2}{2}.$$

Dieses Integral mufs, der Natur der Aufgabe nach, von $y = -f$ bis $y = +f$ genommen werden, das heifst, von

$$s = -\sqrt{\frac{2\zeta}{\lambda a b}}\left(f + \frac{a v}{\zeta}\right) \text{ bis } s = \sqrt{\frac{2\zeta}{\lambda a b}}\left(f - \frac{a v}{\zeta}\right).$$

Es wird demnach gleich seyn der Summe von zwei Zahlen in der Columne $\int \partial s \operatorname{Cos.} \frac{\pi s^2}{2}$ der vorhergehenden Tafel, die zu den beiden folgenden Werthen von s gehören:

$$s = \sqrt{\frac{2\zeta}{\lambda a b}} \cdot \left(f + \frac{a v}{\zeta}\right) \text{ und } s = \sqrt{\frac{2\zeta}{\lambda a b}}\left(f - \frac{a v}{\zeta}\right).$$

Seyen A′ und A″ diese Zahlen. Verfährt man ebenso für die Sinus und nennt man B′ und B″ die zwei Zahlen der Tafel in der Columne $\int \partial s \operatorname{Sin.} \frac{\pi s^2}{2}$, die zu

$$s = \sqrt{\frac{2\zeta}{\lambda a b}}\left(f + \frac{a v}{\zeta}\right) \text{ und } s = \sqrt{\frac{2\zeta}{\lambda a b}}\left(f - \frac{a v}{\zeta}\right)$$

gehören, so erhält man für das Integral, das wir in dem vorhergehenden Paragraph durch F ausgedrückt haben,

$$F = \int \partial x \left\{ \sqrt{\frac{\lambda a b}{2\zeta}} (A' + A'') \, \text{Cos.} \frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{\zeta}{a b} \left(x - \frac{a \xi}{\zeta} \right)^2 \right\}$$

$$- \int \partial x \left\{ \sqrt{\frac{\lambda a b}{2\zeta}} (B' + B'') \, \text{Sin.} \frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{\zeta}{a b} \left(x - \frac{a \xi}{\zeta} \right)^2 \right\}.$$

Ganz auf dieselbe Weise erhält man auch

$$G = \int \partial x \left\{ \sqrt{\frac{\lambda a b}{2\zeta}} (A' + A'') \, \text{Sin.} \frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{\zeta}{a b} \left(x - \frac{a x}{\zeta} \right)^2 \right\}$$

$$+ \int \partial x \left\{ \sqrt{\frac{\lambda a b}{2\zeta}} (B' + B'') \, \text{Cos.} \frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{\zeta}{a b} \left(x - \frac{a x}{\zeta} \right)^2 \right\}.$$

Nimmt man nun diese zwei Integrale auf dieselbe Art von $x = -e$ bis $x = +e$ und setzt man A''' und A^{iv} für die Tafelzahlen von $\int \partial s \, \text{Cos.} \frac{\pi s^2}{2}$ für die Werthe

$$s = \sqrt{\frac{2\zeta}{\lambda a b}} \left(e + \frac{a \xi}{\zeta} \right) \text{ und } s = \sqrt{\frac{2\zeta}{\lambda a b}} \left(e - \frac{a \xi}{\zeta} \right),$$

so wie B''' und B^{iv} für die ähnlichen Tafelzahlen von $\int \partial s \, \text{Sin.} \frac{\pi s^2}{2}$, so erhält man

$$F = \frac{\lambda a b}{2\zeta} [(A' + A'')(A''' + A^{iv}) - (B' + B'')(B''' + B^{iv})]$$

und

$$G = \frac{\lambda a b}{2\zeta} [(A' + A'')(B''' + B^{iv}) + (B' + B'')(A''' + A^{iv})]$$

und daher hat man für die gesuchte Intensität I

$$I = F^2 + G^2,$$

das heifst,

$$I = \left(\frac{\lambda a b}{2\zeta} \right)^2 \cdot [(A' + A'')^2 + (B' + B'')^2] \cdot [(A''' + A^{iv})^2 + (B''' + B^{iv})^2],$$

wo immer $\zeta = a + b$ ist.

Wir werden zu diesem Ausdrucke von I später auf einem anderen Wege zurückkommen und ihn dann mehr im Detail untersuchen. Diese Untersuchung der eigentlichen Ge-

stalt des Lichtbildes auf der Tafel DE beruht hier offenbar auf den particulären Werthen von ξ und v, deren man zuerst mehrere nach einer bestimmten Reihenfolge berechnen mufs, um die Grenzen und die verschiedenen Lichtintensitäten der auf dem Schirme entstehenden Figur sich versinnlichen zu können.

I. Der einfachste besondere Fall, der aus der vorhergehenden Betrachtung des Parallelogramms abgeleitet werden kann, ist der, wenn man das Parallelogramm in eine gerade Linie übergehn läfst, d. h. wenn man die Intensität eines Lichtes sucht, das an der geradlinigen Seite (der Kante oder dem Rande) einer dünnen Platte von Metall u. dgl. vorbeigeht. Wird für diesen Fall die Axe der y parallel mit jener Kante der Platte genommen, so ist $x = 0$, und man wird das erste der beiden vorhergehenden Integrale zwischen den Grenzen $y = \infty$ und $y = -\infty$, so wie das zweite von $x = \infty$ bis $x = -\infty$ zu nehmen haben. Fresnel, der diesen speciellen Fall umständlich untersuchte, fand dafür folgende Resultate. Wenn man durch den Lichtpunct und durch die scharfe Kante der Metallplatte eine Ebene legt und wenn der Durchschnitt dieser Ebene mit dem Schirm die Grenze des *geometrischen Schattens* genannt wird, den die Platte auf den Schirm wirft, so sieht man in diesem geometrischen Schatten das Licht desto mehr abnehmen, je weiter man sich in diesem Schatten von jener Grenze desselben entfernt, so dafs dieses Licht schon in einer geringen Entfernung von jener Grenze bereits unmerklich wird. Auf der andern Seite dieser Grenze aber, in dem hellen Theile des Schirms, nimmt die Intensität des Lichts, nahe bei dieser Grenze, mehrmals periodisch ab und zu, indem es hier in verschieden gefärbten Streifen erscheint, bis es endlich in einer bestimmten Entfernung von der Grenze seine volle, von nun an unveränderliche Stärke erhält. Dieses ist, wie bereits oben gesagt, das merkwürdige Phänomen, das bereits Grimaldi beobachtet und Newton durch seine Emissionstheorie nur unvollständig erklärt hat [1].

II. Ist die Metallplatte unter einem rechten Winkel gebogen, so bemerkt man nebst den in I. erwähnten jetzt

1 Fresnel's vollständig genügende Erklärung aus der Undulationstheorie findet man in Mém. de l'Institut de Paris. 1821.

ebenfalls rechtwinkligen farbigen Streifen aufser dem geometrischen Schatten der Platte auf dem Schirme noch in diesem Schatten hellere krumme Linien, welche die Gestalt von Hyperbeln haben, wie sie in der Zeichnung dargestellt werden. Fig. 200.

III. Fällt endlich das Licht durch eine sehr enge Spalte der Platte auf der Tafel, so sieht man auf der letzteren viel lebhaftere, breite, irisirende Lichtstreifen. Ist die Oeffnung in der Platte dreieckig, so sind die Streifen, wie schon NEWTON bemerkte, rechtwinkligen Hyperbeln ähnlich, deren Asymptoten parallel und senkrecht zur Axe des Dreiecks sind. Wir werden auf alle diese speciellen Fälle weiter unten wieder zurückkommen.

36) Besonderer Fall, wenn die Oeffnung ein Kreis ist.

Theilt man die kreisförmige Scheibe einer solchen Oeffnung in unendlich viele concentrische Ringe und nennt man von einem dieser Ringe r den Halbmesser des inneren und $r + \partial r$ den Halbmesser des äufsern Randes, so ist die Oberfläche des Ringes gleich $2\pi r \partial r$. Die Entfernung jedes Puncts dieses Ringes von dem Schirme ist nahe gleich

$$b + \frac{\zeta}{2ab} r^2, \text{ wo wieder } \zeta = a + b \text{ ist,}$$

woraus sofort folgt, dafs die Vibration des Lichts in dem Centralpuncte des Schirms, d. h. in der Projection des Mittelpunctes jener kreisförmigen Oeffnung auf dem Schirme, durch die Gleichung ausgedrückt wird

$$V = 2\pi \int r \partial r \,\text{Sin.}\, \frac{2\pi}{\lambda} \left(\alpha t - b - \frac{\zeta}{2ab} r^2\right),$$

und davon ist das Integral

$$V = \frac{ab\lambda}{\zeta} \,\text{Cos.}\, \frac{2\pi}{\lambda} \left(\alpha t - b - \frac{\zeta}{2ab} r^2\right).$$

Ist R der Halbmesser der kreisförmigen Oeffnung, so mufs dieses Integral von $r = 0$ bis $r = R$ genommen werden, so dafs man daher erhält

$$V = \frac{ab\lambda}{2\zeta} \,\text{Sin.}\, \frac{2\pi}{\lambda} \left(\alpha t - b - \frac{\zeta}{4ab} R^2\right).\,\text{Sin.}\, \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\zeta}{4ab} R^2$$

und die Intensität I des Lichtes auf dem Schirme durch die Gleichung gegeben wird

$$I = \left(\frac{a b \lambda}{2 \zeta}\right)^2 \cdot \operatorname{Sin.}^2 \left(\frac{\pi \zeta R^2}{2 a b \lambda}\right).$$

Dieser Ausdruck von I ist demjenigen ähnlich, den wir oben (§. 31.) für die Intensität des reflectirten Lichts zwischen zwei Glaslinsen erhalten haben, wenn man nämlich in dem Ausdrucke von I. des §. 31. den Nenner als eine constante Gröfse betrachtet, also werden auch die Farben in beiden Fällen nahe dieselben seyn. Man mufs aber bemerken, dafs der obige Werth von I nur die Intensität des Lichts in dem erwähnten *Centralpuncte* des Schirms ausdrückt.

37) Intensität des durch eine Sammellinse und durch eine kleine Oeffnung gehenden Lichts.

Fig. 201. Wenn das von dem Puncte A divergirend ausgehende Licht durch eine Sammellinse bc convergent gemacht wird und dann durch die Oeffnung BC auf die Tafel DE fällt, so wird man die Intensität desselben in jedem Puncte M der Tafel auf folgende Art bestimmen. Da nach dem Vorhergehenden die Oberfläche der Welle nach der Refraction durch die Linse eine Kugel seyn mufs, deren Mittelpunct O ist, so wollen wir diesen Punct O zum Anfangspunct der Coordinaten nehmen, so dafs x, y und z die Coordinaten irgend eines Punctes P der Oeffnung und ξ, v, ζ die analogen Coordinaten eines Punctes M der Tafel vorstellen. Da z mit OA parallel ist, so ist $\zeta = 0$ und daher

$$PM^2 = (\xi - x)^2 + (v - y)^2 + z^2.$$

Da aber die Gleichung der Oberfläche einer Kugel, deren Mittelpunct O und deren Halbmesser $OB = OC = b$ ist,

$$x^2 + y^2 + z^2 = b^2$$

ist, so hat man auch

$$PM^2 = b^2 + \xi^2 + v^2 - 2\xi x - 2 v y,$$

oder nahe, wenn man die Quadratwurzel dieser Gröfsen nimmt,

$$PM = b + \frac{\xi^2 + v^2}{2b} - \frac{\xi x}{b} - \frac{v y}{b}.$$

Setzt man der Kürze wegen, wie in dem vorhergehenden analogen Probleme,

$$B = b + \frac{\xi^2 + v^2}{2b},$$

so erhält man, wie dort, für die vollständige Vibration des Punctes M

$$V = \int \partial x \int \partial y \, \text{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda} \left(\alpha t - B + \frac{\xi x}{b} + \frac{v y}{b} \right)$$

und dieser Ausdruck ist viel einfacher, als der des erwähnten Problems, da er von den Quadraten der beiden Gröfsen x und y unabhängig ist. Die erste Integration giebt sofort

$$-\frac{b\lambda}{2\pi v} \text{Cos.} \frac{2\pi}{\lambda} \left(\alpha t - B + \frac{\xi x}{b} + \frac{v y}{b} \right).$$

Ist aber y' und y'' der kleinste und gröfste Werth von y für einen gegebenen Werth von x (welche Werthe von y nämlich aus der gegebenen Gleichung der Oeffnung BC zwischen x und y erhalten werden), so wird dieses Integral zwischen den genannten Grenzen y' und y'' gleich seyn dem Ausdrucke

$$\frac{b\lambda}{2\pi v} \Big\{ \text{Cos.} \frac{2\pi}{\lambda} \left(\alpha t - B + \frac{\xi x}{b} + \frac{v y'}{b} \right)$$
$$- \text{Cos.} \frac{2\pi}{\lambda} \left(\alpha t - B + \frac{\xi x}{b} + \frac{v y''}{b} \right),$$

oder auch, wenn man die Cosinus auflöst, gleich

$$\frac{b\lambda}{2\pi v} \left[\text{Cos.} \frac{2\pi}{b\lambda} (\xi x + v y') - \text{Cos.} \frac{2\pi}{b\lambda} (\xi x + v y'') \right] . \text{Cos.} \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha t - B)$$

$$- \frac{b\lambda}{2\pi v} \left[\text{Sin.} \frac{2\pi}{b\lambda} (\xi x + v y') - \text{Sin.} \frac{2\pi}{b\lambda} (\xi x + v y'') \right] . \text{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha t - B).$$

Setzt man nun das Integral in Beziehung auf x zwischen den beiden entsprechenden Grenzen oder setzt man

$$P = \int \partial x \left[\text{Cos.} \frac{2\pi}{b\lambda} (\xi x + v y') - \text{Cos.} \frac{2\pi}{b\lambda} (\xi x + v y'') \right]$$

und

$$Q = \int \partial x \left[\text{Sin.} \frac{2\pi}{b\lambda} (\xi x + v y') - \text{Sin.} \frac{2\pi}{b\lambda} (\xi x + v y'') \right],$$

so erhält man für die gesuchte vollständige Vibration des Lichtes in irgend einem Puncte M des Schirms

$$V = \frac{b\lambda}{2\pi v}.P.\text{Cos.}\,\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - B) - \frac{b\lambda}{2\pi v}.Q.\text{Sin.}\,\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - B)$$

und daher auch für die Intensität I des Lichts in demselben Puncte M

$$I = \left(\frac{b\lambda}{2\pi v}\right)^2.(P^2 + Q^2).$$

38) Besonderer Fall, wenn die Oeffnung ein Rechteck ist.

Nimmt man die Seiten dieses Rechtecks in den Richtungen der x und y und nennt man diese Seiten 2e und 2f, so hat man

$$y' = -f \text{ und } y'' = +f,$$

also auch

$$\text{Cos.}\,\frac{2\pi}{b\lambda}(\xi x + v y') - \text{Cos.}\,\frac{2\pi}{b\lambda}(\xi x + v y'')$$

$$= \text{Cos.}\,\frac{2\pi}{b\lambda}(\xi x - v f) - \text{Cos.}\,\frac{2\pi}{b\lambda}(\xi x + v f)$$

$$= 2\,\text{Sin.}\,\frac{2\pi}{b\lambda}x\xi\,.\,\text{Sin.}\,\frac{2\pi}{b\lambda}vf.$$

Wird dieser Ausdruck durch ∂x multiplicirt und integrirt, so hat man

$$-\frac{b\lambda}{\pi\xi}.\text{Sin.}\,\frac{2\pi}{b\lambda}vf\,.\,\text{Cos.}\,\frac{2\pi}{b\lambda}\xi x$$

und dieses von $x = -e$ bis $x = +e$ genommen giebt

$$P = 0.$$

Ebenso hat man

$$\text{Sin.}\,\frac{2\pi}{b\lambda}(\xi x + v y') - \text{Sin.}\,\frac{2\pi}{b\lambda}(\xi x + v y'')$$

$$= \text{Sin.}\,\frac{2\pi}{b\lambda}(\xi x - v f) - \text{Sin.}\,\frac{2\pi}{b\lambda}(\xi x + v f)$$

$$= -\,2\,\text{Cos.}\,\frac{2\pi\xi x}{b\lambda}.\text{Sin.}\,\frac{2\pi v f}{b\lambda},$$

wovon wieder das Integral ist

$$-\frac{b\lambda}{\pi\xi}.\,\text{Sin.}\frac{2\pi v f}{b\lambda}.\,\text{Sin.}\frac{2\pi\xi x}{b\lambda}$$

oder, zwischen den Grenzen $x = -e$ und $x = +e$ genommen,

$$Q = -\frac{2b\lambda}{p\xi}.\,\text{Sin.}\frac{2\pi v f}{b\lambda}.\,\text{Sin.}\frac{2\pi\xi e}{b\lambda},$$

so dafs also die Intensität I gleich ist

$$I = \frac{b^4\lambda^4}{\pi^4\xi^2 v^2}.\,\text{Sin.}^2\frac{2\pi v f}{b\lambda}.\,\text{Sin.}^2\frac{2\pi\xi e}{b\lambda}$$

oder, was dasselbe ist,

$$I = 16e^2 f^2.\left(\frac{b\lambda}{2\pi v f}\,\text{Sin.}\frac{2\pi v f}{b\lambda}\right)^2.\left(\frac{b\lambda}{2\pi\xi e}\,\text{Sin.}\frac{2\pi\xi e}{b\lambda}\right)^2.$$

I. Dieser Werth von I wird ein Gröfstes für $\xi = 0$, $v = 0$, also für den Punct O, der dem Puncte A senkrecht zum Schirm gegenüber steht. Weiter wird I gleich Null, so oft ξ ein Multiplum von $\frac{b\lambda}{2e}$ oder so oft v ein Multiplum von $\frac{b\lambda}{2f}$ ist. Daraus folgt, dafs der Schirm mit einem Gitter von schwarzen Streifen überzogen ist, die auf einander senkrecht stehn und von denen die horizontalen, so wie auch die verticalen, unter sich gleich weit entfernt sind. Für jeden gegebenen Werth von ξ ist die Intensität ein Gröfstes, wenn $v = 0$, d. h. wenn v einen von denjenigen Werthen hat, die $\frac{b\lambda}{2qvf}\,\text{Sin.}\,\frac{2\pi v f}{b\lambda}$ zum Maximum machen. Das Lichtbild des Schirms wird also eine helle Stelle im Mittelpuncte haben, und durch diesen Mittelpunct wird ein vierarmiges Kreuz gehn, dessen Arme durch schwarze Striche in bestimmten Intervallen durchbrochen sind, in den vier Winkeln des Kreuzes wird eine Reihe von weniger hellen Vierecken stehn u. s. w., wie wir später umständlicher sehn werden.

39) Besonderer Fall, wenn die Oeffnung eine enge geradlinige Spalte ist.

Dieser Fall ist in dem des in §. 38. betrachteten Rechtecks enthalten. Ist nämlich 2f die Breite der Spalte und nimmt man die Länge 2e derselben unbestimmt an, so wird man von dem oben erhaltenen Ausdrucke

$$I = 16 e^2 f^2 . \left(\frac{b\lambda}{2\pi\xi e} \text{ Sin. } \frac{2\pi\xi e}{b\lambda} \right)^2 . \left(\frac{b\lambda}{2\pi v f} \text{ Sin. } \frac{2\pi v b}{b\lambda} \right)^2$$

die in e multiplicirten Glieder als eine unbestimmte, unserer Willkür überlassene constante Gröfse betrachten. Setzt man diese constante Gröfse gleich A^2, so hat man

$$I = A^2 . \frac{b^2 \lambda^2}{4\pi^2 v^2 f^2} . \text{ Sin.}^2 \frac{2\pi v f}{b\lambda}$$

für die gesuchte Intensität des durch die Spalte gegangenen Lichtes. Setzt man der grofsen Einfachheit des Ausdrucks wegen die Breite der Spalte $2f = k$ und die Gröfse $\frac{v}{b} = \text{Sin.}\,\psi$, so hat man, wenn man die Constante A^2 oder die ursprüngliche Intensität des Lichts zur Einheit annimmt,

$$I = \frac{\lambda^2}{k^2 \pi^2 \text{Sin.}^2 \psi} . \text{Sin.}^2 \left(\frac{k\pi}{\lambda} \text{Sin.}\,\psi \right) = \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{\lambda} \text{Sin.}\,\psi \right)^2} . \text{Sin.}^2 \left(\frac{k\pi}{\lambda} \text{Sin.}\,\psi \right)$$

Die Tafel am Ende des §. 39. giebt von 30 zu 30 Graden in der zweiten Columne den Werth von

$$H = \frac{1}{\frac{k\pi}{\lambda} \text{Sin.}\,\psi} \text{ Sin. } \left(\frac{k\pi}{\lambda} \text{Sin.}\,\psi \right)$$

und von

$$H^2 \text{ oder } I = \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{\lambda} \text{Sin.}\,\psi \right)^2} . \text{Sin.}^2 \left(\frac{k\pi}{\lambda} \text{Sin.}\,\psi \right)$$

Fig. 202. für $\frac{k\pi}{\lambda} \text{Sin.}\,\psi = 0°, 30°, 60°$ u. s. w. Die Figur aber zeigt in ihren Abscissen 0, 01, 02, 03 . . . die Werthe des Bogens $\frac{k\pi}{\lambda} \text{Sin.}\,\psi = 0, \frac{1}{2}\pi, \frac{2}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$ . . . zu beiden Seiten des Anfangspunctes O der Coordinaten und die diesen Abscissen entsprechenden Ordinaten H in der punctirten, die Ordinaten I in der ausgezogenen oder vollen Curve, wo diese und die nächstfolgenden Zeichnungen aus dem bereits oben angeführten, für den graphischen Theil des Gegenstandes vorzüglichen Werke Schwerd's genommen sind.

I. Für $\psi = 0$ erhält H sowohl, als auch die Intensität I ihren gröfsten Werth. Dieses entspricht dem Puncte O des

Schirms in der vorhergehenden Figur, wo O A senkrecht auf dem Schirme steht. Zu beiden Seiten von dem Puncte O (in beiden Figuren) nehmen die Gröſsen H und I immer ab, H langsam, k aber sehr schnell. Nennt man übrigens $x = \frac{k\pi}{\lambda} \text{Sin.}\psi$ die Abscisse, y oder H die Ordinate der beiden Curven, so wird die Gleichung der punctirten Curve $y = \frac{1}{x} \text{Sin. } x$ und die der vollen Curve $y = \frac{1}{x^2} \text{Sin.}^2 x$ seyn.

II. Der Werth von I, so wie auch der von H, wird gleich Null, so oft von dem Ausdrucke

$$\frac{\text{Sin.}\left(\frac{k\pi}{\lambda}\text{Sin.}\psi\right)}{\frac{k\pi}{\lambda}\text{Sin.}\psi}$$

der Zähler Null wird, ohne daſs zugleich der Nenner verschwindet, d. h. so oft

$$\frac{k\pi}{\lambda}\text{Sin.}\psi = 0,\ 2\pi,\ 4\pi,\ \ldots\ldots\ 2m\pi$$

ist, wo m die Zahlen 0, 1, 2, 3 . . bezeichnet. Der Ausdruck $\frac{k\pi}{\lambda}\text{Sin.}\psi = 2m\pi$ giebt aber

$$k\,\text{Sin.}\psi = 2m\lambda,$$

oder die Intensität des gebeugten Lichtes ist Null, so oft der Unterschied der Randstrahlen einer geraden Anzahl von Wellenlängen gleich ist. Diese Gleichung

$$\text{Sin.}\psi = \frac{2m\lambda}{k}$$

giebt zugleich die Beugungswinkel ψ = MFO für die lichtlosen oder dunklen Stellen des auf dem Schirm erzeugten Bildes. Ist die Breite k der Spalte gegen die Länge λ einer Lichtwelle sehr groſs oder ist $\frac{\lambda}{k}$ ein sehr kleiner Bruch, so wird auch in der letzten Gleichung $\text{Sin.}\psi = \frac{2m\lambda}{k}$ der Werth von ψ nur sehr klein seyn, so lange m nicht eine bedeutende Zahl wird, so daſs man daher statt dieser Gleichung auch

Fig. 201.

setzen kann $\psi = \pm \frac{2m\lambda}{k}$. Dieselbe Gleichung $\text{Sin.}\,\psi = \frac{2m\lambda}{k}$ zeigt zugleich, dafs die Sinus der Beugungswinkel ψ, die den dunklen Stellen entsprechen, der Länge λ der Lichtwelle direct und der Breite k der Spalte verkehrt proportional sind. Für $k < 2m\lambda$ wird $\text{Sin.}\,\psi > 1$, also ψ unmöglich.

III. Nimmt man $\frac{k\pi}{\lambda}\,\text{Sin.}\,\psi = \pm(2m \pm \frac{1}{2})\pi$, also auch $\text{Sin.}\left(\frac{k\pi}{\lambda}\,\text{Sin.}\,\psi\right) = \pm 1$, so wird

$$I = \left(\frac{1}{(2m \pm \frac{1}{2})\pi}\right)^2.$$

Fig. 202. Diese Werthe entsprechen in der Figur den Abscissen ± 1, ± 3, ± 5, ± 7 ... und da für sie

$$k\,\text{Sin.}\,\psi = \pm(2m \pm \tfrac{1}{2})\lambda = \pm(4m \pm 1)\tfrac{1}{2}\lambda$$

ist, so folgt daraus, dafs für diese Abscissen ± 1, ± 3, ± 5... der Gangunterschied der Randstrahlen einer *ungeraden* Anzahl von halben Wellenlängen gleich ist und dafs an diesen Puncten die Intensitäten

$$a^2,\ \tfrac{1}{9}a^2,\ \tfrac{1}{25}a^2,\ \tfrac{1}{49}a^2 \ldots, \text{ wo } a = \frac{2}{\pi} \text{ ist,}$$

sich verkehrt, wie die Quadrate der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 .. verhalten. Uebrigens entsprechen die Puncte 3, 5, 7, 9 .., welche in der Mitte zwischen den dunklen Stellen 2, 4, 6, 8 .. liegen, nicht genau den aufeinanderfolgenden gröfsten Intensitäten der Curve, sondern diese Maxima neigen sich etwas gegen die Mitte O des Bildes hin, und zwar um so mehr, je näher dieses Maximum selbst an der Mitte des Bildes steht.

IV. Dieses giebt zugleich ein sehr gutes Mittel, die Länge λ einer Lichtwelle für jede Farbe des Spectrums mit Genauigkeit zu bestimmen. Hat man nämlich den Beugungswinkel ψ für irgend einen farbigen Streifen und die Breite k der Spalte gemessen, was mit einem Theodoliten sehr scharf geschehn kann, so hat man aus II.

$$\lambda = \frac{k}{2m}\,\text{Sin.}\,\psi.$$

V. Das Vorhergehende setzt voraus, dafs sowohl die Ebene des Schirms, in welcher die Oeffnung angebracht ist, als auch die hinter dem Schirme stehende Tafel auf der ursprünglichen Richtung AO der einfallenden Strahlen senkrecht steht. Macht aber die Ebene des Schirms mit der Richtung der einfallenden Strahlen einen Winkel gleich $90^0 - w$, so sieht man leicht, dafs dadurch die vorhergehenden Werthe von H und I in die folgenden übergehn

$$H = \frac{1}{\frac{k\pi}{\lambda}(\text{Sin.}\,\psi - \text{Sin.}\,w)} . \text{Sin.} \left[\frac{k\pi}{\lambda}(\text{Sin.}\,\psi - \text{Sin.}\,w)\right]$$

und

$$I = \frac{1}{\left[\frac{k\pi}{\lambda}(\text{Sin.}\psi - \text{Sin.}w)\right]^2} . \text{Sin.}^2 \left[\frac{k\pi}{\lambda}(\text{Sin.}\,\psi - \text{Sin.}\,w)\right],$$

so dafs also auch für einen solchen geneigten Schirm die Intensität I verschwindet, so oft die Gröfse

$$\frac{k\pi}{\lambda}(\text{Sin.}\,\psi - \text{Sin.}\,w) = \pm 2m\pi$$

ist. Aus dieser Gleichung folgt

$$\text{Sin.}\,\psi - \text{Sin.}\,w = \pm \frac{2m\lambda}{k},$$

wodurch man einen der beiden Winkel ψ oder w bestimmen kann, wenn der andere gegeben ist. Der Beugungswinkel, d. h. die Neigung des gebeugten Strahls gegen den einfallenden AF, ist dann gleich $\psi - w$.

$\frac{k\pi}{\lambda}$ Sin. ψ	H	I	$\frac{k\pi}{\lambda}$ Sin. ψ	H	I
0°	1,000	1,000	$900° = \frac{10}{2}\pi$	0,000	0,0000
30	0,955	0,912	930	0,031	0,0009
60	0,827	0,684	960	0,052	0,0027
$90 = \frac{1}{2}\pi$	0,637	0,405	$990 = \frac{11}{2}\pi$	0,058	0 0033
120	0,413	0,171	1020	0,049	0,0024
150	0,191	0,036	1050	0,027	0,0007
$180 = \frac{2}{2}\pi$	0,000	0,000	$1080 = \frac{12}{2}\pi$	0,000	0,0000
210	−0,136	0,019	$1170 = \frac{13}{2}\pi$	0,049	0,0024
240	−0,207	0,043	$1350 = \frac{15}{2}\pi$	−0,042	0,0018
$270 = \frac{3}{2}\pi$	−0,212	0,045	$1530 = \frac{17}{2}\pi$	0,037	0,0014
300	−0,165	0,027	$1710 = \frac{19}{2}\pi$	−0,033	0,0011
330	−0,087	0,007	$1890 = \frac{21}{2}\pi$	0,030	0,0009
$360 = 2\pi$	0,000	0,000	$2070 = \frac{23}{2}\pi$	−0,028	0,0008
390	0,073	0,005	$2250 = \frac{25}{2}\pi$	0,025	0,0006
420	0,118	0,014	$2430 = \frac{27}{2}\pi$	−0,024	0,0006
$450 = \frac{5}{2}\pi$	0,127	0,016	$2610 = \frac{29}{2}\pi$	0,022	0,0005
480	0,103	0,011	$2790 = \frac{31}{2}\pi$	−0,020	0,0004
510	0,056	0,003	$2970 = \frac{33}{2}\pi$	0,019	0,0004
$540 = \frac{6}{2}\pi$	0,000	0,000			
570	−0,050	0,002			
600	−0,083	0,007			
$630 = \frac{7}{2}\pi$	−0,091	0,008			
660	−0,075	0,006			
690	−0,041	0,002			
$720 = \frac{8}{2}\pi$	0,000	0,000			
750	0,038	0,002			
780	0,064	0,004			
$810 = \frac{9}{2}\pi$	0,071	0,005			
840	0,059	0,003			
870	0,032	0,001			

40) Graphische Darstellung des durch ein Rechteck gehenden Lichtstroms.

Da man nach §. 38. für die Quadratwurzel der Intensität I für diesen Fall den Ausdruck hat

$$\sqrt{I} = 4ef. \frac{\text{Sin.}\frac{2\pi\xi e}{b\lambda}}{\frac{2\pi\xi e}{b\lambda}} \cdot \frac{\text{Sin.}\frac{2\pi v f}{b\lambda}}{\frac{2\pi v f}{b\lambda}},$$

so hat man auch, wenn man abkürzend die Winkel ψ und ψ' so annimmt, dafs man erhält

$$\frac{\xi}{b} = \text{Sin.}\psi \text{ und } \frac{v}{b} = \text{Sin.}\psi',$$

und wenn man überdiefs die zwei Seiten des Rechtecks $2e = a$ und $2f = b$ setzt,

$$\sqrt{I} = ab. \frac{\text{Sin.}\left(\frac{a\pi}{\lambda}\text{Sin.}\psi\right)}{\frac{a\pi}{\lambda}\text{Sin.}\psi} \cdot \frac{\text{Sin.}\left(\frac{b\pi}{\lambda}\text{Sin.}\psi'\right)}{\frac{b\pi}{\lambda}\text{Sin.}\psi'},$$

unter der Voraussetzung, dafs der Schirm, in welchem die Oeffnung angebracht ist, gegen die ursprüngliche Richtung der Lichtstrahlen senkrecht steht. Ist er aber gegen die Ebene der xz und yz um die Winkel w und w' geneigt, so wird man analog mit §. 39. V. haben

$$\sqrt{I} = ab. \frac{\text{Sin.}\frac{a\pi}{\lambda}(\text{Sin.}\psi - \text{Sin.}w)}{\frac{a\pi}{\lambda}(\text{Sin.}\psi - \text{Sin.}w)} \cdot \frac{\text{Sin.}\frac{b\pi}{\lambda}(\text{Sin.}\psi' - \text{Sin.}w')}{\frac{b\pi}{\lambda}(\text{Sin.}\psi' - \text{Sin.}w')}.$$

Wenn man, wie gewöhnlich, nur die *Verhältnisse* der Intensitäten in verschiedenen Puncten der Tafel betrachtet, auf welcher das Lichtbild entsteht, so kann man den constanten Factor ab dieser Ausdrücke gleich der Einheit annehmen. Vergleicht man dann diesen Ausdruck für $\sqrt{I}$ mit dem in §. 39. für eine enge geradlinige Spalte erhaltenen, so sieht man, dafs für das Rechteck die Intensität gleich ist dem Producte der beiden Intensitäten, die man durch eine horizontale und durch eine verticale Spalte erhält, deren Breiten gleich sind

Fig. 203. den beiden Seiten des Rechtecks. Die Zeichnung giebt die Gestalt und Lage des Lichtbildes in der Tafel, wenn die Oeffnung des Schirms ein gegen die Coordinatenaxe schief liegendes Rechteck ist, dessen Gröfse mit dem mittleren Rechteck (1' 1") der Figur übereinkommt. Man trägt nämlich durch den in der Ebene der Tafel willkürlich genommenen Anfangspunct 0, welcher der Mitte des Bildes entspricht, die zwei Hauptaxen XX' und YY' parallel mit den Seiten des Rechtecks in den Schirm und trägt dann auf diese Axen, von dem Puncte 0 aus, die Werthe der Seiten des Rechtecks, nämlich a z. B. auf XX' und b auf YY' auf. Da nun von den beiden Factoren

$$\frac{\text{Sin.}\left(\frac{a\pi}{\lambda}\ \text{Sin.}\,\psi\right)}{\frac{a\pi}{\lambda}.\ \text{Sin.}\,\psi} \text{ und } \frac{\text{Sin.}\ \frac{b\pi}{\lambda}\ \text{Sin.}\,\psi')}{\frac{b\pi}{\lambda}}$$

der erste verschwindet, wenn $\text{Sin.}\,\psi = \frac{2m\lambda}{a}$, und der zweite, wenn $\text{Sin.}\,\psi' = \frac{2m\lambda}{b}$, wo m die natürlichen Zahlen 1, 2, 3.. bezeichnet, so werden in der Figur, wenn man, was von uns abhängt, die Werthe von $\frac{\lambda}{a}$ und $\frac{\lambda}{b}$ den Seiten a und b des Rechtecks proportional annimmt, die dreigestrichenen Linien, die mit 2', 4', 6', 8' . . und mit 2", 4", 6", 8" . . bezeichnet sind, die *dunklen Streifen* des Lichtbildes andeuten, die also mit den beiden Hauptaxen XX' und YY' parallel sind. Steht die Oeffnung des Rechtecks im Schirme mit seinen Seiten parallel zu den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z, so stehn auch diese Hauptaxen und die sämmtlichen finstern oder schwarzen Streifen auf einander senkrecht, und alle lichten Bilder, die zwischen diesen dunklen Streifen enthalten sind, werden wieder Rechtecke seyn, die mit dem des Schirms parallele Seiten haben.

I. Zur Bestimmung der Intensität dieser einzelnen Rechtecke wird uns die Tafel des §. 39. dienen, da diese, nach der bereits oben mitgetheilten Bemerkung, die Werthe der zwei Factoren giebt, deren Product die gesuchte Intensität I dieser Rechtecke anzeigt. Ist also diese Intensität in dem

Centralpuncte 0 gleich der Einheit, so ist sie z. B. für das Rechteck 3′ oder 3″ oder genauer für den Punct der Tafel, dessen Coordinaten, in XX′ und YY′ gezählt, gleich $\frac{3}{2}\pi = 270^\circ$ sind, gleich 0,045, für den Punct 5′ oder 5″ gleich 0,016, für den Punct 7′ oder 7″ gleich 0,008, so daſs also diese Intensität selbst in den beiden Hauptlinien des durch das Bild dargestellten Kreuzes mit der Entfernung von dem Centralpuncte 0 sehr schnell abnimmt. Aber noch rascher ist diese Abnahme in denjenigen Rechtecken, welche in den Winkeln dieses Kreuzes stehn. Für das Rechteck p z. B., das zwischen 3′ und 3″ in der Mitte steht, ist diese Intensität nur (0,045)(0,045) = 0,002, und für das Rechteck q oder 3′; 5″ oder 5′; 3″ ist diese Intensität (0,045)(0,016) oder 0,0007, für das Rechteck t = (5′; 5″) ist sie (0,016)(0,016) = 0,00026 u. s. w., so daſs also die Intensität des ersten Winkelbildes p = (3′; 3″), das wir 0,002 gefunden haben, schon 500mal schwächer ist, als die Intensität des Centralpuncts 0. Man sieht daraus, daſs man diese Winkelbilder nur bei sehr intensivem einfallenden Lichte noch erkennen wird.

Zieht man durch irgend einen Punct M der Hauptaxe XX eine Gerade zur andern Axe YY′ parallel, so wird die Intensität für jeden Punct dieser Parallele erhalten, wenn man die Intensität des entsprechenden Puncts auf der Hauptaxe YY′ immer in demselben Verhältnisse vermindert, in welchem die Intensität des Puncts M kleiner ist, als die Intensität des Centralpuncts. Geht diese Gerade z. B. durch den Punct M = 3′, in welchem die Intensität gleich 0,045, also nahe 22mal kleiner als in dem Centralpuncte ist, so ist auch die Intensität auf allen Puncten dieser Linie 22mal kleiner, als in den entsprechenden Puncten der Linie YY′. Da nun die Intensität aller Puncte der beiden Hauptaxen aus der Tafel des §. 39. unmittelbar gegeben ist, so kann man sich durch diese Bemerkung leicht eine deutliche Vorstellung von der Intensität aller Lichtbilder der Tafel machen, ja man könnte selbst zwischen den dunklen Straſsen auf den verschiedenen lichten Rechtecken die Intensitäten der einzelnen Puncte dieser Rechtecke, etwa wie in unsern geographischen Charten die Berge und Thäler, durch eine anschauliche Zeichnung darstellen.

II. Uebrigens erscheint das Lichtbild des Ganzen auf der Tafel nur dann in der durch diese Zeichnung dargestellten

symmetrischen Form eines Kreuzes, wenn die direct einfallenden Lichtstrahlen auf der Ebene des Schirms, welcher die Oeffnung enthält, senkrecht stehn. Je gröfser aber die Neigung dieses Schirms gegen die einfallenden Strahlen ist, desto mehr leidet auch die symmetrische Gestalt des Bildes, und für $\psi = w$ verschwindet endlich die ganze Erscheinung.

III. Alles Vorhergehende wurde den darüber angestellten Experimenten vollkommen gemäfs gefunden. Schwerd beobachtete diese Erscheinungen am vorzüglichsten, indem er zwei mit einer feinen Spalte versehene Stanniolblättchen quer übereinander legte, sie unmittelbar vor das Auge hielt und durch das kleine parallelogrammartige Löchelchen das Bild der Sonne auf einem geschwärzten Uhrglase betrachtete. Bleibt die eine Spalte vertical, während die andere von der horizontalen Lage nach und nach ebenfalls zu der verticalen übergeht, so bleiben die der ersten Spalte entsprechenden Bildchen immer horizontal, während die anfangs verticalen Bildchen der zweiten Spalte eine immer schiefere Lage annehmen, bis sie endlich mit dem horizontalen zusammenfallen. Während dieser Abänderung werden beide Reihen der Bildchen immer schmäler und mehr verzogen, aber ihre Mittelpuncte nehmen auf den beiden Hauptaxen immer dieselben Stellen ein, indem sie die ursprüngliche Entfernung von dem Centralpuncte 0 beibehalten. Gebraucht man endlich zu diesen Beobachtungen ein Fernrohr, so kann man die Spalten in den Stanniolblättchen selbst mehrere Linien, bis auf einen Zoll breit nehmen, wodurch die Intensität des Bildes sehr vermehrt und die Winkelbildchen sichtbarer werden.

41) Besonderer Fall, wenn die Oeffnung ein gleichseitiges Dreieck ist.

Nimmt man die Axe der x in der zu einer Seite des Dreiecks senkrechten Richtung und den dieser Seite gegenüberstehenden Winkel zum Anfang der Coordinaten, und nennt man e die ganze Länge dieser Senkrechten, so hat man, da $\text{Tang. } 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist.

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{3}} \text{ und } y'' = +\frac{x}{\sqrt{3}},$$

so dafs also die obigen allgemeinen Werthe von P und Q in folgende übergehn:

$$P = \frac{b\lambda}{2\pi\left(\xi - \frac{v}{\sqrt{3}}\right)} \cdot \text{Sin.}\, \frac{2\pi x}{b\lambda}\left(\xi - \frac{v}{\sqrt{3}}\right)$$

$$- \frac{b\lambda}{2\pi\left(\xi + \frac{v}{\sqrt{3}}\right)} \cdot \text{Sin.}\, \frac{2\pi x}{b\lambda}\left(\xi + \frac{v}{\sqrt{3}}\right),$$

wo man noch $x = e$ setzen wird, um den Werth von P zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = e$ zu erhalten. Ebenso hat man für das andere Integral, auch von $x = 0$ bis $x = e$ genommen,

$$Q = \frac{b\lambda}{2\pi\left(\xi - \frac{v}{\sqrt{3}}\right)} \cdot \left[1 - \text{Cos.}\, \frac{2\pi e}{b\lambda}\left(\xi - \frac{v}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

$$- \frac{b\lambda}{2\pi\left(\xi + \frac{v}{\sqrt{3}}\right)} \cdot \left[1 - \text{Cos.}\, \frac{2\pi e}{b\lambda}\left(\xi + \frac{v}{\sqrt{3}}\right)\right].$$

Die Summe der Quadrate dieser zwei Gröfsen ist, wenn man der Kürze wegen

$$\xi - \frac{v}{\sqrt{3}} = g \text{ und } \xi + \frac{v}{\sqrt{3}} = h$$

setzt und den Factor $\frac{b^2\lambda^2}{4\pi^2}$ einstweilen wegläfst,

$$P^2 + Q^2 = \frac{1}{g^2}\left[2 - 2\,\text{Cos.}\, \frac{2\pi e}{b\lambda} g\right] + \frac{1}{h^2}\left[2 - 2\,\text{Cos.}\, \frac{2\pi e}{b\lambda} h\right]$$

$$- \frac{2}{gh}\left[1 + \text{Cos.}\, \frac{4\pi e}{b\lambda} \xi - \text{Cos.}\, \frac{2\pi e}{b\lambda} g - \text{Cos.}\, \frac{2\pi e}{b\lambda} h\right].$$

Dieser Ausdruck kann auch so geschrieben werden

$$P^2 + Q^2 = \frac{2}{g^2h^2}\left[\xi^2 + v^2 - \tfrac{2}{3}(\xi v + v^2)\,\text{Cos.}\, \frac{2\pi e}{b\lambda} g\right]$$

$$+ \frac{2}{g^2h^2}\left[\tfrac{2}{3}(\xi v - v^2)\,\text{Cos.}\, \frac{2\pi e}{b\lambda} h - \left(\xi^2 - \frac{v^2}{3}\right)\text{Cos.}\, \frac{4\pi e}{b\lambda} \xi\right].$$

Um auch diesen Ausdruck zum Gebrauche noch bequemer darzustellen, wollen wir

$$\xi = r \text{ Cos. } \Theta \text{ und } v = r \text{ Sin. } \Theta$$

setzen, wo also r und Θ die sogenannten Polarcoordinaten des Puncts M der Tafel in Beziehung auf den Centralpunct O derselben sind. Setzt man nämlich

$$M = \frac{3 b^4 \lambda^4}{32 \pi^4 r^4} \cdot \frac{1}{\text{Sin.}^2 \Theta \text{Sin.}^2 (\Theta - 60^\circ) \text{Sin.}^2 (\Theta - 120^\circ)}$$

und

$$N = \frac{4 \pi r e}{b \lambda \sqrt{3}}$$

und stellt man auch den oben weggelassenen Factor $\frac{b^2 \lambda^2}{4 \pi^2}$ wieder her, so erhält man für die gesuchte Intensität

$$I = M \left[\tfrac{3}{4} - \text{Sin.}(\Theta - 60^\circ) \text{Sin.}(\Theta - 120^\circ) \text{Cos.}(N \text{Sin.} \Theta)\right]$$
$$- M \left[\text{Sin.}(\Theta - 120^\circ) \text{Sin.}(\Theta - 180^\circ) \text{Cos.}(N \text{Sin.}(\Theta - 60^\circ))\right]$$
$$- M \left[\text{Sin.}(\Theta - 180^\circ) \text{Sin.}(\Theta - 240^\circ) \text{Cos.}(N \text{Sin.}(\Theta - 120^\circ))\right].$$

Dieser Ausdruck ist in seinem gröfsten Werthe für $r = 0$ und dann ist

$$I = \frac{27 e^4}{4}.$$

Aber der Werth von I ist auch dann noch beträchtlich grofs, wenn $\Theta = 0$ oder $= 60^\circ$ oder 120°, 180°, 240° oder endlich 300° ist, wo nämlich für alle diese Fälle

$$I = \frac{3 \lambda^2 e^2 b^2}{4 \pi^2 r^2} + \frac{b^4 \lambda^4}{6 \pi^4 r^4}$$

wird, und daraus erklärt sich unter andern die Form, in welcher die Fixsterne im Fernrohr erscheinen, wie Herschel[1] zuerst gezeigt hat und worauf wir weiter unten wieder zurückkommen werden.

I. Den vorhergehenden Ausdruck für I fand Airy[2] für das gleichseitige Dreieck. Schwerd hat folgenden allgemeinen und zugleich sehr eleganten Ausdruck für jedes Dreieck, dessen Seiten a, b und c sind, gegeben, in welchem wieder ψ den Beugungswinkel und α, β, γ die Neigungen der Seiten $AB = a$, $AC = b$ und $BC = c$ des Dreiecks gegen die

Fig. 204.

1 Encyclop. Metrop. Art. *Light.* p. 772.
2 S. dessen oben erwähnte Schrift.

Richtung NN' des durch die Oeffnung des Schirms gebeugten Strahls bezeichnen, vorausgesetzt, dafs die Ebene dieses Schirms oder dafs die Ebene dieses Dreiecks auf der ursprünglichen Richtung der Strahlen senkrecht steht. Dieser Ausdruck ist:

$$I=\frac{1}{(\alpha')^2}\left[\left(\frac{\text{Sin.}\gamma'}{\gamma'}\right)^2+\left(\frac{\text{Sin.}\beta'}{\beta'}\right)^2-\frac{2\,\text{Sin.}\gamma'}{\gamma'}\cdot\frac{\text{Sin.}\beta'}{\beta'}\cdot\text{Cos.}\,\alpha'\right],$$

wo der Kürze wegen gesetzt worden ist

$$\alpha'=\frac{a\pi}{\lambda}\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\psi,$$

$$\beta'=\frac{b\pi}{\lambda}\,\text{Sin.}\,\beta\,\text{Sin.}\,\psi,$$

$$\gamma'=\frac{c\pi}{\lambda}\,\text{Sin.}\,\gamma\,\text{Sin.}\,\psi.$$

Da man aber überhaupt die Gleichung hat

$$a\,\text{Sin.}\,\alpha=c\,\text{Sin.}\,\gamma-b\,\text{Sin.}\,\beta,$$

so kann man jenem Ausdrucke auch noch folgende Gestalten geben:

$$I=\frac{1}{(\beta')^2}\left[\left(\frac{\text{Sin.}\gamma'}{\gamma'}\right)^2+\left(\frac{\text{Sin.}\alpha'}{\alpha'}\right)^2-\frac{2\,\text{Sin.}\gamma'}{\gamma'}\cdot\frac{\text{Sin.}\alpha'}{\alpha'}\cdot\text{Cos.}\,\beta'\right]$$

$$I=\frac{1}{(\gamma')^2}\left[\left(\frac{\text{Sin.}\alpha'}{\alpha'}\right)^2+\left(\frac{\text{Sin.}\beta'}{\beta'}\right)^2-\frac{2\,\text{Sin.}\alpha'}{\alpha'}\cdot\frac{\text{Sin.}\beta'}{\beta'}\cdot\text{Cos.}\,\gamma'\right],$$

oder endlich

$$I=\frac{1}{\alpha'\beta'\gamma'}\left[\left(\frac{\text{Sin.}\alpha'}{\alpha'}\right)^2-\left(\frac{\text{Sin.}\beta'}{\beta'}\right)^2+\left(\frac{\text{Sin.}\gamma'}{\gamma'}\right)^2\right].$$

II. Um den Inhalt dieses Ausdrucks durch eine Zeichnung anschaulich zu machen, sey in der Ebene der Tafel N der Centralpunct, NH die Richtung der directen und NT die Richtung der durch die Oeffnung des Schirms gebeugten Strahlen. Man ziehe die Linien Na, Nb und Nc parallel mit den Seiten a, b und c des gegebenen Dreiecks und beschreibe um N als Mittelpunct mit dem Halbmesser NH = NT eine Kugel. Seyen XHX, YHY und ZHZ die durch H gelegten und auf jenen Dreiecksseiten senkrecht stehenden gröfsten Kreise der Kugel, die wir die drei *Hauptkreise* nennen wollen. Endlich kann man auch noch durch den Punct T

Fig. 205.

drei andere, mit den vorhergehenden parallele Kreise gelegt denken und die Linien HP, TM und RN auf die Tafel senkrecht ziehn. Die Figur ist hier, der gröſseren Allgemeinheit wegen, für den Fall gezeichnet, wo der Schirm, in welchem die Oeffnung sich befindet, eine Neigung HR gegen die in die Oeffnung direct einfallenden Strahlen hat. Ist diese Neigung, wie oben vorausgesetzt wurde, gleich Null oder steht der Schirm senkrecht auf den directen Strahlen, so fällt der Punct P mit dem Centralpuncte N zusammen und die drei Puncte A, B und C fallen als überflüssig aus der Zeichnung weg. Läſst man nun von dem Puncte T der Oberfläche der Kugel ein Loth TM auf die Ebene der Tafel herab und zieht $MA_{,}$ senkrecht auf Na, so wie $MB_{,}$ senkrecht auf Nb und endlich $MC_{,}$ senkrecht auf Nc, so hat man

$$NA_{,} = \text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\psi,$$
$$NB_{,} = \text{Sin.}\,\beta\,\text{Sin.}\,\psi,$$
$$NC_{,} = \text{Sin.}\,\gamma\,\text{Sin.}\,\psi.$$

Fällt nun der Punct T mit H zusammen, also auch M mit P (d. h. fällt für einen senkrechten Schirm M mit dem Centralpuncte N zusammen), so ist $\alpha' = \beta' = \gamma' =$ Null und die Intensität I wird gleich der Einheit oder am gröſsten. Setzt man aber bloſs voraus, daſs T auf den Hauptkreis XHX falle, d. h. daſs $\alpha' =$ Null ist, so wird $\beta' = \gamma'$ und der obige vorletzte Ausdruck von I geht in den folgenden über:

$$I = \frac{1}{(\beta')^2}\left[1 + \left(\frac{\text{Sin.}\,\beta'}{\beta'}\right)^2 - \frac{2\,\text{Sin.}\,\beta'}{\beta'}\text{Cos.}\,\beta'\right]$$

oder auch

$$I = \left(\frac{\text{Sin.}\,\beta'}{\beta'}\right)^2 + \frac{1}{(\beta')^2}\cdot\left[\text{Cos.}\,\beta' - \frac{\text{Sin.}\,\beta'}{\beta'}\right]^2.$$

Da aber der zweite Theil dieses Ausdrucks nie gleich Null werden kann, auſser wenn β' selbst gleich Null ist, so sieht man, daſs auf dem Hauptkreise XHX die Intensität des Lichts nie gleich Null werden kann. Dasselbe gilt auch von den beiden andern Hauptkreisen. Eine dreieckige Oeffnung des Schirms giebt also keine fortlaufenden dunklen Straſsen, wie wir dieselben oben bei der viereckigen Oeffnung allerdings bemerkt haben. Auch zeigt der letzte Ausdruck, dessen erster Theil die Intensität auf einem der Hauptkreise einer recht-

winkligen viereckigen Oeffnung vorstellt, dafs bei gleicher Lichtmenge (d. h. bei gleicher Intensität des direct einfallenden Lichts) bei dem Dreiecke die Intensität immer gröfser ist, als bei dem Rechtecke, die Mitte N des Bildes ausgenommen, wo die Intensität gleich der Einheit ist. Setzt man $\beta' = \pm m\pi$, wo $m = 1, 2, 3 \ldots$ ist, so giebt der letzte Ausdruck

$$I = \frac{1}{(m\pi)^2}$$

für die Minima der Intensität auf dem Hauptkreise XHX. Diese Minima verhalten sich also, wie verkehrt die Quadrate der natürlichen Zahlen 1, 2, 3 . . ., und die beiden andern Hauptkreise haben offenbar ganz ähnliche Minima der Intensität. Setzt man $\beta' = \pm (2m+1)\frac{\pi}{2}$, so geht der letzte Ausdruck von I in den folgenden über

$$I = \frac{1}{\left[(2m+1)\frac{\pi}{2}\right]^2} + \frac{1}{\left[(2m+1)\frac{\pi}{2}\right]^4}$$

für die Maxima der Intensität auf dem Hauptkreise XHX. Sie nehmen nahe ab, wie verkehrt die Quadrate der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 . ., und ähnliche Maxima finden sich auch auf den beiden andern Hauptkreisen.

III. Die folgende kleine Tafel giebt die Werthe von I nach dem vorhergehenden Ausdrucke

$$I = \left(\frac{\text{Sin.}\,\beta'}{\beta'}\right)^2 + \frac{1}{(\beta')^2}\left[\text{Cos.}\,\beta' - \frac{\text{Sin.}\,\beta'}{\beta'}\right]^2$$

für $\beta' = 0$, 30^0, 60^0, 90^0 u. s. w. Die Zahlen der dritten Columne geben zur Vergleichung die analogen Zahlen für ein Rechteck von demselben Flächeninhalte, wie jenes Dreieck. Die Figur endlich zeigt diese Intensitäten in der ausgezogenen Curve für das Dreieck und in der punctirten Curve für das äquivalente Rechteck. Fig. 206.

β'	I im Dreieck	I im Rechteck	β'	I im Dreieck	I im Rechteck
0°	1,000	1,000	330°	0,035	0,007
30	0,941	0,911	$360 = \frac{4}{2}\pi$	0,025	0,000
60	0,781	0,684	390	0,019	0,005
$90 = \frac{1}{2}\pi$	0,569	0,405	420	0,017	0,014
120	0,361	0,171	$450 = \frac{5}{2}\pi$	0,016	0,016
150	0,199	0,036	$540 = \frac{6}{2}\pi$	0,011	0,000
165	0,142	0,008	$630 = \frac{7}{2}\pi$	0,008	0,008
$180 = \frac{2}{2}\pi$	0,101	0,000	$720 = \frac{8}{2}\pi$	0,006	0,000
195	0,074	0,006	$810 = \frac{9}{2}\pi$	0,005	0,005
210	0,058	0,019	$900 = \frac{10}{2}\pi$	0,004	0,000
225	0,050	0,032	$990 = \frac{11}{2}\pi$	0,003	0,003
240	0,048	0,043	$1080 = \frac{12}{2}\pi$	0,003	0,000
255	0,048	0,047	$1170 = \frac{13}{2}\pi$	0,002	0,002
$270 = \frac{3}{2}\pi$	0,047	0,045	$1260 = \frac{14}{2}\pi$	0,002	0,000
300	0,043	0,027			

IV. Obschon es, wie wir gesehn haben, auf den drei Hauptkreisen keine dunklen Strafsen giebt, so können sich doch dergleichen aufser jenen Kreisen in dem Bilde der Tafel finden. Um dieses zu untersuchen, betrachten wir den vorhergehenden Ausdruck

$$I = \frac{1}{(\gamma')^2}\left[\left(\frac{\text{Sin.}\,\alpha'}{\alpha'}\right)^2 + \left(\frac{\text{Sin.}\,\beta'}{\beta'}\right)^2 - \frac{2\,\text{Sin.}\,\alpha'}{\alpha'}\cdot\frac{\text{Sin.}\,\beta'}{\beta'}\cdot\text{Cos.}\,\gamma'\right].$$

In dieser Gleichung ist der Theil rechts vom Gleichheitszeichen gleich dem Quadrate der dritten Seite eines Dreiecks, dessen beide andere Seiten sind

$$\frac{\text{Sin.}\,\alpha'}{\alpha'} \text{ und } \frac{\text{Sin.}\,\beta'}{\beta'},$$

wenn sie den Winkel γ' zwischen sich einschliefsen. Die dritte Seite eines solchen Dreiecks kann aber nur in zwei Fällen verschwinden. Erstens, wenn jene zwei ersten Seiten einander gleich werden und der von ihnen eingeschlossene Winkel gleich Null wird. In diesem Falle ist also $\gamma' =$ Null und die obige Gleichung wird dann

$$I = \frac{1}{(\gamma')^2}\left[\frac{\text{Sin.}\,\alpha'}{\alpha'} - \frac{\text{Sin.}\,\beta'}{\beta'}\right]^2,$$

die, als ein Product von Quadraten, nie $I < 0$ geben kann. Der zweite Fall, den wir hier noch zu betrachten haben, ist der, wo die beiden Seiten $\frac{\text{Sin. } \alpha'}{\alpha'}$ und $\frac{\text{Sin. } \beta'}{\beta'}$ selbst gleich Null sind. Diese Seiten werden aber gleich Null, wenn $\beta' = \pm m\pi$ und $\alpha' = \pm n\pi$ ist, wo m und n die natürlichen Zahlen 1, 2, 3 . . bezeichnen. Daraus folgt, dafs die Intensität I Null wird in allen den Puncten, dessen coordinirte auf dem Hauptkreise befindliche Puncte einem der oben (in II) betrachteten Minima entsprechen. Nur in diesen Puncten und in keiner andern Stelle des Bildes kann absolute Finsternifs herrschen. Während also bei einem Rechteck ganze dunkle Strafsenzüge entstehn, sieht man bei dem Dreieck nur isolirte dunkle Stellen.

V. Um eine deutliche Uebersicht von dem ganzen Bilde zu erhalten, ziehe man durch den Centralpunct O die drei Hauptlinien XX, YY und ZZ senkrecht auf die Seiten des Dreiecks ABC, welches die Oeffnung im Schirm vorstellt, und trage auf diese Linien die Seiten des Dreiecks von O aus mehrmals auf. Dafs man statt dieser Seiten die Hälften oder die dritten Theile derselben u. s. w. nehmen kann, um das Bild in einen kleineren Raum einzuschliefsen, ist für sich klar. Die Endpuncte der eingetragenen Einheiten sind in der Figur durch die geraden Zahlen (Fig. 207.)

$$\begin{array}{ll} 2', \; 4', \; 6' \; . \; . & \text{in XX} \\ 2'', \; 4'', \; 6'' \; . \; . & \text{in YY} \\ 2''', \; 4''', \; 6''' \; . \; . & \text{in ZZ} \end{array}$$

bezeichnet worden. Durch die so bezeichneten Puncte ziehe man gerade, mit jenen Hauptlinien XX, YY, ZZ parallel laufende Linien, so werden alle Durchschnittspuncte dieser Linien diejenigen Puncte seyn, in welchen die Intensität Null ist; doch müssen unter diesen Durchschnittspuncten diejenigen ausgenommen werden, welche auf den drei Hauptlinien selbst liegen, da nach dem Vorhergehenden diese Hauptlinien ganz und gar keine finstern Puncte haben.

VI. Ist, wie zuvor, $\alpha' = \pm(2n+1)\frac{\pi}{2}$ und $\beta' = \pm(2m+1)\frac{\pi}{2}$, so erhält man

$$I = \frac{1}{(\frac{1}{2}\pi)^4} \cdot \frac{1}{(2m+1)^2 . (2n+1)^2}.$$

Setzt man in diesem Ausdrucke für m und n nach und nach 0, 1, 2, 3..., so erhält man die Intensität derjenigen Puncte, deren Coordinaten den ungeraden Zahlen auf den drei Hauptlinien entsprechen und die sich in der Mitte der Winkelbildchen befinden. Nimmt man für einen Augenblick die Gröſse $\frac{1}{(\frac{1}{2}\pi)^4}$ zur Einheit an, so wird die Intensität in den sechs Puncten, die in der Figur durch 1 bezeichnet sind, ebenfalls gleich 1 seyn, während in dem Mittelpuncte aller übrigen Parallelogramme diese Intensität seyn wird

$$I = \frac{1}{(2m+1)^2 (2n+1)^2}.$$

VII. Ist aber $\alpha' = \pm n\pi$ und $\beta' = \pm (2m+1)\frac{\pi}{2}$, so erhält man

$$I = \frac{1}{(\frac{1}{2}\pi)^4} \cdot \frac{1}{(2m+2n+1)^2 (2m+1)^2}$$

oder, wenn wieder $\frac{1}{(\frac{1}{2}\pi)^4}$ zur Einheit angenommen wird,

$$I = \frac{1}{(2m+2n+1)^2 \; (2m+1)^2}.$$

Diesem gemäſs wird also z. B. die Intensität desjenigen Punctes, welcher den Coordinaten 2 und 3 entspricht und welchen wir durch (2; 3) bezeichnen wollen, gleich seyn

$$\frac{1}{(2+3)^2 . 3^2} = \frac{1}{5^2 . 3^2} = \frac{1}{225}$$

und ebenso wird man für die Intensitäten der anderen Puncte haben

$$(1; 2) = \frac{1}{1^2 . 3^2} = \frac{1}{9} \qquad (3; 4) = \frac{1}{3^2 . 7^2} = \frac{1}{441}$$

$$(1; 4) = \frac{1}{1^2 . 5^2} = \frac{1}{25} \qquad (3; 6) = \frac{1}{3^2 . 9^2} = \frac{1}{729}$$

$$(1; 6) = \frac{1}{1^2 . 7^2} = \frac{1}{49} \qquad (5; 2) = \frac{1}{5^2 . 7^2} = \frac{1}{1225}$$ u. s. w.

Diese in der Figur eingeschriebenen Zahlen zeigen daher, wie vielmal die Intensität in jedem Puncte des Bildes kleiner ist, als in der mit 1; 1; 1 bezeichneten Stelle um den Centralpunct O. Dabei wurde die Gröfse $\frac{1}{(\frac{1}{2}\pi)^4}$ zur Einheit angenommen oder

$$I = \frac{1}{(2m+2n+1)^2(2m+1)^2}$$

gesetzt. Will man aber diese Intensitäten nach der vollständigen Formel

$$I = \frac{1}{(\frac{1}{2}\pi)^4} \cdot \frac{1}{(2m+2n+1)^2(2m+1)^2}$$

ausgedrückt haben, so wird man nur alle vorhergehende Zahlen durch

$$\frac{1}{(\frac{1}{2}\pi)^4} = 0{,}1643$$

multipliciren, also nahe 6mal kleiner nehmen.

VIII. Die Beobachtungen sind mit den erwähnten Resultaten der Berechnung vollkommen übereinstimmend. Jene zeigen die sternartige Figur mit ihren sechs Strahlen, und diese Strahlen erscheinen nicht (wie das Kreuz im Rechteck) mit finstern Stellen unterbrochen, sondern blofs an ihren Seiten eingekerbt, so dafs man nirgends dunkle Strafsen, sondern blofs isolirte finstere Stellen sieht. Um die Erscheinung mit blofsen Augen mit allen ihren Veränderungen zu sehn, kann man drei Stanniolblättchen so auf einander legen, dafs ihre Ränder nur eine sehr kleine dreieckige Oeffnung zwischen sich lassen, und dann durch diese Oeffnung des Sonnenbildchen, wie oben, auf einem an der Rückseite geschwärzten Uhrglase betrachten. Dabei mufs bemerkt werden, dafs man das Auge von dem Uhrglase immer in der Entfernung des deutlichen Sehens, also z. B. für einen Kurzsichtigen in der Entfernung von 6 oder 8 Zoll halten mufs. Läfst man bei dieser Beobachtung je zwei der drei Stanniolblättchen in ihrer Lage unverrückt und ändert man blofs die Lage des dritten, so bleiben auch die beiden Hauptlinien, welche auf den Rändern jener zwei ersten Blättchen senkrecht stehn, in dem Bilde in unverrückter Lage, so dafs blofs die dritte Hauptlinie ihre

Lage nach und nach ändert. Wird die Oeffnung kleiner, so wird das centrale Scheibchen 1 1 1 gröſser, und umgekehrt. Bedient man sich aber bei diesen Experimenten eines Fernrohrs, so kann man die Seiten des Dreiecks bedeutend groſs, z. B. von 1 bis 2 Zollen nehmen, wodurch man die Lichtstärke des ganzen Bildes sehr erhöht, was auch der Fall ist, wenn man statt des erwähnten Uhrglases einen gut polirten convexen Metallspiegel nimmt.

42) Betrachtung der Fälle, wenn das Licht durch mehrere kleine Oeffnungen derselben Gröſse und Form geht.

Nehmen wir, um von dieser Aufgabe wenigstens ein Beispiel durchzuführen, für diese Oeffnungen eine Anzahl m von Rechtecken an, deren Länge 2f und Breite e ist und die alle um die Gröſse g von einander abstehn. Hier ist also in dem vorigen allgemeinen Probleme $y' = -f$ und $y'' = +f$, so daſs man für den zu integrirenden Ausdruck hat

$$\partial x \left[\text{Cos.} \frac{2\pi}{\lambda}\left(\alpha t - B + \frac{\xi x}{b} - \frac{vf}{b}\right) - \text{Cos.} \frac{2\pi}{\lambda}\left(\alpha t - B + \frac{\xi x}{b} + \frac{vf}{b}\right)\right]$$

$$= 2\partial x \,\text{Sin.} \frac{2\pi v f}{b\lambda} . \text{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda}\left(\alpha t - B + \frac{\xi x}{b}\right)$$

und davon ist das Integral

$$-\frac{b\lambda}{\pi\xi} \,\text{Sin.} \frac{2\pi v f}{b\lambda} . \text{Cos.} \frac{2\pi}{\lambda}\left(\alpha t - B + \frac{\xi x}{b}\right).$$

Bezeichnet nun k den Werth von x, der zur ersten Seite des ersten Rechtecks gehört, so wird der zur ersten Seite des $(n+1)$ten Rechtecks gehörende Werth von x gleich $k + n(e+g)$ und der zur letzten Seite desselben gehörende Werth gleich $k + n(e+g) + e$ seyn, und man wird daher für das Integral, das zu diesem $(n+1)$ten Rechteck gehört, den Ausdruck haben

$$\frac{b\lambda}{\pi\xi} \,\text{Sin.} \frac{2\pi v f}{b\lambda} . \text{Cos.} \frac{2\pi}{\lambda}\left[\alpha t - B + \frac{k\xi}{b} + n(e+g)\frac{\xi}{b}\right]$$

$$-\frac{b\lambda}{\pi\xi} \,\text{Sin.} \frac{2\pi v f}{b\lambda} . \text{Cos.} \frac{2\pi}{\lambda}\left[\alpha t - B + \frac{k\xi}{b} + n(e+g)\frac{\xi}{b} + \frac{e\xi}{b}\right],$$

wofür man auch schreiben kann

$$\frac{2b\lambda}{\pi\xi}\text{Sin.}\frac{2\pi\nu f}{b\lambda}.\text{Sin.}\frac{\pi e\xi}{b\lambda}\text{Sin.}\frac{2\pi}{\lambda}\left[\alpha t - B + \frac{k\xi}{b} + \frac{e\xi}{2b} + n(e+g)\frac{\xi}{b}\right].$$

Setzt man der Kürze wegen $C = B - \frac{k\xi}{b} - \frac{e\xi}{b}$, so hat man für die gesuchte vollständige Vibration V in dem Puncte M des Schirms, wenn man den Factor $\frac{b\lambda}{2\pi v}$ wieder herstellt,

$$V = \frac{b^2\lambda^2}{\pi^2\xi v}.\text{Sin.}\frac{2\pi v f}{b\lambda}.\text{Sin.}\frac{\pi e\xi}{b\lambda}.\Sigma\text{Sin.}\frac{2\pi}{\lambda}\left(\alpha t - C + n(e+g)\frac{\xi}{b}\right),$$

wo n die Zahlen 1, 2, 3 . . und Σ das bekannte Summenzeichen ausdrückt. Von dem letzten Ausdrucke ist aber das endliche Integral (vergl. §. 20. IIIter Fall)

$$V = -\frac{1}{2\,\text{Sin.}\frac{\pi(e+g)\xi}{b\lambda}}.\text{Cos.}\frac{2\pi}{\lambda}\left(\alpha t - C + (n-\tfrac{1}{2})(e+g)\frac{\xi}{b}\right).$$

Nimmt man diesen Werth von $n=0$ bis $n=m$, um alle Rechtecke zu umfassen, so hat man (wie a. a. O.) für V den Ausdruck

$$V = \frac{\text{Sin.}\frac{m\pi(e+g)\xi}{b\lambda}}{\text{Sin.}\frac{\pi(e+g)\xi}{b\lambda}}.\text{Sin.}\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - D),$$

wo der Kürze wegen $D = C - \frac{(m-1)}{2}.(e+g)\frac{\xi}{b}$ gesetzt ist. Es ist demnach die vollständige Vibration für den Punct M gleich

$$V = \frac{b^2\lambda^2}{\pi^2\xi v}.\text{Sin.}\frac{2\pi v f}{b\lambda}.\text{Sin.}\frac{\pi e\xi}{b\lambda}.\frac{\text{Sin.}\frac{m\pi(e+g)\xi}{b\lambda}}{\text{Sin.}\frac{\pi(e+g)\xi}{b\lambda}}.\text{Sin.}\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - D)$$

und daher die Intensität I des Lichts für denselben Punct

$$I = 4e^2f^2\left(\frac{b\lambda}{2\pi v f}.\text{Sin.}\frac{2\pi v f}{b\lambda}\right)^2\cdot\left(\frac{b\lambda}{\pi e\xi}.\text{Sin.}\frac{\pi e\xi}{b\lambda}\right)^2\cdot\left(\frac{\text{Sin.}\,m\pi(e+g)\frac{\xi}{b\lambda}}{\text{Sin.}\,\pi(e+g)\frac{\xi}{b\lambda}}\right)^2.$$

I. Betrachten wir zuerst das letzte Glied dieses Ausdruckes von I oder das Glied

$$\left(\frac{\text{Sin. } m\,\Theta}{\text{Sin. }\Theta}\right)^2,$$

wenn der Kürze wegen $\Theta = \pi(e+g)\frac{\xi}{b\lambda}$ gesetzt wird. Ist m eine grofse ganze Zahl, so hat dieses Glied eine bedeutende Menge von gröfsten Werthen, die alle nahe zu den Werthen von Θ gehören, für welche $m\,\Theta$ ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}\pi$ ist; aber das gröfste dieser Maxima ist dasjenige, welches zu Sin. $\Theta = 0$ gehört und dieser gröfste aller Werthe ist dann gleich m^2. Das diesem nächstkommende Maximum gehört sehr nahe zu $m\,\Theta = \frac{\pi}{2}$ und ist gleich

$$\frac{1}{\left(\text{Sin. }\frac{\pi}{2m}\right)^2} \text{ oder nahe } \frac{4m^2}{\pi^2}.$$

Diesem folgt das an Gröfse nächstdritte $\frac{4m^2}{9\pi^2}$ u. s. w., und wenn endlich Sin. Θ nahe gleich der Einheit wird, so ist auch das dazu gehörende Maximum nahe gleich 1. Wie man sich dann der Gröfse $\Theta = \pi$ nähert, so sind wieder ein oder zwei Werthe etwas bemerkbar, und dann kommt man wieder zu dem früheren bedeutenden Maximum. Hätte man also z. B. auf das Objectivglas eines Fernrohrs ein Gitter von 100 parallelen Fäden gelegt, so wird man durch dieses Rohr einen sehr hellen Punct im Mittelpuncte des Feldes sehn. Ihm zu beiden Seiten stehn ein oder auch zwei viel weniger helle Puncte und jenem ersten so nahe, dafs man sie nicht leicht von ihm unterscheiden kann. Nach diesen zwei Puncten kommen mehrere andere, deren Intensität aber sehr schnell abnimmt (da ihre Intensität kaum den 10000sten Theil von jener des Centralpuncts beträgt); aber in noch gröfseren Entfernungen von diesen Centralpuncten wird man wieder zu beiden Seiten desselben einen dem Centralpuncte gleich hellen Punct erblicken und in der doppelten Entfernung wieder einen solchen u. s. w., so dafs man also in dem Felde des Fernrohrs eine Aufeinanderfolge von hellen Lichtpuncten sehn wird, die alle äquidistant sind und zwischen welchen kein dem Auge bemerkbares

Licht zu sehn ist. Die Distanz dieser Puncte erhält man, wenn man

$$\Theta = 0 \text{ oder } = \pi,\ 2\pi,\ 3\pi \ldots \text{ oder wenn man}$$

$$\xi = 0 \text{ oder } \frac{b\lambda}{e+g} \text{ oder } \frac{2b\lambda}{e+g} \text{ oder } \frac{3b\lambda}{e+g} \text{ u. s. w. setzt.}$$

Das Vorhergehende ist von einem bestimmten farbigen oder homogenen Lichte gesagt. Nimmt man aber das zusammengesetzte weiſse Sonnenlicht, so vereinigen sich die hellen Puncte aller Farben nur dort, wo $\xi = 0$ ist, aber sonst in keinem andern Puncte mehr. Denn wenn man von diesem ersten oder Centralpuncte zu dem Orte des nächsten hellen Punctes übergeht, so ist die Distanz zwischen diesen beiden Puncten der Wellenlänge λ proportional, so daſs demnach der nächste blaue Punct dem Centrum näher liegen wird, als der nächste rothe u. s. w. Wenn man also bei dem Experimente mit weiſsem Lichte den Centralpunct ebenfalls weiſs sieht, so wird man die andern, oben erwähnten hellen Puncte nicht mehr weiſs, sondern in den gewöhnlichen prismatischen Farben erblicken, und da diese hellen Puncte so vollkommen isolirt stehn, so wird das Farbenspiel in denselben sehr rein erscheinen, so daſs man selbst die feinen fixen Linien (oder Unterbrechungen der Farben), die man bei den gewöhnlichen Prismen nur mit Mühe sichtbar machen kann, sehr deutlich unterscheidet.

II. Betrachten wir nun auch das vorletzte Glied von I oder die Gröſse

$$\left(\frac{b\lambda}{\pi e \xi} . \text{Sin.} \frac{\pi e \xi}{b\lambda}\right)^2.$$

Ist ξ nur klein oder ist e nur klein, so ist diese Gröſse nahe gleich der Einheit. Wenn aber ξ zu irgend einem Multiplum von $\frac{b\lambda}{e}$ heranwächst, so verschwindet jene Gröſse. Wenn daher derselbe Werth von ξ ein Multiplum von $\frac{b\lambda}{e}$ und von $\frac{b\lambda}{e+g}$ ist, so wird einer der hellen Puncte verschwinden, was also so oft geschieht, als e und g unter sich commensurable Gröſsen sind. Auch dieses stimmt vollkommen mit den Beobachtungen überein. Auch sind die Seitenmaxima alle kleiner oder die

Seitenpuncte alle lichtschwächer, als der Centralpunct, welcher letztere seine gröſstere Lichtstärke für $\xi = 0$ hat.

III. Das erste Glied des vorhergehenden Ausdrucks von I bezieht sich offenbar bloſs auf das Gesetz des Fortgangs der Lichtstärke in der Richtung der Länge aller jener Rechtecke, daher es hier als auſserwesentlich übergangen werden kann.

IV. Man kann sich endlich alle diese Lichterscheinungen sichtbar machen, wenn man das Objectiv eines Fernrohrs mit einem undurchsichtigen Blatte bedeckt, in welchem man eine oder mehrere kleine, gleiche und gleichweit abstehende Oeffnungen in der Form von Rechtecken eingeschnitten hat.

V. Will man diesen Oeffnungen die Gestalt von Kreisen geben, deren Halbmesser e ist, so würde man in dem vorhergehenden allgemeinen Ausdrucke

$$y' = -\sqrt{e^2 - x^2} \text{ und } y'' = +\sqrt{e^2 - x^2}$$

setzen, wodurch man dann im Verfolg des Calcüls auf die zwei Integrale kommt

$$\int \partial x \sqrt{e^2 - x^2}. \text{ Cos. } nx \text{ und } \int \partial x \sqrt{e^2 - x^2}. \text{ Sin. } nx,$$

die man aber nicht in geschlossenen Ausdrücken darstellen kann. Allein das Resultat dieser Berechnung läſst sich auch wohl ohne jene Integrale finden. Da wir nämlich bei rechtwinkligen Oeffnungen gefunden haben, daſs die den Centralpunct nach allen Seiten umgebenden Lichtpuncte in ihren Distanzen sich verkehrt wie die Breiten dieser Rechtecke verhalten, so läſst sich ohne Schwierigkeit voraussehn, daſs bei einer kreisförmigen Oeffnung diese Lichterscheinungen nicht anders als in concentrischen Ringen sich darstellen können, deren Durchmesser sich ebenfalls verkehrt wie ihre Entfernungen von dem Centralpuncte verhalten, ein Resultat, das auch den Beobachtungen vollkommen gemäſs ist.

43) Andere Betrachtung des durch mehrere gleiche Oeffnungen gehenden Lichtes.

Um den Uebergang der Theorie von einer Oeffnung zu mehreren vollständig zu begründen, wird es angemessen seyn, dieses Problem noch von einer andern Seite und in seinen

ersten Gründen zu betrachten. - Zuerst wollen wir aber, um den Vortrag nicht weiter durch fremdartige Betrachtungen zu unterbrechen, die Summen einiger Reihen angeben, von welchen wir einige schon oben (§. 28. I. und §. 29.) angewendet haben, während uns die andern gleich hier und in der Folge nützlich seyn werden.

I. Suchen wir zuerst von den unendlichen Reihen

$$\text{Sin.}\,\varphi + a\,\text{Sin.}\,2\varphi + a^2\,\text{Sin.}\,3\varphi + a^3\,\text{Sin.}\,4\varphi + \ldots .$$

und

$$1 + a\,\text{Cos.}\,\varphi + a^2\,\text{Cos.}\,2\varphi + a^3\,\text{Cos.}\,3\varphi + \ldots .$$

die summatorischen Glieder oder vielmehr diejenigen Ausdrücke in der Form eines Bruches, durch deren Division jene Reihen entstehn.

Nach EULER[1] ist

$$\frac{A + B a}{1 - 2a\,\text{Cos.}\,\varphi + a^2}$$

derjenige Bruch, durch dessen Entwickelung die Reihe entsteht, deren allgemeines Glied ist

$$\frac{A\,\text{Sin.}\,(n+1)\varphi + B\,\text{Sin.}\,n\varphi}{\text{Sin.}\,\varphi} \cdot a^n.$$

Setzt man in diesen Ausdrücken $A = 1$ und $B = 0$, so erhält man

$$\frac{1}{1 - 2a\,\text{Cos.}\,\varphi + a^2} = 1 + \frac{a\,\text{Sin.}\,2\varphi}{\text{Sin.}\,\varphi} + \frac{a^2\,\text{Sin.}\,3\varphi}{\text{Sin.}\,\varphi} + \frac{a^3\,\text{Sin.}\,4\varphi}{\text{Sin.}\,\varphi}$$

oder, wenn man alle Glieder dieser Gleichung durch $\text{Sin.}\,\varphi$ multiplicirt,

$$\frac{\text{Sin.}\,\varphi}{1 - 2a\,\text{Cos.}\,\varphi + a^2} = \text{Sin.}\,\varphi + a\,\text{Sin.}\,2\varphi + a^2\,\text{Sin.}\,3\varphi + a^3\,\text{Sin.}\,4\varphi + \ldots \quad (1)$$

wodurch demnach die erste der beiden gesuchten Reihen bekannt ist. Multiplicirt man aber die vorletzte dieser Gleichungen durch $1 - a\,\text{Cos.}\,\varphi$, so erhält man

$$\frac{1 - a\,\text{Cos.}\,\varphi}{1 - 2a\,\text{Cos.}\,\varphi + a^2} = 1 + a\,\text{Cos.}\,\varphi + \frac{a^2}{\text{Sin.}\,\varphi}(\text{Sin.}\,3\varphi - \text{Sin.}\,2\varphi\,\text{Cos.}\,\varphi)$$
$$+ \frac{a^3}{\text{Sin.}\,\varphi}(\text{Sin.}\,4\varphi - \text{Sin.}\,3\varphi\,\text{Cos.}\,\varphi)$$
$$+ \frac{a^4}{\text{Sin.}\,\varphi}(\text{Sin.}\,5\varphi - \text{Sin.}\,4\varphi\,\text{Cos.}\,\varphi) + \ldots$$

1 Introductio in Analysin infinitorum. T. I. p. 181.

was sich auch so schreiben läſst

$$\frac{1-a\,\mathrm{Cos.}\,\varphi}{1-2a\,\mathrm{Cos.}\varphi+a^2}=1+a\,\mathrm{Cos.}\varphi+\frac{a^2}{2\,\mathrm{Sin.}\,\varphi}(\mathrm{Sin.}\,3\,\varphi-\mathrm{Sin.}\,\varphi)$$
$$+\frac{a^3}{2\,\mathrm{Sin.}\varphi}(\mathrm{Sin.}\,4\,\varphi-\mathrm{Sin.}\,2\,\varphi)$$
$$+\frac{a^4}{2\,\mathrm{Sin.}\varphi}(\mathrm{Sin.}\,5\,\varphi-\mathrm{Sin.}\,3\varphi)+\ldots$$

oder endlich, da allgemein

$$\mathrm{Sin.}\,x-\mathrm{Sin.}\,y=2\,\mathrm{Cos.}\,\frac{x+y}{2}\,\mathrm{Sin.}\,\frac{x-y}{2}\text{ ist,}$$

$$\frac{1-a\,\mathrm{Cos.}\,\varphi}{1-2a\,\mathrm{Cos.}\varphi+a^2}=1+a\,\mathrm{Cos.}\varphi+a^2\,\mathrm{Cos.}\,2\,\varphi+a^3\,\mathrm{Cos.}\,3\varphi+\ldots \quad (2)$$

und dadurch ist auch das erzeugende Glied der gesuchten zweiten Reihe bestimmt. Sind die Reihen convergent oder ist a kleiner als die Einheit, so sind die beiden Gröſsen

$$\frac{\mathrm{Sin.}\,\varphi}{1-2a\,\mathrm{Cos.}\,\varphi+a^2}\text{ und }\frac{1-a\,\mathrm{Cos.}\,\varphi}{1-2a\,\mathrm{Cos.}\,\varphi+a^2}$$

zugleich die Summen der beiden Reihen, wenn die Anzahl ihrer Glieder unendlich ist. Dieser Bruch

$$\frac{1}{1-2a\,\mathrm{Cos.}\,\varphi+a^2}$$

spielt bekanntlich in der Theorie der planetarischen Störungen eine sehr wichtige Rolle. Setzt man die Entwickelung dieses Bruches

$$\frac{1}{(1-2a\,\mathrm{Cos.}\varphi+a^2)^x}=\tfrac{1}{2}b_x^0+b_x^1\,\mathrm{Cos.}\varphi+b_x^2\,\mathrm{Cos.}\,2\varphi+b_x^3\,\mathrm{Cos.}3\varphi+\ldots,$$

so hat man für die Bestimmung der Coefficienten $b_x^0, b_x^1, b_x^2 \ldots$ folgende Ausdrücke[1]:

$$b_x^0=2\left[1+(ax)^2+\left(\frac{a^2x(x+1)}{1.2}\right)^2+\left(\frac{a^3x\,(x+1)\,(x+2)}{1.2.3}\right)^2+\ldots\right]$$

$$b_x^1=2\left[ax+a^3x.\frac{x(x+1)}{1.2}+a^5\frac{x(x+1)}{1.2}\cdot\frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}+\ldots\right]$$

1 S. Laplace Méc. cél. T. 1. Vergl. Littrow theor. u. pract. Astron. Th. I. S. 231.

und wenn man so die beiden ersten Coefficienten b_x^0 und b_x^1 kennt, so erhält man auch jeden andern b_x^n durch die Gleichung

$$b_x^n = \frac{(n-1)(1+a^2)b_x^{n-1} - (n+x-2)a \cdot b_x^{n-2}}{a(n-x)},$$

wo man nach der Ordnung n=2, 3, 4, 5 . . setzt.

Wendet man diese allgemeinen Ausdrücke auf unsern gegenwärtigen Fall an, wo $x=1$ ist, so hat man

$$b^0 = 2[1 + a^2 + a^4 + a^6 + \ldots]$$

und

$$b^1 = 2[a + a^3 + a^5 + \ldots],$$

das heifst, man hat

$$b^0 = \frac{2}{1-a^2} \text{ und } b^1 = \frac{2a}{1-a^2},$$

und mit diesen beiden Werthen von b^0 und b^1 giebt der vorhergehende Ausdruck von b_x^n oder, da $x=1$ ist,

$$b^n = \frac{(n-1)(1+a^2)b^{n-1} - (n-1)a b^{n-2}}{a(n-1)},$$

wenn man in ihm n = 2, 3, 4 . . setzt,

$$b^2 = \frac{2a^2}{1-a^2}, \quad b^3 = \frac{2a^3}{1-a^2}, \quad b^4 = \frac{2a^4}{1-a^2} \text{ u. s. w.,}$$

so dafs daher der angeführte allgemeine Ausdruck

$$\frac{1}{1-2a\,\mathrm{Cos.}\,\varphi + a^2} = \tfrac{1}{2} b^0 + b^1 \mathrm{Cos.}\,\varphi + b^2 \mathrm{Cos.}\,2\varphi + \ldots$$

in den folgenden übergeht

$$\frac{\frac{1}{2}(1-a^2)}{1-2a\,\mathrm{Cos.}\,\varphi + a^2} = \tfrac{1}{2} + a\,\mathrm{Cos.}\,\varphi + a^2\,\mathrm{Cos.}\,2\varphi + a^3\,\mathrm{Cos.}\,3\varphi + \ldots$$

oder, wenn man zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens die Gröfse $\frac{1}{2}$ addirt,

$$\frac{1-a\,\mathrm{Cos.}\,\varphi}{1-2a\,\mathrm{Cos.}\,\varphi + a^2} = 1 + a\,\mathrm{Cos.}\,\varphi + a^2\,\mathrm{Cos.}\,2\varphi + a^3\,\mathrm{Cos.}\,3\varphi + \ldots$$

übereinstimmend mit der Gleichung (2), aus welcher man dann auch, wie zuvor, sofort die Gleichung (1) ableiten kann.

II. Suchen wir nun ebenso die Summe der mehr zusammengesetzten Reihe

$$S = \text{Sin.}(\varphi - \psi) + a^2 \text{Sin.}(\varphi - 2\psi) + a^4 \text{Sin.}(\varphi - 3\psi) + \ldots$$

Setzt man der Kürze wegen

$$\varphi - \psi = \Theta \text{ und } a^2 = b,$$

so hat man

$$S = \text{Sin.}\,\Theta + b\,\text{Sin.}(\Theta - \psi) + b^2\,\text{Sin.}(\Theta - 2\psi) + \ldots.$$

oder, was dasselbe ist,

$$\begin{aligned} S = {} & \text{Sin.}\,\Theta + b\,\text{Sin.}\,\Theta\,\text{Cos.}\,\psi + b^2\,\text{Sin.}\,\Theta\,\text{Cos.}\,2\psi + \ldots \\ & - b\,\text{Cos.}\,\Theta\,\text{Sin.}\,\psi - b^2\,\text{Cos.}\,\Theta\,\text{Sin.}\,2\psi - \ldots \\ = {} & \text{Sin.}\,\Theta\,[1 + b\,\text{Cos.}\,\psi + b^2\,\text{Cos.}\,2\psi + b^3\,\text{Cos.}\,3\psi + \ldots] \\ & - b\,\text{Cos.}\,\Theta\,[\text{Sin.}\,\psi + b\,\text{Sin.}\,2\psi + b^2\,\text{Sin.}\,3\psi + \ldots] \end{aligned}$$

Substituirt man aber statt der in den Klammern enthaltenen Gröfsen der letzten Gleichung die in No. I. gefundenen Werthe dieser Reihen, so erhält man

$$S = \text{Sin.}\,\Theta \,.\, \frac{1 - b\,\text{Cos.}\,\psi}{1 - 2b\,\text{Cos.}\,\psi + b^2} - b\,\text{Cos.}\,\Theta \,.\, \frac{\text{Sin.}\,\psi}{1 - 2b\,\text{Cos.}\,\psi + b^2}$$

oder

$$S = \frac{\text{Sin.}\,\Theta - b\,\text{Sin.}(\Theta + \psi)}{1 - 2b\,\text{Cos.}\,\psi + b^2}.$$

Stellt man aber den Werth von $\Theta = \varphi - \psi$ und von $b = a^2$ wieder her, so hat man für die gesuchte Summe der oben aufgestellten Reihe

$$\begin{aligned} \frac{\text{Sin.}(\varphi - \psi) - a^2\,\text{Sin.}\,\varphi}{1 - 2a^2\,\text{Cos.}\,\psi + a^4} = {} & \text{Sin.}(\varphi - \psi) + a^2\,\text{Sin.}(\varphi - 2\psi) \\ & + a^4\,\text{Sin.}(\varphi - 3\psi) \\ & + a^6\,\text{Sin.}(\varphi - 4\psi) + \ldots \quad (3) \end{aligned}$$

III. Setzt man in der Gleichung (1) oder (2) die Gröfse $a = 1$, so erhält man die schon sonst sehr bekannten Ausdrücke

$$\tfrac{1}{2}\,\text{Cotg.}\,\frac{\varphi}{2} = \text{Sin}\,\varphi + \text{Sin.}\,2\varphi + \text{Sin.}\,3\varphi + \ldots.$$

und

$$\tfrac{1}{2} = 1 + \text{Cos.}\,\varphi + \text{Cos.}\,2\varphi + \text{Cos.}\,3\varphi + \ldots.$$

Setzt man ebenso in der Gleichung (3) die Gröfse $a^2 = 1$, so hat man, da

$$\frac{\text{Sin.}(\varphi-\psi)-\text{Sin.}\varphi}{2(1-\text{Cos.}\psi)}=-\frac{\text{Cos.}(\varphi-\frac{1}{2}\psi)}{2\,\text{Sin.}\frac{1}{2}\psi}$$

ist, den folgenden Ausdruck, wo statt ψ die Gröfse $-\psi$ gesetzt worden ist:

$$\frac{\text{Cos.}(\varphi+\frac{1}{2}\psi)}{2\,\text{Sin.}\frac{1}{2}\psi}=\text{Sin.}(\varphi+\psi)+\text{Sin.}(\varphi+2\psi)+\text{Sin.}(\varphi+3\psi)+\ldots,$$

also auch, wenn man zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens die Gröfse Sin. φ addirt,

$$\frac{\text{Cos.}(\varphi-\frac{1}{2}\psi)}{2\,\text{Sin.}\frac{1}{2}\psi}=\text{Sin.}\varphi+\text{Sin.}(\varphi+\psi)+\text{Sin.}(\varphi+2\psi)+\ldots \quad (4)$$

und ebenso

$$\frac{\text{Sin.}(\frac{1}{2}\psi-\varphi)}{2\,\text{Sin.}\frac{1}{2}\psi}=\text{Cos.}\varphi+\text{Cos.}(\varphi+\psi)+\text{Cos.}(\varphi+2\psi)+\ldots \quad (5)$$

IV. Nimmt man aber von den beiden letzten Reihen nicht eine unendliche Anzahl, sondern nur (n + 1) Glieder, so ist die Summe dieser (n + 1) Glieder schon aus Euler[1] bekannt, weswegen wir uns hier nicht weiter dabei aufhalten wollen. Man findet nämlich

$$\frac{\text{Sin.}(\varphi+\frac{1}{2}n\psi)\text{Sin.}\frac{1}{2}(n+1)\psi}{\text{Sin.}\frac{1}{2}\psi}=\text{Sin.}\varphi+\text{Sin.}(\varphi+\psi)+\text{Sin.}(\varphi+2\psi)\ldots$$
$$+\text{Sin.}(\varphi+n\psi)\ \ldots \quad (6)$$

und ebenso

$$\frac{\text{Cos.}(\varphi+\frac{1}{2}n\psi)\text{Sin.}\frac{1}{2}(n+1)\psi}{\text{Sin.}\frac{1}{2}\psi}=\text{Cos.}\varphi+\text{Cos.}(\varphi+\psi)+\text{Cos.}(\varphi+2\psi)\ldots$$
$$+\text{Cos.}(\varphi+n\psi)\ \ldots \quad (7)$$

Setzt man endlich auch in diesen beiden Ausdrücken die Gröfse $\varphi=\psi$, so erhält man für eine Anzahl von (n + 1) Gliedern

$$\frac{\text{Sin.}(n+1)\frac{\varphi}{2}}{\text{Sin.}\frac{\varphi}{2}}.\text{Sin.}(n+2)\frac{\varphi}{2}=\text{Sin.}\varphi+\text{Sin.}2\varphi+\text{Sin.}3\varphi\ \ldots$$
$$+\text{Sin.}(n+1)\varphi\ \ldots \quad (8)$$

$$\frac{\text{Sin.}(n+1)\frac{\varphi}{2}}{\text{Sin.}\frac{\varphi}{2}}.\text{Cos.}(n+2)\frac{\varphi}{2}=\text{Cos.}\varphi+\text{Cos.}2\varphi+\text{Cos.}3\varphi\ \ldots$$
$$+\text{Cos.}(n+1)\varphi\ \ldots \quad (9)$$

---

1 Introduct. in Analys. Infin. T. I. §. 258.

Nach diesen Vorbereitungen gehn wir nun zu der Darstellung über, durch welche man die Erscheinungen, welche das Licht zeigt, wenn es durch eine enge Oeffnung von bestimmter Form geht, sofort auf diejenigen Erscheinungen übertragen kann, die entstehn, wenn das Licht durch mehrere, jenen ersten in Form und Lage ähnliche Oeffnungen dringt. Bezeichnen wir den Abstand der homologen Puncte zweier aufeinander folgenden Oeffnungen, z. B. den Abstand der Endpuncte A und A′ durch Δ, und durch β den Winkel, welchen die Verbindungslinie A A′ dieser Puncte mit der Geraden NN′ macht, in welcher eine auf die gebeugten Strahlen senkrechte Ebene die Schirmebene schneidet. Sey ferner α der Winkel, welchen eine bestimmte Seite der Oeffnungen mit derselben Linie NN′ bildet, so daſs man also hat

Fig. 208.

$$AA' = A'A'' \ldots = \Delta$$
$$ACN' = \beta \text{ und } ADN' = \alpha.$$

Setzt man noch die Distanz $AD = a$, so hat man für die senkrechte Entfernung AB des Punctes A der ersten Oeffnung von der Linie NN′

$$AB = a \,\text{Sin.}\, \alpha.$$

Zieht man dann A′B′ mit AB parallel und Ab auf A′B′ senkrecht, so ist

$$A'b = \Delta \,\text{Sin.}\, \beta,$$

und daher die senkrechte Entfernung des Punctes A′ der zweiten Oeffnung von der Linie NN′ oder

$$A'B' = a \,\text{Sin.}\, \alpha + \Delta \,\text{Sin.}\, \beta,$$

und ebenso hat man für dieselben Entfernungen der Puncte A″, A‴ ... von der Linie NN′, wenn alle Oeffnungen unter sich um dieselbe Distanz Δ abstehn,

$$A''B'' = a \,\text{Sin.}\, \alpha + 2\Delta \,\text{Sin.}\, \beta$$
$$A'''B''' = a \,\text{Sin}\, \alpha + 3\Delta \,\text{Sin.}\, \beta$$
$$A^{IV}B^{IV} = a \,\text{Sin.}\, \alpha + 4\Delta \,\text{Sin.}\, \beta \text{ u. s. w.}$$

Nennt man nun wieder (wie in §. 41. I.) ψ den Winkel, welchen die Ebene des Schirms mit der Normalebene der gebeugten Strahlen bildet, so hat man für die Entfernungen derselben Puncte A, A′, A″... von der Normalebene der gebeugten Strahlen

$$a \operatorname{Sin.} \alpha \operatorname{Sin.} \psi$$
$$(a \operatorname{Sin.} \alpha + \Delta \operatorname{Sin.} \beta) \operatorname{Sin.} \psi$$
$$(a \operatorname{Sin.} \alpha + 2\Delta \operatorname{Sin.} \beta) \operatorname{Sin.} \psi$$
$$(a \operatorname{Sin.} \alpha + 3\Delta \operatorname{Sin.} \beta) \operatorname{Sin.} \psi \text{ u. s. w.}$$

Da aber alle Oeffnungen unter sich von gleicher Gröfse und Form und da die einfallenden sowohl, als auch die gebeugten Strahlen alle unter sich parallel sind, so wird in dem alle gebeugte Strahlen umfassenden Ausdrucke (des §. 19. III. oder des §. 20. IV.)

$$y_{,} = a_{,} \operatorname{Sin.} (\omega + A_{,})$$

für jede einzelne Welle die Gröfse $a_{,}$ dieselbe seyn, während man für die aufeinander folgenden Werthe von $A_{,}$ haben wird

$$\Delta \operatorname{Sin.} \beta \operatorname{Sin.} \psi, \; 2\Delta \operatorname{Sin.} \beta \operatorname{Sin.} \psi, \; 3\Delta \operatorname{Sin.} \beta \operatorname{Sin.} \psi \text{ u. s. w.}$$

Setzt man also wieder, wie an dem angeführten Orte,

$$\omega = \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha t - x) \text{ und } \frac{2\pi}{\lambda} . \Delta \operatorname{Sin.} \beta \operatorname{Sin.} \psi = A,$$

so wird man für die einzelnen Lichtwellen die Ausdrücke haben

$$a \operatorname{Sin.} (\omega - A)$$
$$a \operatorname{Sin.} (\omega - 2A)$$
$$a \operatorname{Sin.} (\omega - 3A)$$
$$\vdots$$
$$a \operatorname{Sin.} (\omega - nA),$$

wenn die Anzahl dieser Wellen durch n bezeichnet wird. Vergleicht man diese Ausdrücke mit denen des §. 20. IV., so sieht man, dafs man die Summe aller dieser Wellen durch die einzige Welle

$$a_{,} \operatorname{Sin.} (\omega - A_{,})$$

darstellen kann, wenn man die Gröfsen $a_{,}$ und $A_{,}$ so annimmt, dafs man hat

$$a_{,} = \sqrt{(\Sigma . a \operatorname{Sin.} A)^2 + (\Sigma . a \operatorname{Cos.} A)^2}$$

und

$$\operatorname{Tang} A_{,} = \frac{\Sigma . a \operatorname{Sin.} A}{\Sigma . a \operatorname{Cos.} A},$$

wo dann $(a_{,})^2$ die Intensität dieser Welle bezeichnet. Es ist aber

$$\Sigma . a \text{Cos.} A = a(\text{Cos.} A + \text{Cos.} 2A + \text{Cos.} 3A \ldots + \text{Cos.}(n+1)A),$$
$$\Sigma . a \text{Sin.} A = a(\text{Sin.} A + \text{Sin.} 2A + \text{Sin.} 3A \ldots + \text{Sin.}(n+1)A).$$

Nimmt man aber die Summen dieser zwei endlichen Reihen (nach den vorhergehenden Gleichungen (8) und (9)), so erhält man

$$\Sigma . a \text{Cos.} A = a . \frac{\text{Sin.}(n+1)\frac{A}{2}}{\text{Sin.}\frac{A}{2}} . \text{Cos.}(n+2)\frac{A}{2},$$

$$\Sigma . a \text{Sin.} A = a . \frac{\text{Sin.}(n+1)\frac{A}{2}}{\text{Sin.}\frac{A}{2}} . \text{Sin.}(n+2)\frac{A}{2},$$

so dafs man daher für die gesuchte Intensität I des durch alle oben erwähnten Oeffnungen gegangenen Lichtes den Ausdruck hat

$$I = (\Sigma . a \text{Sin.} A)^2 + (\Sigma . a \text{Cos.} A)^2$$

oder

$$I = a^2 . \frac{\text{Sin.}^2 (n+1)\frac{A}{2}}{\text{Sin.}^2 \frac{A}{2}},$$

wo $A = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta \text{ Sin.} \beta \text{ Sin.} \psi$ ist und a^2 die Intensität des gebeugten Lichtes bei einer einzigen Oeffnung bezeichnet. Wir wollen nun diesen Ausdruck von I in dem folgenden Abschnitte nach SCHWERD's oben erwähnter Schrift näher betrachten, da er für die ganze Theorie der Diffraction des Lichtes, wie wir sogleich sehn werden, von dem gröfsten Interesse ist.

44) Nähere Betrachtung der in §. 43. gefundenen Intensität des Lichts bei mehreren Oeffnungen.

Man kann zuvörderst den erhaltenen Ausdruck von I in zwei Factoren auch so schreiben

$$I = [(n+1)a]^2 \cdot \left[\frac{\text{Sin.}(n+1)\frac{A}{2}}{(n+1)\,\text{Sin.}\frac{A}{2}}\right]^2$$

oder

$$I = [(n+1)a]^2 \cdot B^2,$$

$$\text{wo } B = \frac{\text{Sin.}(n+1)\frac{A}{2}}{(n+1)\,\text{Sin.}\frac{A}{2}}$$

ist. Der erste Factor

$$(n+1)^2 \cdot a^2$$

bezeichnet dann die Intensität des gebeugten Lichts einer einzigen Oeffnung, multiplicirt mit dem Quadrat der Anzahl aller $(n+1)$ Oeffnungen, und dieser Factor hängt ab, wie man sieht, von der Gestalt, welche die Oeffnungen haben (da a^2 die Intensität jeder einzelnen Oeffnung ist), und von der Anzahl dieser Oeffnungen. Nicht so ist es mit dem zweiten Factor B^2, welcher von der Gröfse und Gestalt der Oeffnungen ganz unabhängig ist (da a in ihm nicht mehr vorkommt), sondern blofs durch die Anzahl und durch die Lage dieser Oeffnungen bedingt wird. Demnach bildet der erste Factor gleichsam die Grundlage des ganzen Gemäldes, da ohne ihn kein Lichtbild auf der Tafel statt haben kann, der zweite Factor aber dient blofs dazu, das von dem ersten auf der Tafel aufgetragene Licht zu modificiren, dasselbe in bestimmten Stellen zu vermindern oder auch ganz zu zerstören und dadurch dem Bilde selbst verschiedene Formen und Umrisse zu geben.

I. Bemerken wir zuerst, dafs die Werthe dieses Factors B^2 in bestimmten Perioden wiederkehren. Diese Periode wird nämlich immer dann durchlaufen, wenn $\frac{1}{2}A$ um $\pi = 180°$ wächst oder abnimmt. Ist $\frac{A}{2} = \frac{A}{2} + m\pi$ oder geht A über in $A + 2m\pi$, wo $m = 1, 2, 3$ . . ist, so wird

$$B = \frac{\text{Sin.}(n+1)\left(\frac{A}{2}+m\pi\right)}{(n+1)\,\text{Sin.}\left(\frac{A}{2}+m\pi\right)}, \text{ also auch } B = \frac{\text{Sin.}(n+1)\frac{A}{2}}{(n+1\ \text{Sin.}\frac{A}{2}}, \text{ wie}$$

zuvor.

Ist aber $\frac{A}{2} = \pm m\pi$, so geht die vorige Gleichung

$$A = \frac{2\pi}{\lambda} \varDelta \operatorname{Sin.} \beta \operatorname{Sin.} \psi$$

in folgende über

$$\varDelta \operatorname{Sin.} \beta \operatorname{Sin.} \psi = \pm m \lambda,$$

woraus folgt, daſs die Wiederkehr jener Periode immer dann eintritt, wenn die Gröſse $\varDelta \operatorname{Sin.} \beta \operatorname{Sin.} \psi$ um eine ganze Anzahl von Wellenlängen gröſser geworden ist.

Auch ist klar, daſs jede dieser Perioden in zwei gleiche und ähnliche Hälften getheilt ist, da der Werth von B^2 derselbe bleibt, man mag für $\frac{1}{2}A$ die Gröſse $m\pi + \frac{1}{2}\pi + x$ oder auch $m\pi + \frac{1}{2}\pi - x$ setzen.

Die folgende Tafel giebt die Werthe einer Periode für 2 bis 7 Oeffnungen und die Figur giebt die graphische Darstellung dieser Werthe. In diesen Zeichnungen ist die Abscisse von 0 bis 1 gleich π genommen und die jeder Abscisse zugehörende Ordinate giebt den entsprechenden Werth der Gröſse B^2.

Fig. 209.

Oeffnungen.

Zwei $n+1=2$		Drei $n+1=3$		Vier $n+1=4$		Fünf $n+1=5$		Sechs $n+1=6$		Sieben $n+1=7$	
A	B^2	A	B^2	A	B^2	A	B^2	A	B^2	A	B^2
0°	1,000	0°	1,000	0°	1,000	0°	1,000	0°	1,000	0°	1,000
45	0,852	30	0,829	45	0,427	36	0,419	30	0,415	26	0,412
90	0,500	60	0,444	90	0,000	72	0,000	60	0,000	51	0,000
135	0,146	90	0,111	135	0,073	108	0,061	90	0,056	77	0,052
$180=\pi$	0,000	120	0,000	180	0,000	144	0,000	120	0,000	103	0,000
225	0,146	150	0,059	225	0,073	180	0,040	150	0,030	128	0,025
270	0,500	180	0,111	270	0,000	216	0,000	180	0,000	154	0,000
315	0,852	210	0,059	315	0,427	252	0,061			180	0,020
$360=2\pi$	1,000	240	0,000	360	1,000	288	0,000				
		270	0,111			324	0,419				
		300	0,444			360	1,000				
		330	0,829								
		360	1,000								

II. Ist $\frac{1}{2}A = \pm m\pi$, wo $m = 0, 1, 2, 3 \ldots$, so wird $B=1$ und daher die Intensität

$$I = (n+1)^2 . a^2 .$$

Denn wenn φ einen unendlich kleinen Bogen bezeichnet, so ist

$$\text{Sin.}(m\pi + \varphi) = \text{Sin.}\varphi = \varphi$$

und

$$\text{Sin.}[(n+1)(m\pi+\varphi)] = (n+1)\varphi,$$

also auch

$$B = \frac{\text{Sin.}[(n+1)(m\pi+\varphi)]}{(n+1)\text{Sin.}(m\pi+\varphi)} = \frac{(n+1)\varphi}{(n+1)\varphi} = 1.$$

In diesem Falle, wo $\frac{1}{2}A = \pm m\pi$ ist, wird aber (nach Nr. I.)

$$\Delta \text{Sin.}\beta \ \text{Sin.}\psi = \pm m\lambda,$$

so daſs also der zweite Factor B^2 gleich der Einheit wird, d. h. seine gröſsten Werthe erreicht, wenn der Gangunterschied $\varDelta$ Sin. β Sin. ψ zweier nächsten Wellen einer ganzen Anzahl von Wellenlängen gleich ist. Wir wollen diese gröſsten Werthe die *Maxima der ersten Classe* nennen.

III. Derselbe zweite Factor B^2 wird gleich Null, so oft $(n+1)\frac{1}{2}A = \pm m\pi$ oder so oft

$$\tfrac{1}{2}A = \pm\frac{m}{n+1}\cdot\pi$$

ist, ausgenommen jedoch alle die Fälle, wo $\frac{m}{n+1}$ eine ganze Zahl ist, weil dann (nach Nr. II.) der Werth von $B^2 = 1$ wird. In dem gegenwärtigen Falle wird demnach die Intensität des ersten Factors von I durch den zweiten ganz zerstört, und dann ist

$$\tfrac{1}{2}A = \frac{\pi}{\lambda}\varDelta \text{Sin}\,\beta\,\text{Sin.}\,\psi = \pm\frac{m}{n+1}\pi$$

oder

$$(n+1)\,.\,\varDelta\,\text{Sin.}\,\beta\,\text{Sin.}\,\psi = \pm m\lambda,$$

d. h. also, wenn der $(n+1)$ fache Gangunterschied von zwei nächsten Wellen einer ganzen Anzahl von Wellenlängen gleich ist, so ist die Intensität Null (die Fälle der Maxima erster Classe, wie gesagt, ausgenommen). Wir wollen diese Fälle, wo I Null wird, die *Minima* von B^2 *der ersten Classe* nennen. Diese Minima der ersten Classe treten also ein

bei 2 Oeffnungen, wenn $\pm\frac{1}{2}A = \frac{2}{4}\pi = \frac{6}{4}\pi = \frac{10}{4}\pi = \frac{14}{4}\pi\ldots$
— 3 Oeffnungen, wenn $\pm\frac{1}{2}A = \frac{2}{6}\pi = \frac{4}{6}\pi = \frac{8}{6}\pi = \frac{10}{6}\pi\ldots$
— 4 Oeffnungen, wenn $\pm\frac{1}{2}A = \frac{2}{8}\pi = \frac{4}{8}\pi = \frac{6}{8}\pi = \frac{10}{8}\pi\ldots$

Fig. 209. Die Figuren zeigen diese Minima der ersten Classe in den Puncten, wo die Curve die Abscissenaxe berührt, also die auf dieser Axe senkrechte Ordinate gleich Null ist.

IV. Ein dritter hier zu betrachtender Fall ist der, wo man hat

$$(n+1)\tfrac{1}{2}A = \pm(m+\tfrac{1}{2})\pi \text{ oder } (n+1)\,.\,\varDelta\,\text{Sin.}\,\beta\,\text{Sin.}\,\psi = \pm(m+\tfrac{1}{2})\lambda.$$

Für diesen Fall wird der Zähler von B^2 gleich der Einheit und man hat

$$B^2 = \frac{1}{(n+1)^2 \operatorname{Sin.}^2 \frac{(m+\frac{1}{2})\pi}{n+1}},$$

also auch

$$I = a^2 . \frac{1}{(n+1)^2 \operatorname{Sin.}^2 \frac{(m+\frac{1}{2})\pi}{n+1}}.$$

Dieser Fall tritt also ein, so oft der $(n+1)$fache Gangunterschied zweier nächsten Wellen gleich $\pm(2m+1)\frac{1}{2}\lambda$ oder gleich einer ungeraden Anzahl von halben Wellenlängen ist. Da hier der Zähler des Bruches B^2 gleich der Einheit wird oder seinen gröfstmöglichen Werth erhält, so sind auch diese Werthe von B^2 als Maxima ihrer Art zu betrachten. Wir wollen sie *Maxima der zweiten Classe* nennen. Sie finden statt, wenn man hat

für 2 Oeffnungen $\pm\frac{1}{2}A = (\frac{1}{4}\pi) = (\frac{3}{4}\pi) = (\frac{5}{4}\pi) = (\frac{7}{4}\pi)$ . .
— 3 — — $\pm\frac{1}{2}A = (\frac{1}{6}\pi) = (\frac{3}{6}\pi) = (\frac{5}{6}\pi) = (\frac{7}{6}\pi) = \frac{9}{6}\pi$ . . .
— 4 — — $\pm\frac{1}{2}A = (\frac{1}{8}\pi) = (\frac{3}{8}\pi) = (\frac{5}{8}\pi) = (\frac{7}{8}\pi)$ . . .

doch müssen, wie die angeführten Figuren zeigen, diejenigen Fälle auf die Benennung eines Maximums (im bekannten geometrischen Sinne des Worts) verzichten, die einem Maximum der ersten Classe unmittelbar vorausgehn oder folgen und die deshalb oben mit Klammern eingeschlossen sind. Bei zwei Oeffnungen sieht man also keine Maxima der zweiten Classe; bei drei Oeffnungen aber ist ein, bei vier Oeffnungen sind zwei, bei fünf Oeffnungen sind drei solche eigentliche Maxima der zweiten Classe u. s. w. Auch bemerkt man, dafs die Maxima oder die Lichtberge der ersten Classe ihre Stelle nicht ändern, wenn auch die Anzahl der Oeffnungen zunimmt, eine Unveränderlichkeit, die bei den Maximis der zweiten Classe nicht statt hat; ferner, dafs die Maxima der ersten Classe doppelt so breit sind, als die der zweiten Classe, und dafs diese Breiten mit der Anzahl der Oeffnungen im geraden Verhältnifs abnehmen. Ist nämlich D die Distanz zweier nächsten Lichtberge der ersten Classe, so ist die Breite eines Maximums der zweiten Classe gleich $\frac{2D}{n+1}$. Bei 100 Oeffnungen ist diese Breite gleich dem 50sten, bei 1000 Oeffnungen gleich dem 500sten Theile des

Zwischenraums, der zwei nächstliegende Lichtberge der ersten Classe von einander trennt.

V. Die Höhe der Lichtberge der zweiten Classe ist

$$I = a^2 . \frac{1}{\text{Sin.}^2 \frac{(m+\frac{1}{2})\pi}{n+1}} .$$

Der kleinste Werth dieses Ausdrucks ist aber $I = a^2$, und er gehört bei einer ungeraden Anzahl von Oeffnungen immer dem mittelsten Lichtberge zu, wie man in der 4ten und 6ten Curve der Figur sieht. Die Intensität dieses Lichtbergs der zweiten Classe ist daher gleich a^2 oder gleich der durch eine einzige Oeffnung an diesem Orte erzeugten Lichtmasse.

44) Anwendung des Vorhergehenden auf zwei und mehr parallelogrammartige Oeffnungen.

Um die Zeichnung eines durch zwei solche Oeffnungen entstehenden Bildes zu entwerfen, wird man zuerst das Bild, welches von einer einzigen Oeffnung dieser Art entsteht, auf der Tafel darstellen. Man wird nämlich durch einen willkürlichen Punct 0 der Tafel (den Centralpunct des künftigen Bildes) die beiden Hauptaxen XX und YY senkrecht auf die beiden Seiten AB = CD und AC = BD der Oeffnung ziehn. Auf diesen Axen wird man dann, wie oben (§. 40.), die Seiten AB und AC des Parallelogramms wiederholt auftragen und durch die Endpuncte derselben mit jenen Hauptaxen parallele Linien ziehn. Nachdem so die Grundzüge des Bildes einer einzigen Oeffnung entworfen sind, zieht man, parallel mit der Linie AA′, welche zwei homologe Ecken der beiden parallelogrammartigen Oeffnungen verbindet, durch den Centralpunct die Gerade EE. Auf dieser Linie EE trägt man dann von dem Centralpuncte 0 aus die Gröfsen $\frac{\lambda}{\Delta} = \text{Sin.}\beta \text{ Sin.}\psi$ (die nach §. 43. II. zu den Maximis der ersten Classe gehören) nach und nach auf, wie man in der Figur bei den mit 1, 2, 3 . . . bemerkten Puncten sieht. Die Distanzen 0.1 = 1.2 = 2.3 . . . werden gleich genommen der Grundlinie eines Parallelogramms, welches die Distanz AA′ = Δ zur Höhe hat und der Oeffnung ABCD an Fläche gleich ist.

Fig. 210.

Durch diese Theilpuncte 1, 2, 3 .. der Linie EE errichte man senkrechte Linien auf EE, so bezeichnen dann diese Senkrechten die Orte, welche den gröfsten Maximis von B^2 zugehören und in welchen folglich das durch die zweifache Oeffnung verstärkte Licht mit seiner ganzen ungeschwächten Intensität sichtbar ist. Da nun nach §. 43. IV. bei zwei Oeffnungen die Minima der ersten Classe in die Mitte zwischen den Maximis der ersten Classe fallen, so darf man nur durch die Puncte $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ .. der Linie EE andere Senkrechte auf EE ziehn, um auch alle diejenigen Orte zu erhalten, wo das Licht ganz zerstört wird, und die daher gänzlich finster bleiben.

I. Ganz ebenso wird man auch verfahren, wenn drei parallelogrammartige Oeffnungen in dem Schirm angebracht sind, nur mit dem Unterschiede, dafs man auf der Linie EE die Zwischenräume 0.1, 1.2, 2.3 .. nicht in zwei, sondern in drei gleiche Theile theilt. Die Senkrechten durch die Puncte 0, 1, 2, 3 .. gehören dann wieder für die Maxima der ersten Classe; die durch die Zwischenpuncte errichteten Senkrechten aber gehören für die Minima der ersten Classe, welche letzte als finstere Strafsen die erstgenannten lichten Stellen durchschneiden und zwischen sich die nur halb so breiten und viel schwächeren Maxima der zweiten Classe einschliefsen. Bei vier solchen Oeffnungen theilt man die Linien 0.1 und 1.2 und 1.3 .. in vier gleiche Theile, wo dann immer zwischen den Bildern der ersten Classe zwei schmale Bilder der zweiten Classe erscheinen u. s. w. In der folgenden Figur sieht man den Grundrifs des Lichtbildes für zwei quadratförmige Oeffnungen, die sich in ihren Ecken berühren, und so fort für andere Gestalten und Lagen der viereckigen Oeffnungen, die man sich nach dem Vorhergehenden leicht construiren wird.

Fig. 211.

Fig. 212.

II. Setzt man in dem Ausdrucke

$$\gamma I = ab \frac{\text{Sin.}\left(\frac{a\pi}{\lambda}\text{Sin.}\psi\right)}{\frac{a\pi}{\lambda}\text{Sin.}\psi} \cdot \frac{\text{Sin.}\left(\frac{b\pi}{\lambda}\text{Sin.}\psi'\right)}{\frac{b\pi}{\lambda}\text{Sin.}\psi'},$$

den wir in §. 40. für die Intensität bei einer einzigen Oeffnung von der Form eines Rechtecks erhalten haben, der Kürze wegen $ab = 1$ und überdiefs

$$\tfrac{1}{2}p = \frac{a\pi}{\lambda}\,\text{Sin.}\psi \text{ und } \tfrac{1}{2}p' = \frac{b\pi}{\lambda}\,\text{Sin.}\psi',$$

so erhält man, wenn man diesen Ausdruck

$$\frac{\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}p}{\tfrac{1}{2}p} \cdot \frac{\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}p'}{\tfrac{1}{2}p'}$$

statt des Werthes von a in der Gleichung §. 43.

$$I = a^2 . \frac{\text{Sin.}^2 (n+1)\frac{A}{2}}{\text{Sin.}^2 \frac{A}{2}}$$

für die Intensität bei $(n+1)$ Rechtecken substituirt, für diese letzte Intensität den Ausdruck

$$I = \left(\frac{\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}p}{\tfrac{1}{2}p}\right)^2 . \left(\frac{\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}p'}{\tfrac{1}{2}p'}\right)^2 . \left(\frac{\text{Sin.}\,(n+1)\frac{A}{2}}{\text{Sin.}\,\frac{A}{2}}\right)^2$$

und in dieser Gleichung ist die Intensität für alle die Fälle enthalten, die wir bisher (in §. 44.) betrachtet haben. Setzt man in ihm $b = 2a$ und die Anzahl der Vierecke $n+1 = 2$, so erhält man den Fall der Figur 210. Ebenso giebt $b = 2a$ und $n+1 = 3$ den Fall der Figur 211. und $b = a$, $\Delta = a\sqrt{2}$ und $n+1 = 2$ den Fall der Figur 212. u. s. w.

45) Anwendung des Vorhergehenden auf zwei und mehr dreieckige Oeffnungen.

Nachdem wir in dem Vorhergehenden die Bilder, welche durch viereckige Oeffnungen entstehn, umständlich betrachtet haben, werden wir uns bei den Oeffnungen von andern Gestalten, um Wiederholungen zu vermeiden, kürzer fassen können. Um die Erscheinungen für mehrere dreieckige Oeffnungen zu entwerfen, wird man zuerst den oben (§. 41.) erwähnten sechsstrahligen Stern mit seinen dunklen Stellen zeichnen, indem man, wie a. a. O. gesagt wurde, die drei Hauptaxen XX, YY und ZZ auf den drei Seiten des Dreiecks senkrecht errichtet, dann auf diesen Axen die Seiten des Dreiecks selbst aufträgt, und durch die Endpuncte gerade Linien zieht, die mit den Hauptaxen parallel sind, wo dann

Fig. 207.

diejenigen Durchschnittspuncte dieser Parallelen, die nicht auf den Hauptaxen liegen, die dunklen Stellen des Bildes bezeichnen. Dieses vorausgesetzt zieht man durch den Centralpunct des Grundrisses die Linie EE parallel mit der Geraden A A′ A″, welche die homologen Spitzen der Dreiecke verbindet, und trägt auf EE wiederholt die Basis eines Dreiecks auf, dessen Höhe $AA' = A'A'' = \Delta$ und dessen Fläche der Fläche eines der gegebenen Dreiecke gleich ist. Diese Theilstriche, die in der Figur durch 01; 12; 23 . . bezeichnet sind, theilt man wieder bei zwei Dreiecken in 2, bei drei Dreiecken in 3 gleiche Theile u. s. w. und errichtet in allen diesen Puncten gerade Linien senkrecht auf EE, wo dann diejenigen dieser Senkrechten, welche durch die Puncte 1; 2; 3... gehn, den gröſsten Maximis oder den Mitten der Maxima der ersten Classe entsprechen, während die Minima der ersten Classe als finstere Straſsen den Stern durchschneiden. Die Figur giebt, nach SCHWERD's schon mehrmals angeführtem Werke, aus welchem diese graphischen Darstellungen genommen sind, das Lichtbild für zwei gleichseitige Dreiecke, die mit ihren Grundlinien auf derselben Geraden A A′ stehn.

Fig. 213.

Fig. 214.

46) Erscheinungen durch rechtwinklige Drahtgitter.

Bei einem rechtwinkligen Drahtgitter ist der allgemeine Ausdruck für die Intensität nach der letzten Gleichung des §. 44.

$$I = \left(\frac{(n+1)\,\mathrm{Sin.}\,a\,\Theta}{a\,\Theta}\right)^2 \cdot \left(\frac{\mathrm{Sin.}\,(n+1)\,\Delta\,\Theta}{(n+1)\,\Delta\,\Theta}\right)^2,$$

wenn a die Breite jeder Oeffnung des Gitters und Δ die Entfernung der Mitten jeder zwei nächsten Oeffnungen bezeichnet und wenn man der Kürze wegen

$$\Theta = \frac{\pi}{\lambda}\,\mathrm{Sin.}\,\psi$$

setzt. In diesem Ausdrucke von I stellt der erste Factor

$$\left(\frac{(n+1)\,\mathrm{Sin.}\,a\,\Theta}{a\,\Theta}\right)^2$$

die durch die Anzahl der Oeffnungen verstärkten Lichtberge dar, welche durch eine einzige dieser Oeffnungen hervorge-

bracht seyn würden. Die folgende Tafel giebt die numerischen Werthe von I für 2, 3 und 4 Oeffnungen des Gitters und zwar für drei Verhältnisse der Gröſsen a und Δ, nämlich für

$$a = \tfrac{1}{2}\Delta; \quad a = \tfrac{1}{3}\Delta \text{ und } a = \tfrac{2}{3}\Delta,$$

Fig. 215. bis 217.

und diese Werthe von I sind in den Zeichnungen graphisch dargestellt. Die erste dieser Figuren giebt die Intensität für ein rechtwinkliges Stabgitter von 1, 2, 3 und 4 Oeffnungen und für $a = \frac{1}{2}\Delta$, die zweite giebt dasselbe für $a = \frac{1}{3}\Delta$, und ebenso die dritte für $a = \frac{2}{3}\Delta$. Die Orte, wo I völlig verschwindet oder wo gänzliche Finsterniſs herrscht, findet man in der ersten dieser drei Figuren

$$\text{für } \pm\Delta\Theta = 2m\pi \text{ oder für } \pm a\Theta = m\pi,$$

wo m die natürlichen Zahlen 1; 2; 3.. bezeichnet, also in den in der Figur mit ± 2; ± 4; ± 6; ± 8.. bezeichneten Puncten. In der zweiten Figur gehören diese finstern Puncte zu ± 3; ± 6; ± 9 . . ., wo

$$\pm\Delta\Theta = 3\pi;\ 6\pi;\ 9\pi\ \ldots..$$

oder

$$\pm a\Theta = \pi;\ 2\pi;\ 3\pi\ \ldots.. \text{ ist.}$$

In der dritten Figur endlich findet man diesen Punct bei

$$\pm\tfrac{3}{2};\ \pm\tfrac{6}{2};\ \pm\tfrac{9}{2};\ \pm\tfrac{12}{2}\ \ldots, \text{ wo}$$
$$\pm\Delta\Theta = \tfrac{3}{2}\pi;\ \tfrac{6}{2}\pi;\ \tfrac{9}{2}\pi\ \ldots$$

oder

$$\pm a\Theta = \pi;\ 2\pi;\ 3\pi\ \ldots$$

ist. Diejenigen Stellen, in welchen der zweite Factor von I oder die Gröſse

$$\left(\frac{\text{Sin.}(n+1)\Delta\Theta}{(n+1)\Delta\Theta}\right)^2$$

seinen gröſsten Werth erreicht und gleich der Einheit wird, gehören in allen drei Figuren zu denselben Puncten, nämlich zu 0; ± 1; ± 2; ± 3 u. s. w., für welche man nämlich hat

$$\pm\Delta\Theta = 0;\ \pi;\ 2\pi,\ 3\pi;\ 4\pi\ \ldots$$

In allen übrigen Stellen werden die verstärkten Lichtberge des ersten Factors entweder vermindert oder auch ganz zerstört. Ganz zerstört werden sie in denjenigen Stellen, welche den

Minimis des zweiten Factors entsprechen, und diese Stellen befinden sich

bei zwei Oeffnungen in den Puncten $\pm(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; \frac{7}{2}..)$
— drei — — — — — $\pm(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{5}{3}..)$
— vier — — — — — $\pm(\frac{1}{4}; \frac{2}{4}; \frac{3}{4}; \frac{5}{4}..)$

Fällt endlich ein Maximum der ersten Classe mit einem absoluten Minimum zusammen, so entstehn an dessen Stelle auf beiden Seiten kleine Lichthügel, wie in den ersten jener drei Figuren in $\pm(2; 4; 6; 8 ..)$ und in den beiden letzten Figuren in $\pm(3; 6; 9 ...)$.

Hier folgt die oben erwähnte Tafel für die rechtwinkligen Stabgitter mit 2; 3 und 4 Oeffnungen mit dem Argumente

$$2\Delta\Theta = \frac{2\pi\Delta}{\lambda} \text{Sin.}\,\psi.$$

Für zwei Oeffnungen

$2\Delta\Theta$	$a=\frac{1}{2}\Delta$	$a=\frac{1}{3}\Delta$	$a=\frac{2}{3}\Delta$
0°	4,00	4,00	4,00
45	3,37	3,39	3,34
90	1,90	1,95	1,82
135	0,52	0,56	0,47
$180=\pi$	0,00	0,00	0,00
225	0,42	0,51	0,32
270	1,23	1,62	0,81
315	1,74	2,56	0,95
$360=2\pi$	1,62	2,74	0,68
450	0,44	1,09	0,07
540	0,00	0,00	0,00
630	0,04	0,55	0,04
720	0,00	0,68	0,16
810	0,02	0,17	0,09
900	0,00	0,00	0,00
990	0,09	0,02	0,01
1080	0,18	0,00	0,00
1170	0,06	0,01	0,01
1260	0,00	0,00	0,00

Für drei Oeffnungen

$2\Delta\Theta$	$a=\frac{1}{2}\Delta$	$a=\frac{1}{3}\Delta$	$a=\frac{2}{3}\Delta$
0°	9,00	9,00	9,00
30	7,42	7,44	7,39
60	3,91	3,96	3,84
90	0,95	0,98	0,91
120	0,00	0,00	0,00
150	0,46	0,50	0,41
180	0,90	0,91	0,68
210	0,40	0,47	0,32
240	0,00	0,00	0,00
270	0,61	0,81	0,40
300	2,18	3,08	1,27
330	3,54	5,43	1,79
360	3,65	6,16	1,54
420	1,11	2,37	0,28
480	0,00	0,00	0,00
540	0,09	0,40	0,00
600	0,00	0,00	0,00
660	0,03	0,96	0,11
720	0,00	1,54	0,38

Für vier Oeffnungen

$2\Delta\Theta$	$a=\frac{1}{2}\Delta$	$a=\frac{1}{3}\Delta$	$a=\frac{2}{3}\Delta$
0°	16,00	16,00	16,00
45	6,74	6,79	6,67
90	0,00	0,00	0,00
135	1,04	1,11	0,95
180	0,00	0,00	0,00
225	0,84	1,01	0,64
270	0,00	0,00	0,00
315	3,48	5,12	1,19
360	6,48	10,94	2,74
450	0,00	0,00	0,00
495	0,17	0,55	0,01
585	0,06	0,40	0,01
675	0,03	1,51	0,22
765	0,02	0,86	0,32
855	0,03	0,07	0,04
945	0,05	0,02	0,02
1035	0,32	0,01	0,01
1080	0,72	0,00	0,00

I. Es ist bereits oben (§. 42. V.) gesagt worden, dafs das durch eine kleine kreisförmige Oeffnung gehende Licht ein Bild geben mufs, welches aus concentrischen Ringen besteht. Hier mag es genügen zu bemerken, dafs zwei kleine kreisförmige Oeffnungen des Schirms, deren Durchmesser der Distanz ihrer Mittelpuncte gleich ist, und drei kreisförmige Oeffnungen, deren Mittelpuncte um zwei Durchmesser der Kreise von einander abstehn, Bilder erzeugen, die aus concentrischen Kreisen mit parallelen verticalen Linien bestehn, wie die Zeichnung diefs für drei Oeffnungen darstellt. Fig. 218.

47) Erscheinungen durch mehrere analoge Reihen von unter sich ähnlichen Oeffnungen.

Wir haben oben (§. 43.) für eine Reihe von $n+1$ ähnlichen Oeffnungen den Ausdruck erhalten

$$I = [(n+1)\, a]^2 . \left[\frac{\text{Sin.}\,(n+1)\,\frac{A}{2}}{(n+1)\,\text{Sin.}\,\frac{A}{2}}\right]^2,$$

wo der Factor a^2 die Intensität des durch jede einzelne dieser Oeffnungen erhaltenen Bildes bezeichnet und wo $A = 2\pi\Delta\,\text{Sin.}\,\beta\;\text{Sin.}\,\psi$ ist. Ist nun $m+1$ die Anzahl solcher unter sich ähnlichen und ähnlichliegenden Reihen oder Gruppen von Oeffnungen, so hat man, ohne umständliche Rechnungen, schon durch einfache Analogie für alle diese Reihen den Ausdruck

$$I = [(n+1)(m+1)\, a]^2 . \left(\frac{\text{Sin.}\,(n+1)\,\frac{A}{2}}{(n+1)\,\text{Sin.}\,\frac{A}{2}}\right)^2 . \left(\frac{\text{Sin.}\,(m+1)\,\frac{A'}{2}}{(m+1)\,\text{Sin.}\,\frac{A'}{2}}\right)^2,$$

wo $A' = 2\pi\Delta'\,\text{Sin.}\,\beta'\;\text{Sin.}\,\psi$ ist und wo Δ' und β' in Beziehung auf die Reihen oder Gruppen dieselbe Bedeutung haben, wie Δ und β in Beziehung auf eine Reihe von einzelnen Oeffnungen hatte. Es ist leicht, sich mit Hülfe dieses Ausdrucks von allen hierher gehörenden Erscheinungen Rechenschaft zu geben, besonders wenn man sich dieselben zuerst durch eine angemessene Beobachtung rein dargestellt hat. So haben wir

z. B. oben (§. 44. I.) gesehn, dafs zwei Quadrate, die sich in ihren Ecken berühren, die dort mitgetheilte Figur geben. Kommt aber noch ein ähnliches Quadratpaar hinzu, so wird dadurch eine Figur erzeugt, in welcher jenes erste Bild noch einmal in der Richtung EE von dunklen Strafsen durchschnitten erscheint. Sollte jede der beiden Reihen ab und a′b′ mehr als zwei Quadrate enthalten, so erscheinen auch zwischen den dunklen Strafsen innere Spectra. Sind sehr viele Quadrate in jeder Reihe vorhanden, so concentriren sich diese Spectra in glänzende Lichtpuncte, die ganz nahe an einander stehn.

Fig. 212. Fig. 219.

I. Eines der schönsten und interessantesten der hierher gehörenden Bilder fand Schwerd, indem er eine Reihe feiner geradliniger Stäbe unter sich parallel in einen Rahmen befestigte und dieselben mit einem ähnlichen zweiten Rahmen bedeckte, so dafs die Stäbe des einen Rahmens mit denen des zweiten irgend einen constanten Winkel bildeten. Sind die Oeffnungen zwischen den Stäben ganz ebenso breit, als die Stäbe selbst dick sind, und bedeckt man in dem durch die erwähnte Superposition der beiden Rahmen entstehenden Gitter alle Oeffnungen bis auf vier, so entstehn beim rechtwinkligen Durchkreuzen der Stäbe sechzehn quadratförmige Oeffnungen und man erblickt auf der Tafel hinter dem Schirm oder besser noch unmittelbar mit dem Fernrohr die schöne Figur. Da bei solchen rechtwinkligen Kreuzgittern die Richtung der Linien (EE) und (FF) der Figur 213 mit den Seiten a und b der viereckigen Oeffnungen zusammenfällt und da auch hier alle Oeffnungen Rechtecke sind, so erhält man bei diesen Kreuzgittern, ganz wie oben (§. 44. II.), die Intensität durch dieselbe Formel, indem man nämlich für einen willkürlichen Punct z die nach §. 44. II. erhaltenen Intensitäten der Rechtecke für die entsprechenden Puncte auf den Hauptlinien XX und YY mit einander multiplicirt, vorausgesetzt, dafs die Intensität in der Mitte 0 des Bildes gleich der Einheit ist. So hat man z. B. für den in der Figur mit (z) bezeichneten Punct, da für ihn die zwei Coordinaten 3 und 7 gehören, nach der Tafel am Ende des §. 39.

Fig. 220.

Coordinate $3 = \frac{3}{2}\pi$.. entsprechende Zahl 0,045

Coordinate $7 = \frac{7}{2}\pi$.. entsprechende Zahl 0,008

und da das Product dieser beiden Zahlen 0,00036 ist, so ist auch die gesuchte Intensität für den Punct (2) gleich 0,00036 oder nahe nur der 2680ste Theil der Intensität des Centralpuncts 0. Ebenso hat man auch für den Punct (x), zu dem die Coordinaten 3 und 3 gehören, die Intensität gleich

$$(0{,}045)\,(0{,}045) = 0{,}002 = \tfrac{1}{500}$$

und so fort für alle andere Puncte. Die Figur zeigt diese Intensitäten oder diese Lichtberge für alle diejenigen Puncte, welche in den beiden Hauptlinien XX und YY auf den mit denselben Zahlen bezeichneten Orten stehn. Dreht man den einen der beiden Rahmen mit seinen parallelen Stäben vor dem andern so, dafs sich die Stäbe nicht mehr unter einem rechten, sondern unter irgend einem schiefen Winkel durchschneiden, so nimmt auch das Bild eine verschobene Gestalt an, ohne dafs sich jedoch das Verhältnifs der Intensitäten der verschiedenen Theile des Ganzen ändert. Macht man die Anzahl der Oeffnungen gröfser, so wird dadurch blofs die Anzahl der innern Spectra vermehrt. Bei einer sehr grofsen Anzahl von Oeffnungen aber werden alle diese inneren Spectra unbemerkbar. Fig. 221.

II. Der allgemeine Ausdruck der Intensität des Lichts für mehrere Reihen von parallelogrammartigen Oeffnungen ist nach §. 44. II., wenn wieder $n+1$ die Anzahl der Oeffnungen jeder Reihe und $m+1$ die Anzahl der Reihen bezeichnet,

$$I = (n+1)^2 (m+1)^2 . \left(\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}p}{\frac{1}{2}p} . \frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}p'}{\frac{1}{2}p'} \right)^2 . \left(\frac{\text{Sin.}(n+1)\frac{A}{2}}{(n+1)\text{Sin.}\frac{A}{2}} . \frac{\text{Sin.}(m+1)\frac{A'}{2}}{(m+1)\text{Sin.}\frac{A'}{2}} \right)^2,$$

wo wieder

$$p = \frac{a\pi}{\lambda}\,\text{Sin.}\psi, \qquad A = \frac{2\pi}{\lambda}\,\Delta\,\text{Sin.}\psi,$$

$$p' = \frac{b\pi}{\lambda}\,\text{Sin.}\psi, \qquad A' = \frac{2\pi}{\lambda}\,\Delta'\,\text{Sin.}\psi.$$

Für die Figur 219. zum Beispiel hat man $a = b$; $A = A' = a\sqrt{2}$; $n+1 = m+1 = 2$. Besteht die Oeffnung aus vier solchen Quadraten, wie die Zeichnung darstellt, deren Mittel- Fig. 222.

puncte unter sich dieselbe Entfernung haben, deren Seiten aber nur halb so groſs sind als in Figur 219, so hat man $a = b$; $A = A' = 2a\sqrt{2}$; $n + 1 = m + 1 = 2$.

III. Weitere Betrachtungen über mehr zusammengesetzte Oeffnungen findet man in Schwerd's mehrerwähntem Werke S. 106 u. ff. Hier wollen wir nur noch bemerken, daſs alles Vorhergehende sich bloſs auf homogenes Licht von einer einzigen Farbe bezieht. Ist aber das durch die Oeffnung des Schirms dringende Licht nicht homogen, so erzeugt jede einzelne Farbe ihr eigenes Bild, und alle diese Bilder einer jeden Farbe sind denen der übrigen Farben ähnlich und ähnlichliegend. Aber die rothen Bilder sind unter allen die gröſsten, da sie den gröſsten Wellenlängen (§. 17.) angehören, während die violetten Bilder die kleinsten sind; die übrigen farbigen Bilder liegen zwischen diesen beiden eingereiht. Vereinigt daher der leuchtende Punct, der sein Licht durch die Oeffnung schickt, alle Farben des Sonnenlichts, so gehn auch die erwähnten Bilder stetig in einander und vermischen sich an ihren Grenzen. Wenn bei dieser Vermischung der Wellen verschiedenartigen Lichtes eine Interferenz eintritt, so entstehn dunkle Stellen, und diese finstern Stellen im farbigen Lichtbilde sind es, die Wollaston und Fraunhofer zuerst beobachteten und durch die man auf so viele schöne Entdekkungen über die Diffraction des Lichts geführt worden ist. Fraunhofer gebraucht zu den Beobachtungen dieser dunklen Stellen eine feine Lichtlinie als Object, die er durch ein mit einem Theodoliten versehenen Fernrohr betrachtete, wo dann diese Stellen als dunkle Fäden von verschiedener Breite erschienen, deren Dicke und Abstände von einander sich genau messen lieſsen. Da dieser Gegenstand schon oben[1] umständlich erwähnt worden ist, so wird es unnöthig seyn, sich hier weiter dabei aufzuhalten, um so mehr, da uns noch ein anderer wichtiger Theil der Undulationstheorie zu erläutern übrig ist, nämlich der von der *Wellenbewegung des polarisirten Lichts*, auf welche wir bisher noch keine Rücksicht genommen haben und die doch oben[2] für den gegenwärtigen Artikel ausdrücklich vorbehalten wurde. Wir

1 S. Art. *Inflexion*. Bd. V. S. 729.

2 S. Art. *Polarisation*. Bd. VII. S. 746.

wollen uns in dem nun Folgenden, wenigstens in dem rein analytischen Theile desselben, vorzüglich an die Darstellung halten, die Airy in seiner oben angeführten Schrift gegeben hat, da dieser neue und wichtige Gegenstand, der seine vollkommene Entwickelung erst von der Zukunft erwartet, von ihm mit vorzüglicher Einsicht und Klarheit, in seinen Hauptmomenten wenigstens, zusammengefaſst worden ist.

F. Anwendung der Undulationstheorie auf polarisirtes Licht.

48) Erklärungen.

In allem Vorhergehenden wurde, wie man bemerkt haben wird, von jeder bestimmten Richtung, in welcher die Elemente des Aethers als Lichtträger bei ihrer wellenartigen Bewegung im Raume fortschreiten mögen, abstrahirt. Diese Elemente mögen, wie die der Luft bei den Schallwellen, in derselben Richtung vibriren, in welcher die Welle selbst fortgeht, oder sie mögen, wie wir dieses bei den Wasserwellen bemerken, in einer auf die fortschreitende Bewegung der Welle senkrechten Richtung vibriren, so daſs sie doch alle in einer Ebene bleiben, die durch diese Richtung der Welle geht. Der einen, wie der andern, ja selbst jeder weitern Hypothese über die Richtung der Vibration der Aethertheilchen lassen sich die bisher erhaltenen Ausdrücke ohne Schwierigkeit anpassen, wenn man nur, wie wir gethan haben, voraussetzt, daſs diese Aethertheilchen dem allgemeinen Gesetze der Undulation unterworfen sind und daſs für eine beträchtliche Anzahl von Vibrationen die Dauer und Gröſse der Vibration selbst dieselbe bleibt. Allein die interessanten Phänomene des Lichts, die man erst in den neuern Zeiten näher kennen gelernt hat und die man unter der Benennung der *Polarisation* des Lichts begreift, lassen uns die freie Wahl unter jenen Hypothesen nicht mehr übrig, sondern sie zwingen uns zu der Annahme einer derselben, und lehren uns eben dadurch die wahre Art kennen, auf welche diese den sämmtlichen Erscheinungen des Lichtes zu Grunde liegenden Vibrationen des Aethers vor sich gehn.

Die erste Gelegenheit, die Polarisation des Lichtes kennen

zu lernen, gab der *isländische Spath*, an welchem BARTHOLIN in Kopenhagen die Eigenschaft der doppelten Brechung der Lichtstrahlen entdeckte und den später der berühmte HUYGHENS zuerst in dieser Beziehung wissenschaftlich untersuchte. Erst lange nach ihm fand man, daſs der gröſste Theil der transparenten Krystalle dieselben Eigenschaften mit jenem Spathe besitze. Allein auch diese erweiterte Erfahrung stand beinahe ein ganzes Jahrhundert isolirt und unfruchtbar da, bis endlich MALUS im J. 1808 ähnliche Modificationen des Lichtes auch noch in vielen anderen Fällen entdeckte und dadurch erst den Physikern ein neues, groſses Feld von sehr interessanten Forschungen eröffnete, das vorzüglich von FRESNEL, THOM. YOUNG und Andern bearbeitet wurde.

I. Um zuerst die Erscheinungen, die an jenem Spathe bemerkt werden, in ihrer Einfachheit darzustellen, so sieht man, daſs ein Lichtstrahl (oder ein feiner Strom des gewöhnlichen Sonnenlichts), wenn er durch ein Rhomboeder dieses Krystalls geht, in zwei andere Lichtstrahlen gespalten wird. Man bemerkt dieses, wenn man entweder ein kleines Object durch diesen Spath beobachtet, wo man zwei Bilder dieses Objectes sieht, oder auch, wenn man den Spath hinter eine Glaslinse stellt, auf welches Sonnen- oder Lampenlicht fällt, wo man wieder im Brennpuncte der Linse zwei Lichtbilder wahrnimmt. Eine gerade, durch diese zwei Bilder gezogene Linie liegt immer in der Richtung der kürzeren Diagonale der Rhombusfläche des Krystalls, wobei als bekannt vorausgesetzt wird, daſs man diesen Spath durch Zerklüften oder Zerspalten als ein Rhomboeder darstellen kann und daſs der einfallende Lichtstrahl senkrecht auf einer der sechs Rhombusflächen steht, die das Rhomboeder nach allen Seiten begrenzen. Dieses Rhomboeder, wie es in der Zeichnung dargestellt ist, wird nämlich von sechs Rhomben eingeschlossen. Von den körperlichen Winkeln, welche diese Rhomben in den acht Ecken des Krystalls bilden, sind zwei diagonal gegenüber stehende A und B stumpfe Winkel, von welchen jeder von drei ebenen, stumpfen und gleichen Winkeln eingeschlossen wird. Die diese stumpfen Winkel verbindende Gerade A B wird die *Axe des Krystalls* oder auch die *Axe der doppelten Brechung* genannt. In einer regelmäſsig krystallisirten Masse dieses Kalkspaths kann man jeden Punct dieser Masse als den

Fig. 223.

Scheitel eines solchen Rhomboeders betrachten, wenn nur die Masse durch diesen Punct nach drei Richtungen gehörig gespalten wird. Also kann man auch jede mit der Axe des Rhomboeders parallele Gerade als diese Axe selbst betrachten. Eine Ebene, parallel mit der Axe der Krystalls und senkrecht auf eine der Seiten desselben, durch welche der Lichtstrahl einfällt, wird der *Hauptschnitt des Krystalls* genannt, wie z. B. die Ebene ACBD.

II. Wenn man die zwei in I. erwähnten Strahlen, in welche der einfallende Lichtstrahl durch den Krystall gebrochen wird, näher untersucht, so findet man, daſs der eine derselben dem gewöhnlichen Gesetze der Refraction folgt, während der andere nach einer andern mehr zusammengesetzten Vorschrift fortzugehn scheint. Wir wollen der Kürze wegen jenen, den ordinären, mit O, und diesen, den extraordinären, mit E bezeichnen. Diese beiden gebrochenen Strahlen scheinen auf den ersten Blick weder unter sich noch auch von dem einfallenden Strahle selbst irgend wesentlich verschieden zu seyn, aber sie sind in der That alle drei unter einander von sehr verschiedenen Eigenschaften. Denn betrachtet man einen der beiden gebrochenen Strahlen, z. B. den Strahl O, und stellt man ein zweites Rhomboeder vor diesen Strahl, so sieht man, daſs, wenn man das erste Rhomboeder um sich selbst dreht, der Strahl O durch das zweite Rhomboeder im Allgemeinen in *zwei Strahlen von ungleicher Intensität* getrennt wird, so daſs der eine dieser zwei letzten Strahlen dem gewöhnlichen, der andere aber dem oben erwähnten auſsergewöhnlichen Gesetze der Refraction folgt, daher wir auch hier den ersten durch Oo und den zweiten durch Oe bezeichnen wollen. Ueberdieſs bemerkt man auch, daſs für gewisse Stellungen des ersten (in Drehung begriffenen) Rhomboeders der eine der beiden letztgenannten Strahlen Oo oder Oe gänzlich *verschwindet.* Um die Puncte dieser Verschwindung näher anzugeben, wollen wir Folgendes bemerken. Wenn die beiden Rhomboeder eine *ähnliche Lage* haben (d. h. wenn jede Seite des einen einer Seite des andern parallel ist) und ebenso wenn die beiden Rhomboeder eine *entgegengesetzte Lage* haben (d. h. wenn sich das erste aus der so eben beschriebenen Lage um 180 Grade gedreht hat), so verschwindet Oe und bloſs der Strahl Oo bleibt noch

sichtbar, oder so zeigt das zweite Rhomboeder blofs den gewöhnlichen Strahl Oo. Im Gegentheile aber, wenn das erste Rhomboeder nur um 90° (rechts oder links von der zuerst erwähnten Lage desselben) gedreht wird, so verschwindet Oo und nur Oe bleibt zurück, oder so zeigt das zweite Rhomboeder blofs den aufsergewöhnlichen Strahl Oe. Zwischen diesen beiden Hauptpositionen der beiden Krystalle ist immer derjenige von den beiden Strahlen der intensivste, der bei der nächsten Verschwindung des einen allein zurückbleibt. Betrachtet man aber von den beiden ersten Strahlen O und E den letzten oder den Strahl E, so ändern sich alle die so eben angeführten Erscheinungen. Zwar theilt auch hier der zweite Krystall den Strahl E wieder in zwei andere Strahlen von ungleicher Intensität, wovon wieder der eine den gewöhnlichen und der andere den aufsergewöhnlichen Weg durchläuft und die wir deswegen, wie zuvor, durch Eo und Ee bezeichnen wollen. Aber wenn die beiden Krystalle in ähnlicher oder auch in entgegengesetzter Lage sind, so verschwindet dann der Strahl Eo, während Ee zurückbleibt. Wenn umgekehrt der eine dieser Krystalle um 90 Grade aus seiner Lage vor- oder rückwärts gedreht wird, so verschwindet Ee, während blofs Eo zurückbleibt. Wenn also die beiden Krystalle mit ihren Hauptschnitten parallel sind, so wird der Strahl O des ersten Krystalls durch den zweiten zu Oo, so wie auch E zu Ee wird, und durch beide Krystalle sind dann nur *zwei* Bilder sichtbar. Wenn aber die Hauptschnitte auf einander senkrecht stehn, so wird O zu Oe und E zu Eo, und auch hier sind wieder nur *zwei* Bilder sichtbar. Bei jeder anderen Lage der beiden Hauptschnitte wird O sowohl, als auch E, jeder für sich, in zwei Theile Oo, Oe und Eo, Ee zerlegt und man sieht daher *vier* Bilder, deren Intensität aber nur dann bei allen gleich grofs ist, wenn die Neigung der beiden Hauptschnitte gegen einander genau einen halben rechten Winkel beträgt oder 45° gleich ist. Man sieht daraus, dafs der Lichtstrahl in einem solchen Krystall nebst der doppelten Brechung noch eine andere Modification erleidet, die sich nicht auf seine *Richtung*, sondern auf seine *Seiten* bezieht. Denn die durch die doppelte Brechung von einander getrennten Strahlenbüschel haben offenbar ringsum nicht mehr dieselbe Eigenschaft, weil sie bald die gewöhn-

liche, bald die aufsergewöhnliche Brechung erleiden, jenachdem sie dem Hauptschnitte die eine oder die andere Seite zuwenden; auch liegen die mit derselben Eigenschaft begabten Seiten des Strahls O und E nicht nach derselben Gegend hin, *sondern sie sind unter einem rechten Winkel gegen einander geneigt.*

III. Aus dem in II. Gesagten folgt, dafs jeder von den beiden Strahlen O und E von dem gewöhnlichen Lichte wesentlich verschieden ist, da das gewöhnliche Licht so oft, als es durch einen solchen Krystall geht, immer zwei Strahlen hervorbringt, während das Licht von O, so wie das von E, wenn es durch denselben Krystall geht, bald zwei Strahlen, wie jenes, bald aber auch nur einen einzigen erzeugt. Auch scheinen diese zwei Strahlen O und E unter sich selbst noch wesentlich verschieden zu seyn, da bei gewissen Lagen des zweiten Krystalls der Strahl O nur einen gewöhnlichen Strahl O o, der Strahl E aber einen aufsergewöhnlichen E e erzeugt, und umgekehrt. Diese Strahlen scheinen also unter sich ganz verschiedene Eigenschaften zu haben, die bei der Aenderung der Lage des brechenden Krystalls wechselsweise hervortreten. Indefs läfst sich doch zwischen den Eigenschaften der beiden Strahlen auch eine merkwürdige Relation angeben. Wenn nämlich die beiden Krystalle in ähnlichen Lagen sind, so bringt der Strahl O nur einen gewöhnlichen Strahl hervor; wird aber der erste Krystall um 90° gedreht, so bringt der Strahl E diesen gewöhnlichen Strahl hervor, d. h. wird der Krystall um 90° gedreht, so erhält der Strahl E dieselbe Eigenschaft, welche der Strahl O vor der Drehung hatte. Ebenso bringt, wenn die beiden Krystalle in ähnlichen Lagen stehn, der Strahl E nur den aufsergewöhnlichen Strahl E hervor; dreht man aber den ersten um 90°, so bringt dann der Strahl O diesen aufsergewöhnlichen Strahl hervor, d. h. also, durch die Drehung des Krystalls um 90° erhält der Strahl O dieselben Eigenschaften, die E vor der Drehung hatte.

Das Vorhergehende zeigt deutlich, dafs die zwei Strahlen Eigenschaften *derselben Art* haben in Beziehung auf zwei Ebenen, die durch die Richtung dieser Strahlen gehn und sich zugleich mit dem Krystalle bewegen, und dafs überdiefs diese zwei Ebenen auf einander senkrecht stehn. Wir wollen, um die Ausdrücke abzukürzen, die Ebene, welche durch den Strahl

und durch die kürzere Diagonale der rhomboidischen Fläche geht, die *Hauptebene* des Krystalls nennen, (eine Benennung, der wir weiter unten noch eine allgemeinere Bedeutung werden geben können). Demnach werden wir den vorigen Satz auf folgende Art ausdrücken: *die Eigenschaften des gewöhnlichen Strahls O haben dieselbe Relation zu der Hauptebene, welche die Eigenschaften des aufsergewöhnlichen Strahls E zu einer auf dieser Hauptebene senkrecht stehenden Ebene haben.* Derselbe Satz wird nun gewöhnlich so dargestellt: *der gewöhnliche Strahl wird in der Hauptebene polarisirt und der aufsergewöhnliche wird in der auf der Hauptebene senkrechten Ebene polarisirt.*

IV. Dieses Phänomen der doppelten Brechung findet nicht blofs in dem isländischen Spath (der auch Kalkspath oder Doppelspath genannt wird), sondern in allen durchsichtigen Krystallen statt. In jedem solchen Körper heifst die gerade Linie, längs welcher keine doppelte Brechung erfolgt, die *Axe der doppelten Brechung*, und die durch diese Axe gehende oder doch mit ihr parallele, auf einer Seitenfläche des Krystalls senkrecht stehende Ebene wird, wie dort, der *Hauptschnitt* des Krystalls genannt. Bei dem isländischen Spath ist diese Axe gegen die Seitenflächen des Krystalls sehr stark geneigt, daher auch der Winkel der beiden Strahlen O und E sehr grofs und leicht bemerkbar ist. Bei andern Krystallen, z. B. bei dem Bergkrystall, ist jene Neigung der Axe sehr klein und daher die Doppelbrechung nicht so auffallend. In vielen Krystallen giebt es nur *eine* Axe der doppelten Brechung, wie im isländischen Spath, im Bergkrystall u. s. w. In andern Krystallen, wie im Salpeter, Arragonit, Borax u. s. w., finden sich zwei solche Axen, längs welchen keine doppelte Brechung erfolgt, und der Neigungswinkel dieser beiden Axen gegen einander ist für verschiedene Temperaturen veränderlich. Wo nur eine Axe der doppelten Brechung vorhanden ist, fällt sie stets mit der geometrischen Hauptaxe der Krystallgestalt zusammen. Es giebt überdiefs noch einige andere Krystalle, die auch das Sonnenlicht in die zwei Strahlen O und E auflösen, aber dabei einen dieser beiden Strahlen gänzlich absorbiren. Einige Gattungen von Achat z. B. oder Turmalinplatten, die mit ihrer Axe parallel gespalten sind, lassen den gewöhnlichen Strahl O frei durch, während sie den aufser-

gewöhnlichen E ganz unterdrücken oder unsichtbar machen. Allein dieses geschieht nur, wenn diese Platten eine bestimmte Dicke haben; sind sie aber sehr dünn, so sieht man immer noch beide Strahlen, und zwar nahe von derselben Intensität.

V. Die jetzt gewöhnliche Art, polarisirtes Licht zu erhalten, ist die durch Reflexion des Sonnenlichts von unbelegtem Glase (oder einer andern durchsichtigen, festen oder flüssigen Substanz). Die Versuche mit solchen Glasplatten zeigten, daſs, wenn die Tangente des Incidenzwinkels gleich dem Refractionsindex ist, alles von dem Glase reflectirte Licht auf dieselbe Weise polarisirt ist, wie der Strahl O durch das erste oben erwähnte Rhomboeder des isländischen Spaths polarisirt wird, wenn dessen Hauptebene parallel mit der Reflexionsebene des Glases steht. Denn wenn dann das zweite Rhomboeder so gestellt wird, daſs es den reflectirten Strahl aufnimmt, so wird bloſs ein gewöhnlicher Strahl O erzeugt; wenn aber die Lage desselben um 90 Grade geändert wird, so sieht man bloſs den auſsergewöhnlichen Strahl E. Man sagt dann, daſs das *reflectirte Licht in der Reflexionsebene polarisirt ist,* und der Incidenzwinkel, welcher zu dieser Erscheinung gehört, wird der *polarisirende Winkel* genannt. Wir werden weiter unten (§. 55. I.) sehn, daſs dieser *polarisirende* Winkel ω, unter welchem ein Strahl gegen das Einfallsloth auf den Spiegel fallen muſs, damit der von diesem Spiegel reflectirte Strahl *vollständig polarisirt* wird, durch die Gleichung gegeben wird

$$\text{Tang.}\,\omega = \mu,$$

wo (wie in §. 12. X.) μ der Refractionsindex oder

$$\mu = \frac{\text{Sin I}}{\text{Sin. R}}$$

ist. Für diesen polarisirten Winkel ist, wie Brewster zuerst gefunden hat, der reflectirte Strahl senkrecht auf die Richtung des gebrochenen (oder durchgelassenen) Strahls.

Das Vorhergehende gilt von dem *reflectirten* Strahle. Das *durchgelassene* Licht aber besitzt, wie die Versuche zeigen, zum Theil die Eigenschaften des auſsergewöhnlichen Strahls (wenn nämlich die Hauptebene des Krystalls zur Reflexionsebene immer parallel vorausgesetzt wird). Denn wird der

zweite Rhombus in diese Lage gebracht, so erzeugt das durchgelassene Licht zugleich einen gewöhnlichen und einen aufsergewöhnlichen Strahl, nur ist der erste viel schwächer an Licht, als der zweite. Dieses wird so ausgedrückt: das durchgelassene Licht ist *theilweise polarisirt in der auf die Reflexionsfläche senkrechten Ebene.* Werden sehr viele unbelegte Glasplatten über einander gelegt, so erscheint das reflectirte Licht völlig in der Reflexionsebene polarisirt und das durchgelassene Licht ist ebenfalls völlig polarisirt in der zu der Reflexionsfläche senkrechten Ebene. Läfst man also einen Lichtstrahl z. B. aus Luft auf Glas unter dem Winkel von 54° 35′ gegen das Einfallsloth auffallen und betrachtet man den *reflectirten* Antheil durch den isländischen Krystall, so sieht man blofs den Strahl O, wenn der Winkel N des Hauptschnitts mit der Reflexionsebene gleich 0° oder 180° ist, und blofs den Strahl E, wenn N = 90° oder 270° ist. Für jeden andern Werth dieses Winkels sieht man beide Strahlen O und E, die aber nur dann gleiche Intensität haben, wenn N = 45° oder 3, 5, 7 mal 45° ist. Betrachtet man aber den unter demselben Winkel von 54° 35′ durch dickes Glas geleiteten, also *gebrochenen* Antheil des auffallenden Lichtstrahls, so sieht man umgekehrt blofs den Strahl O, wenn N = 90° oder 270°, und blofs den Strahl E, wenn N = 0° oder 180° ist. Auch kann man das schon in einem Doppelspath in zwei Strahlen getheilte Licht auf eine Glasplatte unter dem Winkel von 54° 35′ fallen lassen. Man wird dann sehn, dafs der gewöhnliche Strahl O vollständig reflectirt wird für N = 0° oder 180°, und vollständig durchgelassen (oder absorbirt, wenn nämlich das Glas geschwärzt ist) für N = 90° oder 270°. Der aufsergewöhnliche Strahl E aber wird umgekehrt vollständig durchgelassen (oder absorbirt) für N = 0° oder 180°, und vollständig reflectirt für N = 90° oder 270°. Für jeden andern Werth von N erfolgt eine theilweise Reflexion und eine theilweise Transmission (oder Absorption) der Strahlen. Läfst man den von einer Glastafel unter dem Winkel von 54° 35′ reflectirten, polarisirten Strahl unter demselben Winkel auf eine zweite Glastafel fallen, so wird er vollständig reflectirt, wenn der Winkel der beiden Einfallsebenen gleich 0° oder 180° ist, und vollständig durchgelassen (oder absorbirt), wenn jener Winkel gleich 90° oder 270° ist. In allen andern Lagen wird er zum Theil gebrochen,

zum Theil reflectirt. Das Gegentheil aber findet bei einem durch Brechung polarisirten Strahle statt.

Um diese Phänomene der Polarisation bequem und genau vorzustellen, hat man mehrere Instrumente, von welchen wir hier nur zwei näher angeben wollen. Das erste, von BAUMGARTNER, ist auf folgende Weise construirt. Auf einer horizontalen Tafel AB steht ein ebener Glasspiegel C zwischen zwei Wänden mn, der an der Hinterfläche geschwärzt und gegen den Horizont unter dem Winkel von 35° 25′, also gegen das Zenith unter dem Winkel von 54° 35′, geneigt ist. Dieser Spiegel (eigentlich eine polirte Glasplatte) dient zur Polarisation des Lichts, das von einem gewöhnlichen Planspiegel D in horizontaler Richtung gegen C reflectirt wird. Ueber C befindet sich an einem verticalen Träger E eine Röhre F, die zur Aufnahme solcher Apparate bestimmt ist, die zu den Versuchen dienen. Ein Rahmen G trägt einen geschwärzten Planspiegel und ist zwischen zwei metallenen Armen so angebracht, daſs er um eine horizontale Axe beweglich ist; die Arme selbst sind an einen metallenen Ring befestigt, der sich in die Röhre F einschieben und um eine verticale Axe drehn läſst. Zwischen der Röhre und dem Spiegel C ist ein horizontales durchbrochenes Tischchen H angebracht, das zur Drehung um eine verticale Axe eingerichtet ist. Man stelle den schwarzen Spiegel G in eine zu dem untern Spiegel C parallele Lage und leite z. B. das Licht weiſser Wolken von D auf C. Hier wird das Licht polarisirt und gegen G reflectirt. Im Planspiegel G erblickt man dann die weiſsen Wolken, zum Beweise, daſs bei dieser Stellung der beiden Spiegel, wo die Einfallsebenen zu einander parallel sind, in der That eine Reflexion der polarisirten Strahlen am oberen Spiegel G statt findet. Dreht man dann den Spiegel G in einer horizontalen Richtung, ohne seine Neigung gegen den einfallenden Strahl zu ändern, so erscheint das Bild der Wolken immer dunkler und verschwindet endlich ganz, wenn man um volle 90° gedreht und sonach die obere Einfallsebene senkrecht zur unteren gestellt hat, zum Beweise, daſs das polarisirte Licht, bei senkrechter Lage der Einfalls- oder Reflexionsebenen, *nicht* reflectirt wird. Setzt man die Drehung des oberen Spiegels in derselben Richtung fort, so tritt auch das Wolkenbild wieder hervor, anfangs schwach, aber später immer

Fig. 224.

lebhafter, bis es, nach einer abermaligen Drehung von 90°, die erste gröſste Intensität wieder erhält, indem hier die Einfallsebenen wieder zu einander parallel stehn. Bei fortgesetzter Drehung wird das Bild wieder schwächer und verschwindet ganz am Ende der Drehung von 90°, wo sich das polarisirte Licht neuerdings der Reflexion entzieht, wenn die Reflexionsebenen, wie bei der zweiten Position, auf einander senkrecht stehn. Bringt man an dem untern Ende der Röhre einen Deckel an, der mit einer kleinen, runden Oeffnung zur Durchlassung des polarisirten Lichts versehn ist, so werden während der Drehung des obern Spiegels an dem daselbst gesehenen Bilde der Deckelöffnung dieselben Veränderungen wahrgenommen, wie vorhin an dem Bilde der Wolken.

Man sieht daraus, daſs die Intensität des reflectirten polarisirten Lichts während einer vollen Umdrehung des Spiegels G zweimal ihr Maximum erreicht und zweimal gleich Null wird. Stellt man aber in den Rahmen G (statt des obern Spiegels) mehrere über einander gelegte Glasplatten, so ist wohl der Erfolg derselbe, nur mit dem Unterschiede, daſs das Licht in denjenigen Fällen, wo es sich vorhin der Reflexion entzog, nun ganz durchgelassen wird, so daſs also der Gegenstand, von welchem die Strahlen auf den Spiegel C kommen, im *durchgelassenen* (gebrochenen) Lichte dann am lebhaftesten erscheint, wenn er im *reflectirten* Lichte gar nicht gesehn wird, d. i. wenn die beiden Einfallsebenen in C und G einen rechten Winkel bilden. Uebrigens erlangt auch hier das durchgelassene Licht während einer ganzen Umdrehung der Glasplatten G um den einfallenden Strahl zweimal das Maximum und zweimal das Minimum seiner Intensität. Bringt man G in die Position, wo das polarisirte Licht nicht reflectirt, oder in die, wo es nicht durchgelassen wird, und ändert hierauf die Neigung von G gegen die einfallenden Strahlen, so nimmt sogleich im ersten Falle die Menge des reflectirten, im zweiten Falle die Menge des durchgelassenen Lichtes zu und erreicht wieder ein Maximum, wenn die Gläser G gegen die Strahlen senkrecht stehn. Man nehme den Rahmen G weg und befestige ein dreiseitiges Prisma von isländischem Spath, das durch ein Glasprisma achromatisirt ist, in einen durchlöcherten Deckel, der sich in die obere Oeffnung der Röhre F einschieben läſst, während man an das

untere Ende dieser Röhre einen zweiten, mit einer kleinen Oeffnung versehenen Deckel anbringt. Wenn man dann durch den Spath durchsieht, so wird man die Oeffnung des unteren Deckels nur einfach erblicken, sobald der Hauptschnitt des Krystalls zu der Reflexionsebene in C parallel steht. Man wird aber auch sogleich das zweite Bild dieser Deckelöffnung sehn, wenn man den Spath dreht und dadurch den Parallelismus der Ebene aufhebt. Das neue Bild ist anfangs schwach, nimmt aber bei fortgesetzter Drehung an Intensität immer zu, während das andere immer schwächer wird, bis der Winkel, den die genannten Ebenen bilden, den Werth von 45° erreicht, wo eine Gleichheit der Intensität beider Bilder eintritt. Sowie man diesen Winkel vergröſsert, nimmt die Intensität des ersten oder gewöhnlichen Bildes ab und die des auſsergewöhnlichen zu, bis jenes ganz verschwindet und dieses dafür zu derselben Zeit mit seiner gröſsten Lebhaftigkeit hervortritt; dieses geschieht aber, wenn der Hauptschnitt des Krystalls auf der Reflexionsebene senkrecht steht. Dieselbe Abnahme der Intensität bis zum völligen Verschwinden des einen Bildes und dieselbe Zunahme der Intensität des andern Bildes bis zu dem Maximum derselben beobachtet man, wenn bei fortgesetzter Drehung des Spaths der Hauptschnitt desselben dio andern drei Quadrate durchläuft.

Eine sehr merkwürdige Einwirkung auf das polarisirte Licht beobachtet man am Turmalin. Spaltet man diesen Krystall in Platten von etwa einer halben Linie Dicke, so daſs die Ebene dieser Platte mit der Axe der prismatischen Gestalt dieses Krystalls parallel liegt, so kann man durch diese Platten, wenn sie polirt sind, leuchtende Gegenstände wie durch gefärbte Gläser sehn. Obschon der Turmalin ein doppelt brechender Krystall ist, so wird doch, bei der angegebenen Dicke des Plättchens, der gewöhnliche Lichtstrahl beinahe ganz absorbirt, und man sieht den leuchtenden Gegenstand durch das Plättchen nur einfach; auch bemerkt man, während der Turmalin in seiner eigenen Ebene herumgedreht wird, keine Aenderung in der Lebhaftigkeit des Bildes, wenn anders das senkrecht auffallende Licht kein polarisirtes Licht ist. Bringt man aber statt des isländischen Spaths ein solches Turmalinplättchen in die Oeffnung des obern Deckels bei dem Polarisationsapparate und befestigt man es daselbst der-

gestalt, dafs die von dem Spiegel C kommenden polarisirten Strahlen in senkrechter Richtung darauf fallen, und stellt es durch Drehung so, dafs das Bild der unteren Deckelöffnung am lebhaftesten erscheint, so bemerkt man, dafs das Bild während einer Umdrehung von 90° alle Grade der abnehmenden Helligkeit bis zum beinahe vollständigen Verschwinden durchläuft und dabei während der Drehung im folgenden Quadrate stufenweise bis zum Maximum der Helligkeit zunimmt. Bei der Drehung in den folgenden zwei Quadraten wird dieselbe allmälige, bis zum Verschwinden statt findende Abnahme und hierauf wieder die bis zu ihrem Maximum steigende Zunahme der Lichtstärke bemerkt. Eine genauere Ansicht dieser periodischen Abwechselungen der Intensität des Lichtes belehrt uns, dafs das Maximum der Intensität sich jedesmal dann einstellt, wenn die Axe des Turmalins auf der Reflexionsebene des Strahls (d. h. auf der Polarisationsebene) senkrecht steht, hingegen das Minimum (das Verschwinden des Bildes), wenn diese Axe mit der Reflexionsebene parallel ist.

Dieselbe Eigenschaft, das polarisirte Licht bei gewissen Stellungen nicht durchzulassen, besitzt auch eine Achatplatte, die senkrecht auf die natürlichen Schichten dieses Steins geschnitten ist. Auch an einigen Sapphiren wurde wenigstens ein theilweises Zurückhalten des polarisirten Lichtes beobachtet. Die blauen und grünen Turmaline besitzen die angeführte Eigenschaft nur unvollkommen, am besten eignen sich zu diesen Polarisationsversuchen die rothbraunen Turmaline[1].

Bemerken wir noch zu dem Vorhergehenden, dafs den Erfahrungen gemäfs durch die Reflexion das Licht im strengsten Sinne nie ganz vollkommen polarisirt wird, auch nicht, wenn es unter dem oben erwähnten Polarisationswinkel einfällt. Besonders gilt dieses von metallenen Oberflächen, die das Licht unter keinem Winkel vollständig polarisiren. Denn ein von dünnen Metallplatten reflectirter oder durchgelassener Strahl giebt mittelst des isländischen Spaths (bei jeder Lage des Hauptschnitts gegen die Reflexions- oder Brechungsebene)

---

1 Vergl. Baumgartner's Naturlehre. Wien 1832. S. 371. Kunzek's Lehre von dem Lichte. Lemberg 1836. S. 372.

immer zwei Bilder, und nur aus ihrer ungleichen Intensität erkennt man, daſs das Licht doch nicht völlig unpolarisirt seyn kann. Doch haben auch diese Körper bestimmte Winkel, für welche das Licht am stärksten, und andere, für die es am schwächsten polarisirt ist. Da überhaupt alle durchsichtige und sehr viele undurchsichtige Körper das Licht, wenigstens zum Theil, polarisiren, so kommt auch das meiste uns umgebende Licht schon polarisirt zu uns. Das uns von dem heiteren Himmel oder von Wolken zugesendete, das schief auf unsere Fenstergläser einfallende, das von Mauern, Möbeln u. s. w. reflectirte Licht trägt schon deutliche Spuren der Polarisation.

VI. Aus dem Vorhergehenden folgt zugleich ein leichtes Mittel, zu erkennen, ob ein Licht polarisirt ist oder nicht. Wenn das unter dem polarisirenden Winkel auf unbelegtes Glas einfallende Licht nicht reflectirt wird, so ist es in der zu der Reflexionsebene senkrechten Ebene polarisirt. Dreht man dann die Glasplatte rund um den einfallenden Strahl, ohne dabei die Neigung der Platte gegen den Strahl zu verändern, und verschwindet das reflectirte Licht für irgend eine Lage der Platte nicht, so ist das Licht nicht polarisirt. Ebenso kann man die Polarisation eines Lichtstrahls erkennen, wenn man sieht, daſs, nachdem er auf eine Turmalinplatte gefallen ist, der austretende Strahl verschwindet, wo dann die Polarisationsebene senkrecht auf derjenigen Ebene steht, die durch den Lichtstrahl und durch die Axe des Turmalins geht.

VII. Daraus folgt ferner, wenn zwei Turmalinplatten so gestellt werden, daſs ihre Axen senkrecht zu einander stehn, daſs dann kein Licht durch diese Platten gehn kann; denn das von der ersten Platte durchgelassene Licht wird in der Ebene ihrer Axe polarisirt, d. h. in der zu der Axe der zweiten senkrechten Ebene, also kann es auch nicht durch die zweite Platte gehn. Sowie man aber eine dieser zwei Platten dreht, sieht man auch sofort das Licht wieder erscheinen und auch so lange an Intensität zunehmen, bis die Axen der beiden Turmalinplatten zu einander parallel stehn. Auf gleiche Weise, wenn in dem zweiten der oben erwähnten Polarisationsinstrumente L eine oder auch mehrere parallele Platten unbelegten Glases, und K eine andere solche Glasplatte vorstellt, Fig. 225.

die aber an ihrer Rückseite geschwärzt ist, um der Reflexion zuvorzukommen, und wenn die Platte K an eine Ebene befestigt ist, die sich um eine Spindel O in der Richtung CK drehn läfst, und wenn endlich jede der beiden Glasflächen mit CK einen Winkel von 35° 25′ bildet, so bemerkt man mit dem Vorhergehenden ganz analoge Erscheinungen. Fängt man nämlich das Licht der Wolken oder des freien Himmels mit der Platte C in einer solchen Richtung auf, dafs das reflectirte Licht auf K zurückfällt, und stellt man das Auge so, dafs es das von K reflectirte Licht erhält, so sieht man eine beträchtliche Quantität des von K reflectirten Lichts, so oft die beiden Reflexionsebenen coincidiren oder doch nahe coincidiren; wie aber die Neigung der Reflexionsebene zunimmt, wird weniger Licht von K reflectirt, und wenn, wie in der Zeichnung, die Reflexionsebenen auf einander senkrecht stehn, so wird gar kein Licht mehr reflectirt. Dieses ist aber nur streng richtig für dasjenige Licht, welches von C auf K in der Richtung, die ihre Mittelpuncte vereinigt, einfällt, aber es gilt auch noch sehr nahe für solches Licht, welches einen kleinen Winkel mit jener macht. Auch gilt das Gesagte nur streng für ein bestimmtes farbiges Licht, da der polarisirende Winkel, der von dem Reflexionsindex abhängt, sich mit den verschiedenen Farben ändert, aber es gilt doch immer noch sehr nahe, wenn nur der Refractionswinkel für die mittleren Strahlen des Spectrums gewählt wird. Wir werden in der Folge öfter auf diesen mit dem vorhergehenden im Grunde identischen Apparat zurückkommen und der Kürze wegen C die *polarisirende*, so wie K die *analysirende* Platte nennen.

VIII. Wenn man nun in dem oben (§. 22.) behandelten Problem durch den Weg jeder der beiden von G und H kommenden Strahlen eine Turmalinplatte von durchaus gleicher Dicke legt, so bemerkt man sogleich, dafs die Gröfse und Gestalt, ja selbst die Existenz der dort erwähnten Fransen der Interferenz ganz und gar von der relativen Stellung dieser Turmalinplatten abhängig sind. Sind ihre Axen parallel (welches auch sonst ihre Lage seyn mag), so sind diese Fransen sehr gut sichtbar und die finstern Strafsen zwischen den hellen erscheinen völlig schwarz. Sind sie aber nicht parallel, so erscheinen diese finstern Streifen nur dunkelgrau, und sie hellen sich endlich ganz auf, wenn die Axen der Platten gegen ein-

Fig. 192.

ander senkrecht stehn. Daraus folgt also, dafs solche Lichtstrahlen, die unter rechtwinkligen Ebenen zu einander polarisirt sind, nicht interferiren, d. h. sich nicht gegenseitig aufheben oder zerstören können, und zwar können sie dieses nicht in allen den Fällen, in welchen sich die Strahlen des gemeinen, nicht polarisirten Sonnenlichts, oder auch, in welchen sich die in derselben Ebene polarisirten Lichtstrahlen allerdings aufheben.

IX. Nach allem bisher Gesagten ist klar, dafs man eigentlich zwei verschiedene, einander entgegengesetzte Polarisationszustände annehmen müsse. Unter den Umständen, in welchen der Strahl O in O o übergeht oder von einem Spiegel reflectirt wird, geht der Strahl E in E e über oder wird von einem Spiegel durchgelassen und umgekehrt. Ebenso stehn sich ein durch Reflexion und ein durch Brechung polarisirter Strahl gegenüber. Man nennt daher diese beiden Polarisationszustände *entgegengesetzte* Polarisationen oder Polarisationen unter einem rechten Winkel und sagt: die zwei durch doppelte Brechung in einem Krystalle entstandenen Strahlen (oder der durch Reflexion und der durch Refraction polarisirte Antheil eines Strahls) sind nach *entgegengesetzten Richtungen* oder sie sind unter einem rechten Winkel polarisirt. In den einaxigen Krystallen (IV.) ist der gewöhnlich gebrochene Strahl O in der Ebene des Hauptschnitts und der aufsergewöhnliche Strahl E in einer darauf senkrechten Ebene polarisirt.

Aus allem Vorhergehenden wird man nun folgende allgemeine Schlüsse ziehn.

A. Wenn man vom gewöhnlichen Sonnenlicht durch irgend einen Versuch solches Licht erhält, welches in einer Ebene polarisirt ist, so erhält man durch denselben Versuch immer auch zugleich mehr oder weniger solches Licht, das in der auf jener ersten Ebene senkrecht stehenden Ebene polarisirt ist.

B. Das in einer Ebene polarisirte Licht kann nicht dahin gebracht werden, auch ein in der auf jener senkrecht stehenden Ebene polarisirtes Licht zu geben.

C. Das in einer Ebene polarisirte Licht kann durch ein in der auf jener senkrecht stehenden Ebene polarisirtes Licht nicht aufgehoben oder zerstört werden.

Der erste dieser drei Sätze leitet sofort auf die Voraussetzung, dafs die Polarisation des Lichts keineswegs in einer Modification oder in irgend einer inneren Aenderung des gemeinen Lichts, sondern dafs es in einer Auflösung (Trennung) des gemeinen Lichtstrahls in zwei andere besteht, welche zwei Theile zu zwei unter sich senkrechten Ebenen dieselben Verhältnisse (oder Relationen) haben. Verbindet man diesen Satz mit den beiden andern B und C, so gelangt man zu dem folgenden Theorem, das man als die eigentliche und vollständige Erklärung alles vorhin Gesagten betrachten kann.

Gemeines Sonnen- oder Lampenlicht besteht aus Wellen, in welchen die Vibrationen jedes Elements in Ebenen vor sich gehn, die auf der Fortschreitungsrichtung der ganzen Wellen senkrecht stehn. Die Polarisation des Lichts aber besteht in der Auflösung dieser Vibration der Elements in zwei andere, deren eine parallel zu einer gegebenen, durch die Fortschreitungsrichtung der ganzen Welle gehenden Ebene liegt, während die andere Vibration in einer auf dieser Ebene senkrechten Ebene vor sich geht. Durch diese Auflösung können in besondern Fällen (auf die wir später eigens zurückkommen werden) *neue Wellen entstehn, die in unter sich verschiedenen Richtungen fortschreiten. So oft wir nun im Stande sind, die eine dieser zwei Richtungen von der andern zu trennen und besonders zu betrachten, so sagen wir, dafs das Licht* (in diesen beiden Richtungen) *polarisirt sey. Wenn aber die eine der beiden aufgelösten Vibrationen unverändert bleibt, während die andere auf jener senkrechte in einem bestimmten Verhältnisse abnimmt* oder *sich der Verschwindung nähert, ohne von jener getrennt zu erscheinen, so sagen wir, dafs das Licht nur theilweise polarisirt sey.*

Eine aufmerksame Betrachtung dieses Theorems wird den innigen Zusammenhang aller der vorher erwähnten Erscheinungen vollkommen deutlich machen.

X. In den meisten der hierher gehörenden Untersuchungen erscheint es ganz gleichgültig, ob die das polarisirende Licht bildenden Vibrationen mit der Polarisationsebene parallel oder auf ihr senkrecht vor sich gehn. Allein später zu erörternde und tiefer liegende Gründe, die sich besonders auf

die Natur und die Elementartrennungen der krystallinischen Körper beziehn, bestimmen uns, der zweiten dieser Annahmen den Vorzug zu geben. Wenn wir also in der Folge sagen werden, dafs ein Licht *in einer bestimmten Ebene polarisirt sey*, so wollen wir damit ausdrücken, *dafs die Vibrationen der Elemente dieses Lichts in einer auf dieser Ebene senkrechten Richtung vor sich gehn*. So ist z. B. in derjenigen Wellenbewegung, die den gewöhnlichen Strahl O im isländischen Spath erzeugt, die Vibration jedes Elements senkrecht zu der Hauptebene des Krystalls, und in dem aufsergewöhnlichen Strahle E gehn die Vibrationen aller Elemente in einer zu der Hauptebene parallelen Ebene vor sich. Ebenso wird, wenn Licht auf unbelegtes Glas unter dem polarisirenden Winkel fällt, die reflectirte Welle blofs durch solche Vibrationen gebildet, die senkrecht auf der Einfallsebene stehn; die durchgelassenen Wellen aber enthalten wohl zum Theil auch solche Vibrationen, die auf der Einfallsebene senkrecht stehn, aber dafür einen viel gröfsern Theil von solchen, deren Vibrationen mit der Einfallsebene parallel sind.

XI. Aus dieser Annahme folgt zugleich, dafs es bei dem Lichte keine solche Vibrationen der Elemente einer Welle giebt, die in der Richtung des Fortschritts der Welle statt haben, oder doch, dafs diese, wenn sie ja existiren, unseren Augen nicht sichtbar sind. Denn wenn dieses nicht wäre, so müfsten bei dem in VII. erwähnten Versuche Interferenzfransen sichtbar seyn, während doch keine Spur derselben gefunden werden kann.

XII. Da wir demnach angenommen haben, dafs das Licht im Allgemeinen zwei Gattungen von Vibrationen enthält, die unter sich nicht interferiren können, so ist es vor Allem nothwendig, irgend ein dieser Annahme entsprechendes Mafs für die Intensität des aus jenen beiden Arten zusammengesetzten Lichtes aufzustellen. Man wird aber dazu offenbar am zweckmäfsigsten die Summe der Intensitäten jeder einzelnen dieser zwei Lichtarten wählen. Wenn man also die Vibration der einen Art darstellt durch

$$a \,\mathrm{Sin.}(\alpha t - x + A)$$

und die der andern Art durch

$$b \,\mathrm{Sin.}(\alpha t - x + B),$$

so werden wir die Intensität des aus beiden Arten gemischten Lichts durch die Grőſse

$$a^2 + b^2$$

bezeichnen. Diese Gröſse $a^2 + b^2$ hätten wir demnach auch in allen unsern vorhergehenden Untersuchungen gebrauchen sollen. Da aber bisher die Gröſsen a und b durchaus als unter sich gleich angenommen werden konnten, so lange man sich nur mit gemeinem oder unpolarisirtem Lichte beschäftigte, so bleiben die vorhergehenden Ausdrücke alle in ihrem Rechte, und der hier erwähnte Unterschied hat nur auf dasjenige Einfluſs, was wir in dem nun Folgenden von dem polarisirten Lichte zu sagen haben.

49) Fundamentalgleichung für diejenigen Wellen, deren Vibrationen auf die Richtung ihrer Fortpflanzung schief stehn.

Fig. 226. Es stellen die kleinern Puncte die ursprüngliche Lage der Elemente eines Mediums vor, die unter sich regelmäſsig in Vierecken geordnet seyn mögen, so daſs jede Linie von der nächsten um die Distanz h absteht. Nehmen wir nun an, daſs alle Elemente in jeder verticalen Linie um dieselbe Gröſse in verticaler Richtung verschoben werden, jedoch so, daſs diese Verschiebungen in den verschiedenen verticalen Linien unter sich verschieden seyn sollen. Sey x die horizontale Abscisse der zweiten Reihe, $x - h$ die der ersten, $x + h$ die der dritten, und seyen u, $u_,$ und u' die diesen Reihen in derselben Ordnung entsprechenden Verschiebungen. Dieses vorausgesetzt wird die Bewegung dieser Elemente zuvörderst abhängen von der Ausdehnung, in welcher die Kräfte, welche diese Verschiebungen erzeugen, sich wirksam zeigen. Nehmen wir an, daſs bloſs die sechs nächsten Elemente B, C, D, E, F, G eine noch merkbare Kraft auf das mittlere Element A ausüben können, wobei wir die über und unter A in derselben Linie mit A liegenden Elemente weglassen, da ihre Anziehungen auf A einander gleich und entgegengesetzt sind, sich also auch gegenseitig aufheben. Nehmen wir endlich noch an, daſs diese Kräfte anziehende (nicht abstoſsende) Kräfte sind, die sich wie verkehrt das Quadrat ihrer Entfernungen ver-

halten, und dafs m die Einheit dieser Anziehung bezeichne. Dieses vorausgesetzt wird die ganze auf A wirkende Kraft die folgende seyn:

$$\frac{m(h+u-u_{,})}{[h^2+(h+u-u_{,})^2]^{\frac{3}{2}}}+\frac{m(u-u_{,})}{[h^2+(u-u_{,})^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$-\frac{m(h-u+u_{,})}{[h^2+(h-u+u_{,})^2]^{\frac{3}{2}}}+\frac{m(h+u-u')}{[h^2+(h+u-u')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$+\frac{m(u-u')}{[h^2+(u-u')^2]^{\frac{3}{2}}}-\frac{m(h-u+u')}{[h^2+(h-u+u')^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Entwickelt man diese Ausdrücke in ihrer Wurzelgröfse und vernachlässigt man die zweiten und höheren Potenzen von den ungemein kleinen Gröfsen $u - u_{,}$ und $u - u'$, so erhält man für die Kraft, mit welcher die Gröfse u vermindert wird,

$$\left(1-\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{m}{h^3}\,(2u-u_{,}-u').$$

Setzt man aber für $u_{,}$ und u' nach dem Taylor'schen Lehrsatze die Ausdrücke

$$u_{,}=u-h\,\frac{\partial}{\partial x}+\frac{h^2}{2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\ldots,$$

$$u'=u+h\,\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{h^2}{2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\ldots,$$

so erhält man

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\left(1-\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{m}{h}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

und diese Gleichung hat ganz dieselbe Form, die wir oben (§. 14. Gleich. (B)) für die Fortpflanzung der Schallwellen gefunden haben, so dafs also auch bei den oben vorausgesetzten Vibrationen, die auf der Fortpflanzungsrichtung der Wellen schief stehn, die bereits früher gefundene Fundamentalgleichung der Wellen dieselbe bleibt.

I. Es ist wahrscheinlich, dafs wir bei irgend einer andern Anordnung der Puncte unserer Figur und ebenso bei irgend einem andern Gesetz für die hier wirkenden Kräfte zu

derselben Form jener Fundamentalgleichung gelangen würden. Löst man aber die Verschiebung, die auf diese Weise einem dieser Puncte in irgend einer Richtung zukommt, in drei andere Richtungen nach den rechtwinkligen Coordinaten x, y und z auf, so wird man auch hier wieder, nach dem in §. 13. aufgestellten Princip, die Superposition auch dieser Wellen und ihre ungestörte Coexistenz annehmen und daher ganz das bisher beobachtete Verfahren beibehalten können.

50) Erklärung der Trennung des Lichts in zwei Strahlen durch doppeltbrechende Krystalle.

Nehmen wir eine der in §. 49. aufgestellten Anordnung ähnliche Stellung der Aetherelemente im Innern eines Krystalls an, oder nehmen wir, um die Sache noch allgemeiner darzustellen, wenigstens an, dafs diese Stellung der Art sey, dafs es für jedes Element immer drei unter sich senkrechte Richtungen gebe, in welchen die Resultante der auf dieses Element wirkenden Kräfte es in derselben geraden Linie zu bewegen strebt, in welcher die Verschiebung dieses Elements statt hat. Diese geraden Linien kann man als parallel zu solchen Geraden annehmen, die unmittelbar durch die Form des Krystalls bestimmt werden. Nun wird im Allgemeinen die Verschiebung eines dieser Aetherelemente (oder auch die einer ganzen Reihe solcher Elemente) keine solche Kraft hervorbringen, deren Richtung mit jener der Verschiebung selbst coincidirt. Denn ist z. B. X. die Verschiebung in der Richtung der x und Y die in der Richtung der y, und sind die diesen Verschiebungen entsprechenden Kräfte a^2X und b^2Y, so hat man für die Tangente des Winkels, den die daraus resultirende Kraft mit der Axe der x macht, den Ausdruck $\frac{b^2Y}{a^2X}$. Allein die Tangente des Winkels, den die Richtung der Verschiebung mit der Axe der x bildet, ist offenbar $\frac{Y}{X}$, so dafs also diese beiden Winkel verschieden sind, so lange a und b nicht dieselben Werthe haben. Ebenso, wenn die Verschiebung Z in der Richtung der z die Kraft c^2Z erzeugt, so wird man für die Tangenten der Winkel,

welche die Projection der Resultante in den Ebenen der xz und yz mit der Axe der z macht, die Ausdrücke haben

$$\frac{a^2 X}{c^2 Z} \text{ und } \frac{b^2 Y}{c^2 Z},$$

während die der Projection der Richtung der Verschiebung durch $\frac{X}{Z}$ und durch $\frac{Y}{Z}$ ausgedrückt seyn werden.

I. Nehmen wir nun an, dafs die Puncte aFbc, durch welche die Gerade MN geht, oder dafs diese Elemente a, F, b, c . . des in Vibrationen begriffenen Aethers alle zu *gleicher Zeit in derselben Phase* (§. 1. VIII.) ihrer Vibrationen sich befinden. Denkt man sich dieses durch die Figur dargestellte Aggregat von Elementen (nicht als eine Fläche, sondern) als einen körperlichen Raum von drei Dimensionen, so werden alle diejenigen Elemente, die zugleich in derselben Phase ihrer Vibrationen sind, eine Ebene bilden, deren Projection z. B. auf die coordinirte Ebene der xy durch jene Gerade MN dargestellt wird. Der Kürze wegen wollen wir diese Ebene, deren Projection MN ist, die *Fronte* einer Welle nennen. Da nun alle Elemente, die sich in dieser Fronte befinden, in derselben Phase ihrer Vibration stehn, so haben sie auch alle dieselbe Geschwindigkeit und dieselbe Richtung ihrer Bewegung. Aber die Kraft, welche auf diese Elemente in Folge ihrer mannigfaltigen Verschiebungen wirkt, wird im Allgemeinen nicht in der Ebene dieser Fronte liegen. Man wird daher diese Kraft in zwei andere zerlegen können, von welchen die eine zu dieser Ebene der Fronte parallel und die andere auf dieser Ebene senkrecht ist. Die letzte wird man vernachlässigen können, da sie (nach §. 48. X.), wenn sie auch existirt, dem Auge nicht sichtbar ist, die erste aber, obschon sie in der Ebene der Fronte oder doch ihr parallel ist, wird doch im Allgemeinen nicht in der Richtung der mittlern Verschiebung der Elemente liegen. Es wird also unmöglich seyn, die aus dieser Verschiebung entstehenden Bewegungen zu bestimmen, wenn man dieselbe nicht auch auflöst. Kann man sie nur in zwei solche auflösen, dafs die von jeder einzelnen Verschiebung erzeugte Kraft in der Richtung dieser Verschiebung liegt, so wird man auch für jede einzelne von ihnen die ihr entsprechende Bewegung bestim-

men können. Dadurch sind wir demnach wieder auf den vorigen Schlufs zurückgeführt, dafs es nämlich, bei dieser Art von Trennung des Lichts, zwei Reihen von Wellen geben mufs, die mit verschiedenen Geschwindigkeiten einhergehn.

II. Wir haben aber oben (§. 12.) gefunden, dafs die Refraction des Lichts in einem diaphanen Medium von der Geschwindigkeit des Lichts in diesem Medium abhängig ist. Also wird auch die Refraction der zwei in I. erwähnten Reihen von Wellen verschieden seyn, und dadurch erklärt sich von selbst die Spaltung des Lichtstrahls in zwei andere, wenn er auf der Oberfläche des Krystalls ankommt. Jeder dieser zwei Lichtstrahlen besteht aus Vibrationen, die einer bestimmten Linie parallel sind, d. h. (nach §. 48. VIII.) jeder besteht aus polarisirtem Lichte, und überdiefs sind, wie wir auch in den nächstfolgenden Untersuchungen sehn werden, diese Linien der Vibrationen in beiden Strahlen auf einander senkrecht, so dafs also auch die Polarisationsebenen (die immer senkrecht zu den Vibrationslinien sind) auf einander senkrecht stehn.

51) Gesetz der doppelten Brechung bei einaxigen Krystallen.

Unter einaxigen Krystallen versteht man solche, in welchen $b^2 = a^2$ ist, während c^2 von a^2 verschieden bleibt, diese Zeichen a, b, c in der Bedeutung des §. 50. genommen. Die Aufsuchung des hier in Rede stehenden Gesetzes reducirt sich auf die zwei folgenden Aufgaben: I. die Bestimmung der Richtungen der Verschiebungen in derjenigen Wellenebene, in welcher der aufgelöste Theil der Kraft, der parallel zu der Ebene steht, dieselbe Richtung mit der Verschiebung hat, und II. in der Bestimmung der Geschwindigkeit der Fortpflanzung derjenigen Wellen, deren Vibrationen dieselben Richtungen haben.

Nun hat die Kraft, welche eine Verschiebung in einer der Ebene xy parallelen Richtung hervorbringt, dieselbe Richtung, wie diese Verschiebung, so dafs es also gleichgültig ist, welche Gerade in der Ebene der xy wir für die Axe der x annehmen wollen. Nehmen wir also diese Axe der x senkrecht auf dem Durchschnitt der Frontebene der Welle mit der Ebene

der xy an. Sey MN die Projection dieser Frontebene in der Ebene des Papiers (so dafs also die Frontebene senkrecht auf dem Papier stehend gedacht wird), und sey AM die Axe der x, so wie AN die Axe der z, die wir zugleich die *Axe des Krystalls* nennen wollen[1]. Sey ferner Θ der Winkel, welchen die Fronte der Welle mit der coordinirten Ebene der xy bildet. Dieses vorausgesetzt folgt schon aus der Symmetrie der nach z wirkenden Kräfte, dafs eine mit der Linie MN parallele Verschiebung eine Kraft erzeugt, deren nach der Ebene MN zerlegter Theil in der Linie MN liegt, und dafs eine Verschiebung in der Ebene MN, die senkrecht zur Linie MN ist, ebenfalls eine auf MN senkrechte Kraft erzeugen wird. Demnach mufs die Vibration einer auf den Krystall auffallenden Welle in zwei zu denselben parallele Vibrationen aufgelöst werden, und diese Vibrationen werden, wie in §. 50. I., zwei Lichtstrahlen erzeugen, die sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortpflanzen.

Fig. 227.

I. Nennt man nun Δ die Verschiebung der Elemente, die in einer senkrechten Richtung zu der Ebene der Zeichnung (d. h. zu der Ebene des Papiers) vor sich geht, so ist, nach dem Vorhergehenden, die daraus entstehende Kraft gleich $a^2.\Delta$. Also bewegen sich die von diesen Vibrationen abhängigen Wellen mit der Geschwindigkeit a, welches auch die Lage der Frontebene der Welle seyn mag. Dieses ist aber dasselbe mit dem oben (§. 12.) für gewöhnliche brechende Medien gefundenen Gesetze. Nennt man daher (mit Erweiterung des oben §. 48. III. aufgestellten Begriffs desselben Wortes) *Hauptebene* des Krystalls diejenige Ebene, welche durch die Axe der z (d. h. durch die Axe des Krystalls nach der letzten Anmerkung) geht, so läfst sich der vorhergehende Satz so ausdrücken: *diejenigen Wellen, welche aus solchen Vibrationen bestehn, die senkrecht zu einer Hauptebene des Kry-*

1 Nach einem beinahe allgemeinen Uebereinkommen der optischen Schriftsteller wird diese Axe der z als coincidirend mit der mineralogischen Axe des Krystalls angenommen. In dem isländischen Spath ist diese Axe die Diagonale, welche die körperlichen Winkel verbindet, die durch die drei stumpfen Winkel der Seiten dieses Krystalls gebildet werden, mit welchen sie auch gleiche Winkel macht; im Quarz, im Turmalin, im Beryll u. s. w. ist diese Axe zugleich die Axe des Prisma's, in welche sich diese Körper spalten.

stalls stehn, werden ganz nach dem gewöhnlichen Gesetz (§. 12.) *der Refraction gebrochen.* Dieses gilt für die Refraction und für die Polarisation des gewöhnlichen Strahls, den wir oben durch O bezeichnet haben.

II. Nennt man ebenso D die Verschiebung der Elemente, die in der Ebene des Papiers selbst statt hat, so kann man diese Gröſse D in zwei andere auflösen, von welchen die eine, $D \,\text{Cos.}\, \Theta$, parallel zu x, die andere, $D \,\text{Sin.}\, \Theta$, parallel zu z genommen wird. Die aus ihnen resultirenden Kräfte werden daher seyn $a^2 D \,\text{Cos.}\, \Theta$ parallel mit x und $c^2 D \,\text{Sin.}\, \Theta$ parallel mit z und die Summe dieser Resultanten wird seyn

$$D\,(a^2 \,\text{Cos.}^2\, \Theta + c^2 \,\text{Sin.}^2\, \Theta).$$

Die Geschwindigkeit der Fortpflanzung dieser Welle, senkrecht auf ihre eigene Frontebene, wird also auch seyn

$$\sqrt{a^2 \,\text{Cos.}^2\, \Theta + c^2 \,\text{Sin.}^2\, \Theta},$$

und da diese nicht dieselbe für alle Richtungen ist, so wird auch die Refraction derjenigen Wellen, die aus den zu einer Hauptebene parallelen Vibrationen bestehn, *nicht* nach dem gewöhnlichen Gesetze (des §. 12.) vor sich gehn.

III. Wenn nun die Frontfläche einer Welle, die von solchen Vibrationen erzeugt wird, für irgend eine Zeit die Form PQR hat, so wird man die Frontfläche für die nächstfolgende Zeit finden, wenn man die Linie Pp senkrecht auf die Fläche in P und proportional der Gröſse $\sqrt{a^2 \,\text{Cos.}^2\, \Theta + c^2 \,\text{Sin.}^2\, \Theta}$ nimmt, wenn man ebenso Qq senkrecht auf dieselbe Fläche PQR für den Punct Q und wieder proportional derselben Gröſse $\sqrt{a^2 \,\text{Cos.}^2\, \Theta + c^2 \,\text{Sin.}^2\, \Theta}$ nimmt, und so fort für alle übrigen Puncte P, Q, R . . . Ist nun die ganze Welle ursprünglich durch eine Erschütterung des Aethers in dem Puncte C entstanden, so werden alle diese auf einander folgenden Frontflächen unter sich eine ähnliche Gestalt haben, und wenn man von allen diesen Flächen diejenigen Puncte nimmt, in welchen die Tangenten derselben parallel sind, d. h. wenn man die längs dem Radius CQ gelegenen Puncte nimmt, so ist der senkrechte Abstand je zweier nächsten Frontflächen gleich (Fig. 228.)

$$\sqrt{a^2 \,\text{Cos.}^2\, \Theta + c^2 \,\text{Sin.}^2\, \Theta}$$

und so wird denn auch die Summe aller dieser Abstände, d. h.

das Loth auf die Tangente in Q proportional seyn derselben Gröfse

$$\sqrt{a^2 \text{Cos.}^2 \Theta + c^2 \text{Sin.}^2 \Theta}.$$

Um also die Form einer *aufsergewöhnlichen* Welle, die aus irgend einem Puncte C divergirend ausgeht, zu finden, mufs man die Aufgabe auflösen, diejenige Curve zu finden, für welche das Loth auf die Tangente der Gröfse $\sqrt{a^2 \text{Cos.}^2 \Theta + c^2 \text{Sin.}^2 \Theta}$ proportional ist, wo Θ den Winkel bezeichnet, den die Tangente der Curve mit der Axe der x bildet. Es ist aber bekannt genug, dafs diese Curve eine *Ellipse* ist, deren Axen in der Richtung der z und x liegen und den Gröfsen a und c proportionirt sind. Also, um den Weg des aufsergewöhnlichen Strahls E zu finden, mufs man annehmen, dafs diejenigen Wellen, die aus zu der Hauptebene parallelen Vibrationen bestehn, von einem Puncte C in der Gestalt eines Revolutionssphäroids divergirend ausgehn, eines Revolutionssphäroids, das durch die Rotation einer Ellipse um eine mit der Coordinatenaxe der z parallele Axe entstanden ist; die Halbaxen dieses Sphäroids in einer zu z parallelen und senkrechten Richtung werden durch die Gröfsen a und c vorgestellt. In allen übrigen Fällen wird man dann wie oben für gemeines Sonnenlicht verfahren, wo zugleich a den Halbmesser der Kugel bezeichnet, in welchen das gemeine Sonnenlicht von dem Puncte C divergirend ausgeht.

IV. Man sieht übrigens leicht, dafs die Bewegung eines aufsergewöhnlichen Strahls E im Innern des Krystalls im Allgemeinen nicht senkrecht zu der Fronte der Welle ist. Denn ist AB eine kleine Oeffnung, durch welche ein aufsergewöhnlicher Strahl geht, und ist CD eine mit der Axe des Krystalls parallele Gerade, so kann man die Puncte A, a, b, c... als die Mittelpuncte von gleichen sphäroidischen Wellen ansehn, wo die Axen der Wellen mit der Linie CD parallel sind. Dieses vorausgesetzt ist klar, dafs der Theil zwischen E und F die einzige Stelle ist, in welcher diese Wellen einander verstärken, weil auf allen andern Stellen diese Wellen einander in verschiedenen gleichzeitigen Phasen folgen, also auch sich gegenseitig, wenigstens theilweise, zerstören, während die nächsten Wellen zwischen E und F sich nahe in derselben Phase begegnen oder fortbewegen. Die ganze Welle

Fig. 229.

wird daher von AB gegen EF fortzuschreiten scheinen, so dafs man also folgende allgemeine Vorschrift aufstellen kann: *man beschreibe ein Sphäroid, dessen Axe parallel mit der Axe des Krystalls ist, und suche auf der Oberfläche desselben den Punct, wo die tangirende Ebene parallel zu der Frontebene der Welle ist, wo dann die Bewegung der Welle auch parallel zu dem Radius Vector dieses Punctes seyn wird.*

52) Construction des Wegs der beiden polarisirten Strahlen.

Aus dem Vorhergehenden wird man nun folgende allgemeine Construction der beiden polarisirten Strahlen O und E ableiten. Sey die Ebene der Zeichnung zugleich die Ebene der einfallenden Strahlen, B A′ die Projection der Oberfläche des Krystalls und AB die Frontebene einer in der Richtung A A′ fortschreitenden Welle. Die Axe des Krystalls werde durch CD vorgestellt, welche Axe auch aufser der Ebene der Zeichnung liegen kann. Während sich ein Theil der Welle im freien Raume von A gegen A′ bewegt, nehmen wir an, dafs die gewöhnliche, von B divergirend ausgehende Welle sich in der Kugelfläche Fo verbreitet, während die aufsergewöhnliche Welle das Sphäroid Fe beschreibt, dessen Revolutionsaxe gleich dem Durchmesser jener Kugel ist. Man ziehe durch die Gerade, von welcher der Punct A′ die Projection ist, eine die Kugel in o berührende Ebene, so ist diese Ebene die Fronte der *gewöhnlichen* Welle, und Bo stellt zugleich die Richtung und die Geschwindigkeit der Bewegung dieser Welle vor. Man ziehe nun auch durch dieselbe Gerade eine das Sphäroid in e berührende Ebene, so ist diese Ebene die Fronte der *aufsergewöhnlichen* Welle, und Be stellt die Richtung und die Geschwindigkeit der Bewegung dieser Welle vor. Liegt die Axe des Sphäroids nicht in der Ebene der Zeichnung, so wird auch der Punct e nicht in dieser Ebene liegen und dann wird also auch die Richtung des gewöhnlichen Strahls nicht in der Einfallsebene der ursprünglichen Strahlen liegen.

Fig. 230.

I. Auf eine ganz ähnliche Weise wird man auch den Weg des aufsergewöhnlichen Strahls nach einer inneren Re-

flexion durch Construction bestimmen. Nehmen wir an, daſs die auſsergewöhnliche Welle, deren Fronte A'e ist, sich in der Richtung A'G bewege und daſs diese Welle an der Oberfläche GH theilweise oder auch gänzlich reflectirt werde. Wenn der Theil A' in G ankommt, so mag der Punct e auf seinem Wege nach H in I angekommen seyn. Wenn nun der Punct I den Ort H erreicht, so wird sich die kleine in G erzeugte Welle in ein Sphäroid ausgebreitet haben, welches demjenigen gleich und ähnlich ist, das aus dem Mittelpuncte I beschrieben wird und durch den Punct H geht. Sey KH dieses Sphäroid (dessen Axe stets parallel mit CD ist) und sey LM das ihm gleiche Sphäroid, dessen Mittelpunct in G ist. Ist dann LH die tangirende Ebene, die durch die in H sich projicirende Gerade geht, so wird HL die Fronte der reflectirten Welle seyn und GL die Richtung dieser reflectirten Welle vorstellen. Alles dieses stimmt ganz mit denjenigen Constructionen überein, die wir oben (§. 12. XI.) für die Refraction und Reflexion des gemeinen Sonnenlichtes gegeben haben. Wir bemerken nur noch, daſs hier der Reflexionswinkel dem Einfallswinkel im Allgemeinen nicht gleich ist und daſs auch die Incidenz- und Reflexionswinkel nicht immer in derselben Ebene liegen, wie dieses bei dem gemeinen Lichte der Fall ist.

II. Wenn man die Refraction in der Veränderung der Richtung der Wellenfronte bestehn läſst und wenn das hier in Rede stehende Sphäroid ein abgeplattetes ist, wie bei dem isländischen Spath, dem Beryll, dem Turmalin u. s. w., so ist der auſsergewöhnliche Strahl immer weniger gebrochen, als der gewöhnliche, da in der letzten Figur die Kugel von dem Sphäroid eingeschlossen wird. Ist aber das Sphäroid ein verlängertes, wie im Quarz, in dem einaxigen Apophyllit u. s. w., so ist der auſsergewöhnliche Strahl immer mehr gebrochen, als der gewöhnliche. Die Normale auf der Wellenfronte aber liegt stets in der Einfallsebene.

III. Um ein zusammengesetztes Prisma zu erhalten, welches die beiden Strahlen unter einem recht groſsen Winkel gegen einander trennt, kann man so verfahren. Man schneide ein Prisma A aus isländischem Spath mit seiner Kante parallel zur Axe und ein anderes Prisma B von demselben Winkel, Fig. 231.

aber mit seiner Kante senkrecht zur Axe, und stelle beide so, wie die Figur zeigt. Die mit der Ebene der Zeichnung parallelen Vibrationen werden den gewöhnlichen Strahl von A und den aufsergewöhnlichen von B geben, d. h. diese Welle wird am meisten von A gegen C und am wenigsten von B gegen D gebrochen werden und daher im Ganzen gegen C hingehn. In einer ähnlichen Weise wird auch der Strahl, dessen Wellen senkrecht gegen die Zeichnungsebene sind, am wenigsten von A gegen C und am meisten von B gegen D gebrochen werden und daher im Ganzen gegen D hingehn. Werden die beiden Prismen aus Quarz geformt, so wird die Trennung der Strahlen nach den entgegengesetzten (von den genannten) Richtungen vor sich gehn; auch wird hier diese Trennung kleiner seyn, da das verlängerte Sphäroid von Quarz weniger von einer Kugel verschieden ist, als das abgeplattete Sphäroid von isländischem Spath.

53) Bestimmung des Gesetzes der doppelten Refraction in zweiaxigen Krystallen[1].

Unter zweiaxigen Krystallen versteht man solche, für welche die drei vorhergehenden Gröfsen a^2, b^2 und c^2 alle unter sich verschieden sind. Vor Allem werden wir auch hier (wie in §. 50. I.) für die Wellenfronte zwei Richtungen suchen müssen, in welcher die Verschiebung eine Kraft erzeugt, die in derselben Richtung liegt, während man diejenige Kraft, die auf der Wellenfronte senkrecht steht, aufser Betrachtung läfst. Da wir hier nur die Kräfte in den Richtungen, welche diese Eigenschaft besitzen, zu berechnen haben, so wird man sofort die ganze Kraft der Verschiebung in zwei andere auflösen, von welchen die eine parallel zur Richtung dieser Verschiebung und die andere darauf senkrecht ist (ohne deshalb auch schon senkrecht gegen die Wellenfronte seyn zu müssen),

1 Da die Grenzen dieses Aufsatzes uns nicht erlauben, die Untersuchung der Refraction in zweiaxigen Krystallen umständlich vorzunehmen, so wollen wir uns mit den Hauptzügen derselben begnügen und die Leser, die sich weiter zu unterrichten wünschen, auf die Mém. de l'Institut von 1824 und auf die Annales de Chimie von 1828 verweisen.

und dann wird man, wie gesagt, die letztere Kraft ganz vernachlässigen. Wenn die Richtung der Verschiebung mit den Coordinatenaxen der x, y und z die Winkel X, Y und Z bildet, so wird, wenn die Verschiebung im Allgemeinen D heifst, die gesuchte aufgelöste Kraft zum Ausdruck haben

$$D.[a^2 \, Cos.^2 X + b^2 \, Cos.^2 Y + c^2 \, Cos.^2 Z].$$

Wenn man eine Oberfläche construirt, in welcher der zweite Factor dieses Ausdrucks den Radius Vector vorstellt, so sieht man leicht, dafs dieser Radius Vector das reciproke Quadrat von dem Radius Vector eines Ellipsoids ist, dessen Axen

$$\frac{1}{a^2}, \ \frac{1}{b^2} \text{ und } \frac{1}{c^2}$$

sind. Wir wollen jene Oberfläche der Kürze wegen die elastische Fläche nennen. Macht man mit der Wellenfronte einen Schnitt durch den Mittelpunct dieser Oberfläche, so wird der Radius Vector dieses Schnitts das reciproke Quadrat von dem Radius Vector in dem analogen Schnitte des Ellipsoids, d. h. von dem Radius Vector einer Ellipse seyn. Dieser Schnitt der elastischen Fläche wird also eine in Beziehung auf ihren gröfsten und kleinsten Durchmesser symmetrische Curve seyn und diese Durchmesser werden auf einander senkrecht stehn. Der Radius Vector dieses Schnitts wird für jede Richtung den in dieser Richtung aufgelösten Theil von der Kraft vorstellen, die durch die Verschiebung in dieser Richtung entstanden ist. Der (oben erwähnte andere) vernachlässigte Theil dieser Kraft wird auf dieser Richtung (aber deshalb noch nicht auch nothwendig auf der Wellenfronte) senkrecht stehn.

I. Wenn man nun die Richtung der Verschiebung, in welcher der vernachlässigte Theil senkrecht zur Wellenfronte steht, genauer untersucht, so findet man, dafs der oben erwähnte gröfste und kleinste Diameter die einzigen sind, welche dieser Bedingung genug thun, die Vibrationen müssen also in zwei aufgelöst werden, deren jede zu einer dieser beiden Durchmesser parallel ist, und diese werden die zwei gesuchten Lichtstrahlen hervorbringen. Die Geschwindigkeit dieser Lichtstrahlen endlich wird durch die Quadratwurzel dieser beiden Semidiameter dargestellt werden. Nur für zwei Richtungen der Wellenfronte und nicht in mehreren gehn diese

Schnitte in *Kreise* über. Welches also auch die Richtung der Vibration in dieser Wellenfronte seyn mag, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle bleibt dieselbe, und hier hat keine Trennung in zwei Strahlen mehr statt. Bemerken wir noch, daſs man die zwei, auf diese Kreise senkrechten Geraden die *optischen Axen* zu nennen pflegt.

II. Die Differenz zwischen den reciproken Quadraten der Geschwindigkeiten dieser zwei Strahlen ist dem Producte der Sinus von den zwei Winkeln proportionirt, die von der Wellenfronte mit den zwei kreisförmigen Schnitten gebildet werden, oder sie ist dem Producte der Sinus der zwei Winkel proportionirt, welche die Normale der Wellenfronte mit den zwei optischen Axen bildet. Die Polarisationsebene des einen Strahls halbirt den Winkel, der durch die zwei Ebenen gebildet wird, die durch die Normale und durch die zwei optischen Axen gehn, und die Polarisationsebene des andern Strahls ist gegen die vorhergehende Ebene senkrecht.

III. Die Gestalt, welche die divergirende Welle annimmt, wird wie in §. 51. III. dadurch bestimmt, daſs man die Gestalt (die Gleichung) derjenigen Oberflächen sucht, in welchen die auf die tangirenden Ebenen Senkrechten zu einer der oben (§. 53. I.) gefundenen Geschwindigkeiten proportional sind. Nach einigen etwas umständlichen algebraischen Entwickelungen findet man, daſs die Gleichung dieser beiden Oberflächen (die im Grunde nur eine einzige continuirliche Oberfläche bilden) die folgende ist:

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)-a^2x^2(b^2+c^2)$$
$$-b^2y^2(a^2+c^2)$$
$$-c^2z^2(a^2+b^2)+a^2b^2c^2=0.$$

Da dieser Ausdruck sich nicht in Factoren auflösen läſst, so kann er auch auf keine Kugel oder auf eine andere solche Fläche, wie die in §. 51. gefundene, bezogen werden, woraus folgt, daſs *keiner* der beiden Strahlen dem Gesetze der gewöhnlichen Refraction unterworfen seyn wird, was auch schon daraus folgt, daſs keine von den beiden in §. 53. I. gefundenen Geschwindigkeiten constant ist. Uebrigens findet man die Richtung u. s. w. der zwei Strahlen oder die Construction derselben ganz wie oben (§. 51. IV.), wenn man die so eben gefundene Oberfläche statt der dort gebrauchten Kugel oder

statt des Sphäroids anwendet und die zwei Lagen der tangirenden Ebenen sucht, welche durch die Gerade gehn, deren Projection der Punct A' ist.

54) Bestimmung der Intensität des reflectirten und des gebrochenen Lichts, wenn polarisirtes Licht in der Einfallsebene auf eine brechende Fläche fällt.

Wir kommen nun zu den Aufgaben, wo es sich um die Bestimmung des Zustandes derjenigen Aetherelemente, die unmittelbar an den *Grenzen* zweier Medien (z. B. Glas und Luft) liegen, handelt und die in analytischer Beziehung besondern Schwierigkeiten unterworfen sind. So wenig übrigens diese Theorie auch noch ausgebildet seyn mag, so ist es doch sehr tröstlich zu sehn, dafs die bisher gewonnenen Resultate der Rechnung mit den Beobachtungen sehr wohl übereinstimmen, so wie uns auch dieselbe Theorie zu der Kenntnifs von Erscheinungen geführt hat, die uns auf dem blofsen Wege der Beobachtung wohl immer verborgen geblieben seyn möchten.

Nehmen wir an, dafs die Aethertheilchen, ohne ihre anziehende Kraft zu ändern, im Innern des Mittels (z. B. des Glases) mit irgend einer Masse beschwert werden, welche die Trägheit derselben im Verhältnifs von 1 zu 12 vermehrt. Dieses vorausgesetzt wird die Gleichung des §. 49. in die folgende übergehn

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}\right) \cdot \frac{m}{h} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Wenn nun oben (§. 49., wo $n = 1$ angenommen wurde) das Integral dieser Gleichung

$$y = f(\alpha t - x)$$

war, wo f irgend eine Function bezeichnet, so wird das Integral der gegenwärtigen Gleichung seyn

$$y = f(\alpha t - x\sqrt{n}),$$

so dafs demnach die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in dem Verhältnifs von $\sqrt{n}$ zu 1 geändert worden ist. Allein wir haben oben (§. 12.) angenommen, dafs die Geschwindigkeit des

Lichts im Glase im Verhältniſs von μ zu 1 geändert wird, so daſs man also $n = \mu^2$ haben wird. Nehmen wir nun an, daſs man eine Reihe von gleichen Aethermassen in einer Linie habe und daſs dem ersten ein schiefer Stoſs ertheilt worden sey, der sich auf die in §. 49. erklärte Weise der zweiten u. s. w. mittheilt. Wenn man nun in diesem Fortgange bis zur Oberfläche des Glases gelangt, so muſs man von dem jetzt dichteren Aether solche Volumina nehmen, deren Dimensionen, in der Richtung des Fortschreitens der Welle, so bestimmt werden, daſs ihre Längen der Geschwindigkeit des Fortschreitens proportionirt sind und daſs ihre anderen Dimensionen denjenigen Aethermassen entsprechen, welche sie in Bewegung setzen sollen. Ist also $DF = \frac{1}{\mu}.BD$, so kann der in ABDC befindliche Aether als derjenige angesehn werden, der den Aether CDFE in Bewegung setzt. Ist nun wieder I der Incidenz- und R der Refractionswinkel, so hat man für das Verhältniſs der Längen in der Richtung des Radius

Fig. 232.

$$\mu : 1 \text{ oder } \mathrm{Sin.I} : \mathrm{Sin.R},$$

während das Verhältniſs der Breiten Cos. I : Cos. R und das der Dichtigkeiten $1 : \mu^2$ oder $\mathrm{Sin.}^2 R : \mathrm{Sin.}^2 I$ ist. Die Combination dieser Gröſsen giebt für das Verhältniſs der Massen

$$\mathrm{Sin.R.Cos.I} : \mathrm{Sin.I.Cos.R} \text{ oder } \mathrm{Tang.R} : \mathrm{Tang.I}.$$

Wenn aber ein elastischer Körper auf einen andern gleichgroſsen elastischen Körper stöſst, so verliert er, nach dem in §. 27. Gesagten, seine eigene Geschwindigkeit gänzlich und theilt dieselbe dem andern mit. Dieses stimmt überein mit der Wirkung eines jeden Aethertheilchens auf das nächstfolgende *im leeren Raume.* Aber an der Grenze des Glases z. B. wird sich dieses anders verhalten. Wenn nämlich ein vollkommen elastischer Körper A mit der Geschwindigkeit V auf einen in Ruhe begriffenen elastischen Körper B stöſst, so behält nach dem Stoſse (nach §. 27.) der erste Körper die Geschwindigkeit

$$\frac{A - B}{A + B}.V,$$

während der Körper B die Geschwindigkeit

$$\frac{2A}{A+B} \cdot V$$

erhält, wo A und B die Massen dieser Körper bezeichnen. Setzt man daher

$$A = \text{Sin. } R \text{ Cos. } I \text{ und } B = \text{Sin. } I \text{ Cos. } R,$$

so findet man für die noch übrige Geschwindigkeit der Elemente des äußern Aethers

$$\frac{\text{Sin. }(R-I)}{\text{Sin. }(R+I)} \cdot v,$$

wenn v die frühere Geschwindigkeit des äußern Aethers bezeichnet und für die neuerhaltene Geschwindigkeit des inneren (im Glase enthaltenen) Aethers

$$\frac{2 \text{ Sin. } R \text{ Cos. } I}{\text{Sin. }(R+I)}$$

gesetzt wird. Wenn nun eine Folge von vielen Impulsen dieser Art statt hat, die nach einem bestimmten Gesetze fortgehn, so wird auch eine bestimmte Reihe von Wellen erzeugt werden und jeder Impuls wird in den zwei Medien (dem freien Raume und dem Glase) Bewegungen hervorbringen, die den zwei letzten Größen proportional sind. Wird daher die ursprüngliche Vibration vorgestellt durch

$$a . \text{Sin. } \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x),$$

so wird die Vibration des äußern Aethers (welcher die Reflexion der Strahlen erzeugt) durch

$$a . \frac{\text{Sin. }(R-I)}{\text{Sin. }(R+I)} . \text{Sin. } \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x)$$

und die Vibration des innern Aethers (welche die Refraction erzeugt) durch

$$a . \frac{2 \text{ Sin. } R \text{ Cos. } I}{\text{Sin. }(R+I)} . \text{Sin. } \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - \mu x)$$

vorgestellt werden. Dieselben Ausdrücke werden für den Uebergang des Lichts aus Luft in Glas oder auch aus Glas in Luft gelten, wenn man nur für jeden Fall den Größen R und I ihre entsprechenden Werthe giebt. In allen Fällen werden dann die Intensitäten der Strahlen durch die Quadrate der Größen

$$a\frac{\text{Sin.}(R-I)}{\text{Sin.}(R+I)} \text{ und } a.\frac{2\,\text{Sin.}R\,\text{Cos.}I}{\text{Sin.}(R+I)}$$

ausgedrückt werden.

55) Bestimmung der Intensität des reflectirten und des gebrochenen Lichtes, wenn polarisirtes Licht senkrecht gegen die Einfallsebene auf eine brechende Fläche fällt.

In diesem Falle lassen sich die Schlüsse des §. 54. offenbar nicht anwenden, weil die Verschiebung (die in der Einfallsebene vorgeht und senkrecht auf den Weg des Strahls gerichtet ist) nicht in derselben Richtung mit je zweien von den drei (hier in Betrachtung kommenden) Strahlen ist. Dieser Schwierigkeit zu begegnen, stellt Fresnel folgende Hypothese auf. Zuerst setzt er voraus, dafs das bekannte allgemeine *Gesetz der lebendigen Kraft* auch hier statt habe, d. h. dafs auch hier die Summe der Producte jeder Masse in das Quadrat ihrer Geschwindigkeit constant sey. Dann nimmt er noch an, dafs die parallel mit der brechenden Oberfläche aufgelösten Theile auch noch, nachdem sie diese Fläche verlassen haben, ihre frühere Relation beibehalten, dafs nämlich (übereinstimmend mit den in §. 27. aufgestellten Gesetzen des Stofses elastischer Körper) die relativen Bewegungen vor und nach der Begegnung der Aethertheilchen in ihrer Gröfse gleich, in ihren Zeichen aber entgegengesetzt seyn sollen. Nimmt man diese beiden, in der That sehr wahrscheinlichen Voraussetzungen an, und bemerkt man wieder, dafs die Massen der beiden Aethertheilchen sich wie

$$\text{Sin.}R\,\text{Cos.}I : \text{Sin.}I\,\text{Cos.}R$$

verhalten, und nennt man endlich a, b und c die Verschiebungen des einfallenden, des gebrochenen und des reflectirten Strahls, so gelangt man zu folgenden zwei Gleichungen:

$$a^2.\text{Sin.}R\,\text{Cos.}I = b^2.\text{Sin.}I\,\text{Cos.}R + c^2.\text{Sin.}R\,\text{Cos.}I$$

und

$$a\,\text{Cos.}I = b\,\text{Cos.}R + c\,\text{Cos.}I.$$

Eliminirt man daraus die Gröfse b, so erhält man

$$c^2(\text{Sin.}2R + \text{Sin.}2I) - 2ac\,\text{Sin.}2I - a^2(\text{Sin.}2R - \text{Sin.}2I) = 0,$$

was auch so geschrieben werden kann

$$(c-a).[c(\text{Sin.}2R+\text{Sin.}2I)+a(\text{Sin.}2R-\text{Sin.}2I)]=0.$$

Dieser letzten Gleichung geschieht zuerst Genüge, wenn man $c=a$ setzt. Da aber daraus folgt, dafs b gleich Null ist, so bezieht sich dieser Fall blofs auf die *totale Reflexion*, mit welcher wir es aber hier nicht zu thun haben. Die zweite noch übrige Auflösung dieser Gleichung giebt

$$c=-a.\frac{\text{Tang.}(R-I)}{\text{Tang.}(R+I)}$$

und

$$b=a.\frac{\text{Cos.}I}{\text{Cos.}R}\left(1+\frac{\text{Tang.}(R-I)}{\text{Tang.}(R+I)}\right).$$

Wird daher zur Auflösung unseres Problems die Vibration der einfallenden Welle durch den Ausdruck

$$a.\text{Sin.}\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t-x)$$

dargestellt, so wird die der reflectirten Welle seyn

$$-a.\frac{\text{Tang.}(R-I)}{\text{Tang.}(R+I)}.\text{Sin.}\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t-x)$$

und für die Vibration der gebrochenen Welle wird man haben

$$a\frac{\text{Cos.}I}{\text{Cos}R}\left(1+\frac{\text{Tang.}(R-I)}{\text{Tang.}(R+I)}\right).\text{Sin.}\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t-\mu x).$$

I. Aus dem vorhergehenden Ausdrucke lassen sich besonders zwei merkwürdige specielle Fälle herausheben. Der erste Fall ist der, wenn man

$$R+I=90°$$

setzt. Dann ist die Vibration der reflectirten Welle gleich Null. Nehmen wir nun an, dafs solche transversale Vibrationen in allen Richtungen unter diesem Winkel auf eine Glasebene fallen, und lösen wir dieselben in zwei Arten auf, die eine parallel zu der Einfallsebene, die andere senkrecht gegen dieselbe. Die erste Art wird, wie wir so eben gesehn haben, keinen reflectirten Strahl haben, die zweite aber wird (nach §. 54.) allerdings einen solchen reflectirten Strahl zeigen. Also wird für diesen ersten besondern Fall das reflectirte Licht

blofs aus solchen Vibrationen bestehn, die zu der Reflexionsebene senkrecht sind. Unsere obige Bedingung $R + I = 90°$ giebt aber

$$\text{Sin.}\,R = \text{Cos.}\,I \text{ oder } \frac{1}{\mu}\,\text{Sin.}\,I = \text{Cos.}\,I,$$

das heifst, sie giebt

$$\text{Tang.}\,I = \mu$$

und durch diese Gleichung wird (nach §. 48. IV.) der Polarisationswinkel bestimmt. Derjenige Incidenzwinkel also, bei welchem, nach der Theorie, die Vibrationen des reflectirten Strahls alle senkrecht zu der Einfallsebene stehn, ist identisch mit dem Winkel, bei welchem, nach den Beobachtungen, der reflectirte Strahl in der Einfallsebene gänzlich polarisirt wird. Wir haben aber oben (§. 51.) auf theoretischem Wege gefunden, dafs der Strahl eines einaxigen Krystalls, der die gewöhnliche Refraction erleidet und der (nach §. 48. III.) in der Hauptebene polarisirt ist, durch solche Vibrationen hervorgebracht wird, die zur Hauptebene senkrecht stehn. Aus diesen Gründen wird man also, wie in §. 48. IX., sagen, dafs das in einer bestimmten Ebene polarisirte Licht aus Vibrationen besteht, die zu dieser Ebene senkrecht sind.

II. Der zweite hier besonders zu erwähnende Fall tritt dann ein, wenn die zwei Flächen der Glasplatte parallel sind, so dafs I und R an der zweiten Fläche identisch wird mit R und I an der ersten. Ist das von der ersten Fläche reflectirte Licht polarisirt oder ist $R + I$ an der ersten Fläche gleich 90°, so wird auch $R + I$ an der zweiten Fläche gleich 90°, und sonach ist also das von der zweiten Fläche im Glase reflectirte Licht ebenfalls polarisirt, was mit den Beobachtungen vollkommen übereinstimmt.

56) Bestimmung der Polarisationsebene bei schief einfallendem Lichte.

Es falle ein Licht, das in einer um den Winkel Θ gegen die Einfallsebene geneigten Ebene polarisirt ist, auf die Oberfläche eines brechenden Mediums; man suche die Lage der Polarisationsebene des reflectirten Lichts.

Wird die Vibration eines Aethertheilchens vor dem Einfall des Lichts durch

$$a \operatorname{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha t - x)$$

vorgestellt, dessen Richtung mit der Einfallsebene den Winkel (90° — Θ) bildet, so kann man dieselbe in zwei andere auflösen

$$a \operatorname{Cos.} \Theta . \operatorname{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha t - x) \text{ und } a \operatorname{Sin.} \Theta . \operatorname{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha t - x),$$

wovon die erste senkrecht und die zweite parallel zur Einfallsebene steht. Dieselben beiden Ausdrücke werden auch für den reflectirten Strahl gelten, wenn man in beiden der Gröſse x denselben Werth giebt und wenn man die beiden Factoren a Cos. Θ und a Sin. Θ in dem oben (§. 54. und 55.) gegebenen Verhältnisse ändert, so daſs man daher für die reflectirten Strahlen haben wird

$$a \operatorname{Cos.} \Theta . \frac{\operatorname{Sin.} (R - I)}{\operatorname{Sin.} (R + I)} . \operatorname{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha t - x)$$

für die zur Einfallsebene senkrechten und

$$- a \operatorname{Sin.} \Theta . \frac{\operatorname{Tang.} (R - I)}{\operatorname{Tang.} (R + I)} . \operatorname{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha t - x)$$

für die zur Einfallsebene parallelen Vibrationen. Da beide immer dasselbe Verhältniſs beibehalten, welches auch der Werth von x seyn mag, so folgt, daſs die aus beiden zusammengesetzte Vibration ganz in derselben Ebene und daſs daher das reflectirte Licht polarisirt seyn wird. Nennt man ω den Winkel, unter welchem die neue Polarisationsebene gegen die Einfallsebene geneigt ist, oder ist 90° — ω der Winkel, unter welchem die Richtung der neuen Vibration gegen die Einfallsebene steht, so hat man

$$\operatorname{Cotg.} \omega = \frac{a \operatorname{Cos.} \Theta . \frac{\operatorname{Sin.} (R - I)}{\operatorname{Sin.} (R + I)}}{- a \operatorname{Sin.} \Theta . \frac{\operatorname{Tang.} (R - I)}{\operatorname{Tang.} (R + I)}} = - \operatorname{Cotg.} \Theta . \frac{\operatorname{Cos.} (R - I)}{\operatorname{Cos.} (R + I)}$$

oder auch

$$\operatorname{Tang.} \omega = - \operatorname{Tang.} \Theta . \frac{\operatorname{Cos.} (R + I)}{\operatorname{Cos.} (R - I)}.$$

Sind beide Winkel I und R nur klein, so haben Θ und ω verschiedene Zeichen. Dieses zeigt, daſs die Polarisations-

ebenen vor und nach der Reflexion zu beiden Seiten der Einfallsebene geneigt sind (man nimmt nämlich diese Neigungen auf derselben Seite der Einfallsebene an, wenn die obern Theile der beiden Ebenen auf derselben Seite der Einfallsebene liegen). Ist aber $R + I = 90^0$, das heifst, ist der Einfallswinkel gleich dem Polarisationswinkel, so coincidirt die Polarisationsebene mit der Einfallsebene, und wenn I noch weiter wächst, so erhalten Θ und ω dieselben Zeichen. Auch diese Resultate der Theorie stimmen vollkommen mit den Experimenten von Arago und Brewster überein.

57) Intensität des auf der innern Seite des Mediums unter einem bestimmten Winkel einfallenden und daselbst reflectirten Lichtes.

Nehmen wir nun an, dafs das Licht auf der innern Seite einer Glasplatte unter einem Winkel auffalle, der gleich oder gröfser ist, als der Winkel der totalen Reflexion, und suchen wir die Intensität des daselbst reflectirten Lichtes. Hier werden die in §. 54. und 55. erhaltenen Ausdrücke imaginär, dessenungeachtet zeigen aber die Beobachtungen auch hier noch eine Reflexion des Lichtes. Wie soll man sich dieses erklären?

Nach dem oben angeführten Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft sollte die Intensität des reflectirten Strahls gleich seyn jener des einfallenden Strahls, weil hier kein gebrochener Strahl einen Theil der lebendigen Kraft gleichsam für sich verwenden oder aufzehren kann. In der That wird auch diese Intensität in den beiden Ausdrücken des §. 54. und 55., ehe sie die imaginäre oder unmögliche Form annimmt (d. h. ehe $R = 90°$ wird), gleich der Einheit. Nach diesem Zeitpuncte aber wird der Ausdruck für den hier in Rede stehenden Factor der zur Einfallsebene senkrechten Vibration, wenn man $\mu \,\mathrm{Sin.}\, I$ für Sin. R, und $\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{\mu^2 \,\mathrm{Sin.}^2 I - 1}$ für Cos. R setzt, in den folgenden Ausdruck übergehn

$$\frac{\mu \,\mathrm{Sin.}\, I \,\mathrm{Cos.}\, I - \mathrm{Sin.}\, I\,.\,\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{\mu^2 \,\mathrm{Sin.}^2 I - 1}}{\mu \,\mathrm{Sin.}\, I \,\mathrm{Cos.}\, I + \mathrm{Sin.}\, I\,.\,\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{\mu^2 \,\mathrm{Sin.}^2 I - 1}}$$

oder auch in

$$\text{Cos.}\,2\,\psi - \sqrt{(-1)}\,.\,\text{Sin.}\,2\,\psi,$$

wo der Kürze wegen

$$\text{Tang.}\,\psi = \frac{\sqrt{\mu^2\,\text{Sin.}^2\,\text{I} - 1}}{\mu\,\text{Cos.}\,\text{I}}$$

gesetzt worden ist. Ganz ebenso erhält man für den Factor der zur Einfallsebene parallelen Vibration

$$\frac{\text{Sin.}\,\text{I}\,\text{Cos.}\,\text{I} - \mu\,\text{Sin.}\,\text{I}\,.\sqrt{-1}\,.\sqrt{\mu^2\,\text{Sin.}^2\text{I} - 1}}{\text{Sin.}\,\text{I}\,\text{Cos.}\,\text{I} + \mu\,\text{Sin.}\,\text{I}\,.\sqrt{-1}\,.\sqrt{\mu^2\,\text{Sin.}^2\text{I} - 1}}$$

oder auch

$$\text{Cos.}\,2\,\varphi - \sqrt{(-1)}\,\text{Sin.}\,2\,\varphi,$$

wenn man der Kürze wegen annimmt

$$\text{Tang.}\,\varphi = \frac{\mu\sqrt{\mu^2\,\text{Sin.}^2\,\text{I} - 1}}{\text{Cos.}\,\text{I}}.$$

I. Da es unmöglich ist, dafs diese beiden Ausdrücke ohne Bedeutung sind, so kommt es nun darauf an, zu erfahren, welche Ansicht man mit ihnen verbinden soll. Fresnel meint, dafs, da die Richtung des reflectirten Strahls und die Intensität der Vibration bereits bestimmt ist, hier nur noch ein einziges Element zur Betrachtung übrig bleibt, nämlich die *Phase* der Vibration. Es ist allerdings möglich, dafs jene Sonderbarkeit der mathematischen Analyse eine solche Aenderung der Phase andeutet, da der einfallende Strahl, obschon er keine eigentliche Refraction mehr erzeugen kann, doch immer noch eine gewisse Erschütterung in denjenigen Aethertheilchen hervorbringen mufs, die an der Aufsenseite der Glasplatte liegen. Es scheint, als ob dadurch der Lichtstrahl retardirt werden müfste, obschon in der That später zu besprechende Phänomene die Annahme einer Acceleration desselben nothwendig machen. Man wird also annehmen können, dafs die Gröfsen $2\,\psi$ und $2\,\varphi$ mit dieser Acceleration auf irgend eine Weise zusammenhängen[1], und da diese Gröfsen

1 Fresnel's Schlufs ist folgender. In verschiedenen geometrischen Fällen zeigt das Vorkommen einer imaginären Gröfse eine Veränderung von 90 Graden in der Lage der Linie an, deren Länge mit der Gröfse $\sqrt{-1}$ multiplicirt ist. Es ist daher wahrscheinlich, dafs auch hier die Multiplication mit $\sqrt{-1}$ anzeigt, dafs die Phase der

Winkel sind, so müssen sie mit den übrigen Winkeln jener zwei Ausdrücke in irgend eine Combination treten. So z. B. wenn

$$a \, \mathrm{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha t - x)$$

der Ausdruck wäre für die zur Einfallsebene senkrechte Vibration, unter der Voraussetzung, dafs keine Acceleration statt findet, so würde der Ausdruck für die einer solchen Acceleration unterworfene Vibration seyn

$$a \, \mathrm{Sin.} \left[\frac{2\pi}{\lambda} (\alpha t - x) + 2\psi\right].$$

II. Das, was uns hier obliegt, wo wir es zunächst mit den Experimenten, welche durch die Theorie dargestellt werden sollen, zu thun haben, ist blofs die Gröfse $2\varphi - 2\psi$, die wir durch δ bezeichnen wollen, insofern sie die Acceleration für die Vibrationen betrifft, die zur Einfallsebene senkrecht und mit ihr parallel sind. Es ist aber

$$\mathrm{Tang.} (\varphi - \psi) = \frac{\mathrm{Cos.} I \sqrt{\mu^2 \, \mathrm{Sin.}^2 I - 1}}{\mu \, \mathrm{Sin.}^2 I},$$

und daraus folgt

$$\mathrm{Cos.} \delta = \frac{1 - \mathrm{Tang.}^2 (\varphi - \psi)}{1 + \mathrm{Tang.}^2 (\varphi - \psi)} = \frac{2\mu^2 \mathrm{Sin.}^4 I - (1+\mu^2) \mathrm{Sin.}^2 I + 1}{(1+\mu^2) \, \mathrm{Sin.}^2 I - 1}.$$

Vibration um 90 Grade verändert oder hier eigentlich vergröfsert wird. Demnach wird der Ausdruck

$$[\mathrm{Cos.} 2\psi + \sqrt{-1} . \mathrm{Sin.} 2\psi] . \mathrm{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha t - x)$$

so zu verstehn seyn, als wäre er

$$\mathrm{Cos.} 2\psi . \mathrm{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha t - x) + \mathrm{Sin.} 2\psi . \mathrm{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha t - x + 90^\circ)$$

oder, was dasselbe ist,

$$\mathrm{Cos.} 2\psi . \mathrm{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha t - x) + \mathrm{Sin.} 2\psi . \mathrm{Cos.} \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha t - x)$$

oder endlich

$$\mathrm{Sin.} \left[\frac{2\pi}{\lambda} (\alpha t - x) + 2\psi\right],$$

und analog für den andern oben angeführten Ausdruck.

Aus diesem Ausdrucke folgt, daſs $\delta = 0$ für $\text{Sin. } I = \frac{1}{\mu}$ oder für Sin. I = 1 ist, und daſs δ seinen gröſsten Werth erhält, wenn

$$\text{Sin.}^2 I = \frac{2}{1+\mu^2}$$

ist, wo man hat

$$\text{Cos. } \delta = \frac{8\mu^2}{(1+\mu^2)^2} - 1.$$

Nimmt man aber $\delta = 45°$, so hat man die Gleichung

$$\frac{2\mu^2}{(1+\mu^2)\,\text{Cosec.}^2 I - \text{Cosec.}^2 I} = 1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

und die Auflösung dieser Gleichung giebt, wenn man für Luft und Kronglas $\mu = 1{,}51$ setzt, den Werth von

$I = 48° \, 37' \, 30''$ oder $I = 54° \, 37' \, 20''$.

Wenn also das Licht unter einem dieser beiden Winkel innerlich auf die Fläche des Kronglases auffällt, so wird die Phase der Vibration in der Einfallsebene mehr accelerirt werden, als die der auf der Einfallsebene senkrechten Vibration bei 45 Graden. Wird aber das Licht unter denselben Umständen und in derselben Reflexionsebene zweimal reflectirt, so wird die Vibrationsphase in der Einfallsebene mehr accelerirt werden, als die der andern Vibration bei 90 Graden.

III. Construirt man sich also einen Rhombus aus Glas, von dem zwei Seiten zur Ebene des Papiers parallel sind, während die zwei andern darauf senkrecht stehn, und sich in den Linien AB, BC, CD und DA projiciren, und sind die Winkel bei A und C gleich 54° 37′, so wird ein in F senkrecht einfallendes Licht innerhalb des Glases bei G und H reflectirt werden, so daſs in diesen Puncten die Einfallswinkel 54° 37′ sind, und dann wird es in I wieder in einer Richtung austreten, die parallel zu jener ist, in welcher es bei F eingetreten war. Die Immersion in F und die Emersion in I wird keine Veränderung in dem Licht hervorbringen, aber die Wirkung der zwei Reflexionen in G und H wird die seyn, daſs die Phasen der Vibration in der Ebene des Papiers mehr accelerirt seyn werden, als die Phasen der Vibrationen in der auf diesen senkrecht stehenden Ebene. Ein so construirter Rhombus wird der *Fresnel'sche Rhombus* genannt. Fig. 233.

58) Intensität des auf der innern Seite des Mediums unter einem bestimmten Winkel einfallenden, polarisirten Lichtes.

Nehmen wir nun dasselbe Problem des §. 57. aber für *polarisirtes* Licht, wieder vor, indem wir nun voraussetzen, dafs polarisirtes Licht im Innern eines Mediums unter einem Winkel auffalle, der gröfser ist, als der für die totale Reflexion nothwendige, und suchen wir auch hier die Intensität des reflectirten Strahls. Wenn die Polarisationsebene mit der Einfallsebene den Winkel Θ bildet, so wird die durch den Ausdruck

$$a \,\mathrm{Sin.}\, \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x)$$

dargestellte Vibration in einer Richtung vor sich gehn, die den Winkel $90^0 - \Theta$ mit der Einfallsebene bildet, so dafs man also wieder für die zwei aufgelösten Seitenvibrationen haben wird

$$a \,\mathrm{Cos.}\, \Theta . \mathrm{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x)$$

für die zur Einfallsebene senkrechte und

$$a \,\mathrm{Sin.}\, \Theta . \mathrm{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x)$$

für die zur Einfallsebene parallele Vibration. Die letztere dieser beiden Vibrationen wird (nach §. 57. II.) um die Gröfse δ mehr accelerirt seyn, als die erste. Drückt daher, nach erfolgter Reflexion,

$$a \,\mathrm{Cos.}\, \Theta . \mathrm{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x)$$

die zur Einfallsebene senkrechte Vibration aus, so wird man auch

$$a \,\mathrm{Sin.}\, \Theta . \mathrm{Sin.} \left[\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x) + \delta\right]$$

für die zur Einfallsebene parallele Vibration annehmen müssen. Dieselben Ausdrücke werden auch noch gelten, wenn das Licht innerlich mehrere Male reflectirt wird, da die Einfallsebenen immer dieselben bleiben.

Dieses vorausgesetzt wollen wir nun die Bewegungen

eines Aethertheilchens in dem reflectirten Lichtstrome untersuchen und zu diesem Zwecke die Ordinate y in der Reflexionsebene und z darauf senkrecht nehmen. Der Anfang der Axen dieser zwei Coordinaten soll der Punct seyn, wo das Aethertheilchen anfänglich in Ruhe war.

I. Sey zuerst $\Theta = 45^0$ und $\delta = 90^0$, wodurch der Fall in Fresnel's Rhombus dargestellt wird, wenn die Polarisationsebene um 45 Grade gegen die Reflexionsebene geneigt ist. Hier hat man also

$$y = a\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\mathrm{Cos.}\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x),$$

$$z = a\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\mathrm{Sin.}\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x)$$

und

$$y^2 + z^2 = \tfrac{1}{2}a^2,$$

das heifst, jedes Aethertheilchen beschreibt einen Kreis, dessen Halbmesser gleich $\frac{a}{\sqrt{2}}$ ist.

II. Sey ferner $\delta = 90^0$, wie zuvor, während Θ unbestimmt bleibt und irgend einen Werth haben kann, wodurch demnach der allgemeine Fall in Fresnel's Rhombus dargestellt wird. Hier hat man

$$y = a\,\mathrm{Sin.}\,\Theta.\mathrm{Cos.}\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x),$$

$$z = a\,\mathrm{Cos.}\,\Theta.\mathrm{Sin.}\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x);$$

und daraus folgt

$$\frac{y^2}{a^2\,\mathrm{Sin.}^2\,\Theta} + \frac{z^2}{a^2\,\mathrm{Cos.}^2\,\Theta} = 1,$$

das heifst, jedes Aethertheilchen beschreibt eine Ellipse, deren halbe Axen sind

$a\,\mathrm{Sin.}\,\Theta$ parallel mit der Reflexionsebene

und

$a\,\mathrm{Cos.}\,\Theta$ senkrecht zu derselben Ebene.

III. In dem ganz allgemeinen Falle, wo Θ und δ jeden möglichen Werth haben können, erhält man

$$y = a \,\mathrm{Sin.}\,\Theta . \left[\mathrm{Sin.}\, \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x) . \mathrm{Cos.}\,\delta + \mathrm{Cos.}\, \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x) . \mathrm{Sin.}\,\delta \right]$$

$$z = a \,\mathrm{Cos.}\,\Theta . \mathrm{Cos.}\, \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha t - x) .$$

Aus letzterer Gleichung folgt

$$\mathrm{Cos.}\, \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha t - x) = \frac{z}{a \,\mathrm{Cos.}\,\Theta},$$

so dafs man daher für die gesuchte Curve des Aethertheilchens die Gleichung erhält

$$(y - z \,\mathrm{Tang.}\,\Theta . \mathrm{Sin.}\,\delta)^2 = a^2 \mathrm{Sin.}^2 \Theta . \mathrm{Cos.}^2 \delta . \left[1 - \mathrm{Cos.}^2 \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha t - x) \right]$$

$$= a^2 \mathrm{Sin.}^2 \Theta \,\mathrm{Cos.}^2 \delta - z^2 \mathrm{Tang.}^2 \Theta \,\mathrm{Cos.}^2 \delta ,$$

und dieses ist die Gleichung einer Ellipse, deren Axen gegen die Reflexionsebene geneigt sind.

IV. Endlich hat noch für alle Werthe von δ, wenn $\Theta = 0$ oder $\Theta = 90^0$ ist, das reflectirte Licht ganz dieselbe Polarisation, wie das einfallende.

Fig. 4. V. Sey ANN' ein Cylinder von kreisförmiger Basis, dessen Seitenlinien auf dieser Basis, die zugleich die Ebene der yz seyn soll, senkrecht stehn. Sey a der Halbmesser dieses Kreises, C der Mittelpunct desselben, und überdiefs der Halbmesser CA auf dem Durchmesser NN' senkrecht. Wird auf der Oberfläche dieses Cylinders ein Faden AMM'... so aufgewunden, dafs die senkrechte Entfernung MQ jedes Punctes M des Fadens von der Basis dem Kreisbogen AQ proportional ist, so fälle man von dem Puncte Q das Loth QP auf den Durchmesser NN', und man hat, wenn der Winkel $ACQ = \nu$ ist, $CP = y = a \,\mathrm{Sin.}\,\nu$ und $PQ = z = a \,\mathrm{Cos.}\,\nu$, so wie endlich

$$QM = x = b . a \nu ,$$

wo b irgend eine Constante bezeichnet.

Eliminirt man aus diesen drei Gleichungen die Gröfse ν, so erhält man

$$y^2 + z^2 = a^2 ,$$

$$y = a \,\mathrm{Sin.}\, \frac{x}{ab},$$

$$z = a \,\mathrm{Cos.}\, \frac{x}{ab}$$

für die Projectionen der bekannten kreisförmigen *Schraubenlinie* AMM'.. in den drei coordinirten Ebenen. Vergleicht man diese Ausdrücke mit den oben in Nr. I. erhaltenen, so sieht man, dafs beide, wenn die Gröfse t constant angenommen wird, identisch sind, so dafs also für den Fall der Nr. I. eine Reihe von Aethertheilchen, die anfänglich in einer geraden Linie gestanden haben, durch die Reflexion in die Stellung der kreisförmigen Schraubenlinie gelangen müssen. In den zwei andern Fällen der Nr. II. und III. reihen sich diese Aethertheilchen in eine andere Curve von doppelter Krümmung, die man, analog mit der vorhergehenden, eine elliptische Schraubenlinie nennen kann.

VI. Wir werden uns daher die abkürzenden Ausdrücke erlauben können, dafs das polarisirte Licht durch die Reflexion im Allgemeinen eine *elliptische Polarisation* erhält, die für den besondern Fall der Nr. I. in eine *circuläre Polarisation* übergeht. Alles andere, auf die bisher betrachtete, gewöhnliche Weise polarisirte Licht wollen wir als mit einer *ebenen Polarisation* begabt ansehn. Aus Nr. II. folgt, dafs man mit Fresnel's Rhombus elliptisch polarisirtes Licht von jedem Grad der Ellipticität hervorbringen kann, wenn man ihn nur gegen die Polarisationsebene in die gehörige Lage stellt. Wir werden später sehn, dafs man diese elliptische Polarisation auch noch durch andere Mittel, als Fresnel's Rhombus, hervorbringen kann. Zur bequemen Anwendung bei den Experimenten kann man diesen Rhombus in einen Rahmen fassen, mittelst dessen man den Rhombus, ohne den Durchgang des Lichts zu stören, rund um die Axe HI dreht. Dieser Rahmen kann auf die eine Platte der oben (Fig. 225) beschriebenen Polarisationsmaschine gesetzt werden, wo dann das bei C eben polarisirte Licht durch den Rhombus in circulär oder elliptisch polarisirtes verwandelt wird und aus der Seite DC des Rhombus, die der andern analysirenden Platte K gegenübersteht, heraustritt. Ist der Apparat mit einem getheilten Rande versehn, so dafs man dadurch den Winkel der Polarisations- und Reflexionsebene angeben kann, so findet man, dafs, wenn dieser Winkel gleich 0°, 90°, 180° oder 270° ist, das eben polarisirte Licht nicht geändert wird, dafs es für 45°, 135°, 225° und 315° die circuläre, und endlich für jeden andern Winkel die elliptische Polarisation erhält.

Fig. 233

59) Nähere Betrachtung der circulären Polarisation.

Das circulär polarisirte Licht kann immer in zwei Vibrationen aufgelöst werden, von welchen die eine parallel und die andere senkrecht zu irgend einer willkürlichen Ebene ist, so daſs die Gröſsen dieser Vibrationen stets dieselben bleiben. Folglich zeigt dieses Licht, wenn es durch die analysirende Platte K (§. 48. VI.) des genannten Apparates untersucht wird, kein Zeichen von Polarisation. Wenn aber elliptisch polarisirtes Licht auf dieselbe Weise in zwei Vibrationen aufgelöst wird, so verschwindet keiner dieser beiden Theile, obschon ihre Gröſsen sich immer ändern, und dieses ist daher der Grund, warum es, durch die analysirende Platte untersucht, ein *theilweise polarisirtes Licht* zeigt.

I. Noch müssen wir zwischen zwei Arten von circulärer Polarisation unterscheiden. Wir haben oben gesehn, daſs, wenn in Fresnel's Rhombus der Winkel $\alpha = 45^\circ$ ist, das Licht circulär polarisirt wird. Allein dasselbe hat auch statt, wenn $\alpha = -45^\circ$ wird, denn im letzten Falle hat man

$$y = -a\sqrt{\tfrac{1}{2}} \,.\, \text{Cos.}\, \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x),$$

$$z = +a\sqrt{\tfrac{1}{2}} \,.\, \text{Sin.}\, \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x),$$

woraus sofort folgt

$$y^2 + z^2 = \tfrac{1}{2}a^2.$$

Der Unterschied zwischen dem hier und dort Gesagten besteht bloſs in der Richtung der einzelnen Aethertheilchen. Dort hatte man

$$\frac{z}{y} = \text{Tang.}\, \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x)$$

und hier

$$\frac{z}{y} = -\text{Tang.}\, \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x)$$

oder dort ist die Spirale, in welcher sich die Aethertheilchen bewegen, rechts, hier aber links gewunden. Aehnliche Unterscheidungen der beiden Seiten wird man auch bei den elliptischen Polarisationen bemerken.

60) Vergleichung des Vorhergehenden mit den Beobachtungen.

Wenn man das von Fresnel's Rhombus kommende Licht durch einen zweiten Rhombus derselben Art gehn läſst, so ist, wenn die Lagen der beiden Rhomben ähnlich sind, das aus dem zweiten austretende Licht *eben polarisirt*, aber die neue Polarisationsebene ist um den Winkel $2\,\Theta$ gegen die vorige geneigt. Die Erklärung dieser Erscheinung ist folgende. Die Vibrationen in der Einfallsebene sind um 90° durch den ersten Rhombus und neuerdings um 90° durch den zweiten mehr accelerirt, als die anderen, die auf der Einfallsebene senkrecht stehn. Ist also, wie in §. 58, die zur Einfallsebene senkrechte Vibration

$$a \,\mathrm{Cos.}\,\Theta \,.\, \mathrm{Sin.}\, \frac{2\pi}{\lambda}\,(\alpha t - x)$$

so wird die zu dieser Ebene parallele Vibration seyn

$$a \,\mathrm{Sin.}\,\Theta \,.\, \mathrm{Sin.}\left[\frac{2\pi}{\lambda}\,(\alpha t - x) + 180^\circ\right]$$

oder, was dasselbe ist,

$$-\, a \,\mathrm{Sin.}\,\Theta \,.\, \mathrm{Sin.}\, \frac{2\pi}{\lambda}\,(\alpha t - x).$$

Da sie immer in demselben Verhältniſs stehn, so ist auch die Vibration ganz in derselben Ebene, oder das Licht ist polarisirt. Aber da die Tangente des Winkels mit der Reflexionsebene $-$ Tang. Θ statt $+$ Tang. Θ ist (welchen letzten Werth sie zuvor hatte), so ist die Polarisationebene auf diejenige Seite der Reflexionsebene hin geneigt, die der früheren Seite entgegengesetzt ist, und zwar um denselben Winkel, weswegen die Veränderung der Richtung gleich $2\,\Theta$ ist.

I. Wird aber der zweite Rhombus in eine Lage gebracht, die um 90° von der Lage des ersten abweicht, so ist das ausströmende Licht dem einfallenden ähnlich. Denn die Vibrationen, die durch den ersten Rhombus am meisten accelerirt wurden, werden durch den zweiten am wenigsten accelerirt und umgekehrt, so daſs das Verhältniſs ihrer Phasen dadurch nicht geändert wird.

II. Wir kennen nur noch einen Fall, wo die Reflexion von keiner Refraction begleitet wird, nämlich die Reflexion des Lichts von metallischen Oberflächen. Auch hier zeigt der reflectirte Strahl ganz ähnliche Eigenschaften mit demjenigen Lichte, welches von Glasflächen vollständig reflectirt wird. Ist der einfallende Strahl *eben polarisirt*, so erscheint der reflectirte Strahl in der That *elliptisch polarisirt*, und die Differenz der Phasen variirt auch hier mit dem Einfallswinkel. Dennoch ist es keineswegs ausgemacht, dafs diese Reflexion von Metallflächen ganz den vorhin auseinandergesetzten Gesetzen unterliegt. Es scheint, dafs die letztgenannte Reflexion selbst von der des Schalls in der Luft wesentlich verschieden ist. Nach Brewster's Experimenten scheint es, dafs bei Reflexionen von metallischen Flächen das Verhältnifs der zur Reflexionsebene parallelen und der senkrechten Vibrationen verschieden sey, weswegen bei mehrfacher Wiederholung dieser Reflexionen die parallelen Vibrationen bald gänzlich unsichtbar werden. Auch scheinen verschiedene Metalle, wie Stahl und Silber, in dieser Beziehung selbst sehr verschieden zu seyn[1]. Eine vollkommen genügende Darstellung dieses Gegenstandes ist noch von der Zukunft zu erwarten.

G. Farbenerscheinungen des polarisirten Lichtes.

61) Erklärungen.

Es wurde bereits oben (§. 48. VI.) als eine der Fundamentalerscheinungen der Polarisation angeführt, dafs, wenn die beiden Reflexionsebenen C und K (Fig. 225) zu einander senkrecht stehn und die Incidenzwinkel von beiden den polarisirenden Winkeln gleich sind, das von C reflectirte Licht nicht mehr fähig ist, auch wieder von K zurückgeworfen zu werden. Wird das Auge nahe bei K so gestellt, dafs es das Bild in C sieht, so sieht man eigentlich einen finstern Fleck im Mittelpuncte, und das ganze Bild selbst ist zwar nicht so schwarz, wie sein Centralpunct, aber doch noch immer sehr

---

1 Vergl. Brewster on elliptic Polarisation, in Philos. Trans. 1830.

dunkel. Legt man alsdann zwischen C und K ein das Licht doppelt brechendes Krystallblättchen, so wird das Bild von C im Allgemeinen sehr hell gesehn, aber zuweilen wird es auch durch mehrere dunkle Streifen, zuweilen von hellfarbigen Ringen u. dgl. durchkreuzt. Neigt man die Platte gegen ihre frühere Lage, so ändern sich auch die Lagen, Farben und Gestalten dieser Streifen, Kreuze und Ringe, zum Beweise, daſs diese Dinge von der Stellung des Lichtstrahls gegen gewisse bestimmte und fixe Linien der Krystallplatte abhängig seyn müssen. Sehr oft sind die Farben, in welchen die erwähnten Erscheinungen prangen, von überraschender Schönheit, und diese Farbenpracht, so wie die symmetrische Anordnung der einzelnen Theile dieser Bilder, die mit der Drehung der Reflexionsebene K um ihre Axe O immer wechselt, macht jene Phänomene bei weitem zu den glänzendsten, die wir bisher auf dem Gebiete der Optik kennen gelernt haben. Legt man aber nur eine gemeine Glasplatte zwischen die zwei Reflexionsebenen, so sind jene Erscheinungen nicht weiter zu sehn. Ja selbst bei der doppelt brechenden Krystallplatte bleiben sie unsichtbar, wenn die Platte so gestellt wird, daſs sie das Licht aufnimmt, ehe dasselbe noch in C polarisirt worden ist, oder auch, nachdem es schon in K analysirt worden ist. Es scheint daher, daſs eine solche doppelt brechende Platte im Allgemeinen die Eigenschaft besitzt, das bereits polarisirte Licht dergestalt zu ändern, daſs dasselbe entweder durch den Verlust seiner Polarisation oder auch durch eine Aenderung der Ebene derselben die Fähigkeit erhält, nach bestimmten, vielleicht sehr zusammengesetzten Gesetzen reflectirt zu werden.

I. Ueberhaupt zeigen alle Körper, welche das Licht doppelt brechen, im natürlichen sowohl, als auch besonders im polarisirten Lichte mehrere merkwürdige Erscheinungen. Ein Würfel aus Dichroit z. B. zeigt sich schon im natürlichen Lichte in einer schönen blauen Farbe, wenn er nach der Richtung der Brechungsaxe vor das Auge gehalten wird, in einer darauf senkrechten Richtung aber erscheint er gelb. Ein Würfel aus Turmalin zeigt sich in der Richtung seiner Axe sogar völlig undurchsichtig, während er in einer darauf senkrechten Richtung in den diesem Mineral sonst eigenthümlichen (grünen, braunen u. s. w.) Farben erscheint. Aber viel interessanter noch sind die Farbenerscheinungen dieser und anderer

Körper, wenn polarisirtes Licht auf dieselben fällt. Wird ein dünnes Glimmer- oder Gypsblättchen auf dem Tisch H des Polarisationsinstruments (Fig. 224) gelegt, so dafs polarisirtes Licht senkrecht durch dasselbe geht und dann auf mehrere über einander gelegte Glasplatten in K fällt, so sieht man sowohl in dem von dem Glase reflectirten, als auch in dem durchgelassenen Lichte das Blättchen farbig, und zwar ist die Farbe im reflectirten Lichte die complementäre von der des durchgelassenen Lichts[1]. Dreht man dann das Blättchen um den durchgehenden Strahl wie um eine Axe, so ändert sich nicht die Beschaffenheit, wohl aber die Intensität der Farbe, und es giebt vier Stellungen des Blättchens, wo die Färbung die gröfste, und vier andere, wo sie die kleinste Intensität hat, das Erstere da, wo sein Hauptschnitt gegen die Polarisationsebene um 45° geneigt ist, und das Zweite dort, wo der Hauptschnitt mit der Polarisationsebene parallel oder darauf senkrecht ist. Dreht man hingegen bei ruhiger Lage des Blättchens den Rahmen G, welcher die Glasplatte K enthält, so ändert sich sowohl die Farbe des durchgelassenen als auch die des reflectirten Lichts und geht bei einer Drehung des Rahmens um 90 Grade in die zur vorhergehenden complementäre Farbe über. Läfst man das Licht, nachdem es durch das Blättchen gegangen ist, statt durch die Glasplatte K, durch einen isländischen Spath gehn, so erleidet es durch die doppelte Brechung in diesem Spathe dieselben beiden Modificationen auf einmal, die es in der Glasplatte durch Reflexion und Refraction einzeln erfahren hat, und man sieht daher auf einmal zwei farbige Bilder, die an der Stelle, wo sie sich decken, *weifs* erscheinen, zum Beweise, dafs die beiden Farben complementär sind. Uebrigens mufs man bei diesen Versuchen mit dem isländischen Spath die Röhre F des Polarisationsinstruments unten mit einem Deckel verschliefsen, der nur eine etwa zwei oder drei Linien weite Oeffnung hat, und diese Oeffnung ist es, die man, nach dem Vorhergehenden, farbig sieht.

II. Die so hervortretenden Farbenerscheinungen sind be-

---

1 Diese Farbenpaare des durchgelassenen und des reflectirten Lichts sind demnach entweder Roth und Grün, oder Orange und Blau, oder Gelb und Violett.

sonders dann sehr schön, wenn ein Krystallblättchen senkrecht oder doch nahe senkrecht auf die Axe der doppelten Brechung geschnitten ist, und wenn dann ein polarisirter convergirender Lichtkegel darauf fällt, dessen Axe senkrecht durch das Blättchen geht[1]. Wird das Blättchen aus isländischem Spath und in allen seinen Theilen gleich dick geschnitten, leitet man darauf einen convergirenden polarisirten Strahlenkegel, dessen Axe mit der des Krystalls parallel ist, und läfst man ihn dann unter dem polarisirenden Winkel auf eine Glasplatte einfallen, damit er durch sie entweder reflectirt oder gebrochen werde, so sieht man das Blättchen mit farbigen concentrischen Ringen geziert, die den reflectirten Newton'schen Farbenringen ähnlich, aber durch ein dunkles Kreuz unterbrochen sind. Dieses Kreuz ist rechtwinklig und im *reflectirten* Lichte *schwarz*[2], wenn die Einfallsebene der Strahlen auf die Glasplatte mit der Polarisationsebene parallel ist; dasselbe Kreuz aber erscheint *weifs*, wenn diese zwei Ebenen auf einander senkrecht stehn. Im *gebrochenen* Lichte aber findet das Gegentheil statt. Vollkommen homogene Blättchen kann man um ihre Axe drehn, ohne dafs dadurch eine Aenderung der Ringe oder des Kreuzes merkbar wird, aber der kleinste Mangel an Gleichheit der Dicke verräth sich sogleich durch eine Verzerrung der Ringe oder durch eine Krümmung der Arme des Kreuzes. Aehnliche Erscheinungen bemerkt man auch an andern einaxigen Krystallen, dem Beryll, Turmalin u. s. w. Bei demselben Blättchen erscheint ein Ring desto gröfser, je weiter man das Auge vom Blättchen entfernt und je dünner das Blättchen ist, und zwar wachsen die Quadrate der Ringdurchmesser verkehrt wie die Quadratwurzeln der Blättchendicke. Schief gegen die Axe der doppelten Brechung gehaltene Blättchen zeigen auch ovale Ringe. An Blättchen aus zweiaxigen Krystallen haben diese Erscheinungen andere Gestalten. Ist ein solches Blättchen senkrecht auf die Linie geschnitten, wel-

---

1 Die vorzüglichsten dieser Erscheinungen sind bereits oben (Art. *Polarisation*) mit ihren Zeichnungen aufgeführt worden. Wir wollen sie hier mit einigen Bemerkungen kurz durchgehn und dann zusehn, auf welche Weise man sich von diesen interessanten Phänomenen durch die mathematische Analyse Rechenschaft geben kann.

2 S. Art. *Polarisation*. Fig. 94 und 95.

che den Winkel der beiden Axen halbirt, so sieht man zwei Systeme von Ringen, falls die beiden Axen nur einen sehr kleinen Winkel einschliefsen, so dafs man ihre Pole zugleich im Gesichtsfelde hat, und die ursprüngliche Polarisationsebene mit der Ebene der zwei Axen zusammenfällt. Machen diese Axen einen gröfsern Winkel, wie im Salpeter, so erscheinen die Ringe in der Gestalt[1] von Fig. 100, wenn die Polarisationsebene die vorher angegebene Lage hat. Dreht man das Blättchen um den vierten Theil eines rechten Winkels oder um 22½ Grad, so nehmen die Ringe die Gestalt von Fig. 102 an, bei einer neuen Drehung um weitere 22½ Grad die Gestalt der Fig. 103, und so fort für die folgenden Drehungen. Um diese Erscheinungen gut und bequem zu beobachten, leite man von einem nicht zu entfernten Gegenstande Licht auf den Spiegel C des Polarisationsinstruments[2], bringe das Krystallblättchen nahe an den Rahmen G, so dafs das Licht senkrecht durchgehn kann, und sehe dann durch die gehörig gestellten Gläser K auf das Blättchen herab.

III. Um das Vorhergehende unter einen allgemeinen Gesichtspunct zusammenzufassen, wollen wir bemerken, dafs man diese Farbenringe am leichtesten erzeugen und sichtbar machen kann, wenn man eine dünne Platte von isländischem Spath, die senkrecht gegen ihre Axe geschnitten ist, zwischen zwei dünne Turmalinplatten legt. Kreuzen sich die Axen der Turmaline und bringt man eine Turmalinplatte ganz nahe an das Auge, so erblickt man sofort jene glänzenden Farbenringe mit dem sie durchschneidenden schwarzen Kreuze. Um dem Gesichtsfelde eine gleichmäfsige Erleuchtung zu geben und um nicht durch die in derselben Richtung liegenden Gegenstände gestört zu werden, bringt man vor der ersten Turmalinplatte eine Glaslinse so an, dafs ihr Brennpunct nahe in die Spathplatte fällt. Mit diesem Apparat kann man die Farbenringe auch in einem finstern Zimmer auf einer weifsen Tafel darstellen, die in einer mäfsigen Entfernung von der zweiten Turmalinplatte gehalten wird. Da übrigens die erste Turmalinplatte nur zur Polarisirung des Lichts dient,

---

1 S. Art. *Polarisation.*

2 Das oben beschriebene, in Fig. 224. gezeichnete.

so kann sie auch durch eine geschwärzte Glasplatte, die von den Lichtstrahlen unter dem polarisirenden Winkel getroffen wird, vertreten werden.

Die näheren Bestimmungen dieser Erscheinungen sind nach dem Vorhergehenden die folgenden.

A. Wenn die Axen der Turmaline rechte Winkel bilden, so erscheinen die Ringe von einem schwarzen Kreuz durchschnitten, wie in Fig. 94 (des Art. *Polarisation*).

B. Dreht man das eine Turmalinblättchen um 90 Grade, so treten in jedem einzelnen Puncte des Bildes die den vorigen complementären Farben hervor und das vorhin schwarze Kreuz erscheint nun weifs, wie Fig. 95.

C. Nimmt man die mittlere Platte, statt von isländischem oder einem andern einaxigen Krystall, aus einem zweiaxigen, und wird die Platte senkrecht auf die Linie geschnitten, welche den Winkel der zwei Axen dieses Krystalls halbirt, so erhält man zwei Systeme von concentrischen Ringen in der Gestalt, wie sie in den Figuren 100, 101, 102 und 103 abgebildet sind. Fängt man die Farbenringe, welche zweiaxige Krystalle geben, auf einer weifsen Tafel im verfinsterten Zimmer auf, so lassen sich die Linien von gleicher Farbe (oder die sogenannten isochromatischen Curven) leicht mit Genauigkeit abzeichnen. Die Figur 104 stellt eine dieser Zeichnungen dar. Die Gestalt eines jeden Ringes ist die einer Curve, die unter dem Namen der Lemniscate bekannt ist, und deren charakteristische Eigenschaft darin besteht, dafs das Product der Distanz eines jeden Punctes der Curve von zwei festen innern Puncten immer gleich einer constanten Gröfse ist. Je nach dem Werthe, den man dieser Constanten giebt, erscheint die Curve, wie die Zeichnung zeigt, entweder eiförmig, oder in der Form einer an beiden Endpuncten ihrer kleinen Axe eingedrückten Ellipse, oder in der Form einer liegenden 8, oder endlich auch in der Gestalt von zwei durch einen Zwischenraum getrennten herz- oder kreisförmigen Curven.

IV. Merkwürdig ist noch, dafs die Temperatur des Blättchens auf die Lage der Axe des Körpers, von welchem das Blättchen genommen wurde, also auch auf die durch das

Blättchen erzeugten Farbenbilder einen wesentlichen Einfluſs hat. Die zwei Axen der Gypsblättchen z. B. nähern sich einander desto mehr, je höher die Temperatur ist, welcher das Blättchen ausgesetzt wird; bei 73° R. fallen endlich beide Axen zusammen. Die zwei Axen des gelben Topas gehn im Gegentheile desto weiter aus einander, je höher ihre Temperatur wird. Durch die Aenderung der Temperatur kann man ferner auch solche Körper, die im polarisirten Lichte im Allgemeinen keine Farbe zeigen, dahin bringen, daſs sie sich wie die vorerwähnten Krystalle verhalten. Hält man eine Platte von dickem Spiegelglase mit dem Rande an stark erhitztes Eisen, bringt das Ganze über den Tisch H des erwähnten Polarisationsinstruments und sieht durch die Gläser K darauf herab, so sieht man in der Glasplatte parallele Streifen, wie Fig. 110, von irisirenden Farben, die sich aber dann wieder verlieren, wenn sich die Hitze gleichförmig über die ganze Glasmasse verbreitet hat. Nimmt man einen Glascylinder und erwärmt ihn von der Axe aus, so bilden sich concentrische Farbenringe mit einem rechtwinkligen dunklen Kreuze wie Fig. 94.

V. Aehnliche Erscheinungen, wie durch die Aenderung der Temperatur, kann man auch durch den *Druck* erzeugen, dem man die Körper aussetzt. Nimmt man einen Glaswürfel, der im polarisirten Lichte keine besonderen Farben zeigt, drückt ihn durch eine Klemme oder Presse zusammen und hält ihn dann an den Tisch H, so sieht man, wenn man ihn durch das Glas in K betrachtet, den Würfel eigene Farben spielen, die mit dem Drucke sich ändern und in die complementären übergehn, wenn man die Einfallsebene in K um 90° ändert, die aber auch wieder alle verschwinden, sobald der Druck aufhört. Aehnliche Erscheinungen bringt man auch durch *Dehnen* des Glases hervor. Biegt man einen Glasstreifen, so sieht man ihn im polarisirten Lichte an der schmalen Seite mit parallelen Farbenstreifen, die in der Mitte durch eine schwarze Linie verbunden sind.

Um die vorhergehenden, mit der Temperatur oder dem Drucke wieder aufhörenden Erscheinungen *bleibend* zu machen, darf man nur eine heiſse Glastafel oder einen sehr erhitzten Würfel von Glas schnell abkühlen. Aehnliche Erscheinungen

bemerkt man auch an schnell entstandenen Krystallen von Borax, Kochsalz, in Gummistücken, und selbst im Diamant will sie Brewster[1] schon gesehn haben.

62) Allgemeine Darstellung der Ursachen dieser Erscheinungen.

Aus allen bisher angeführten Experimenten, so wie auch aus der oben (§. 50. u. s. w.) gegebenen theoretischen Darstellung der Trennung des Lichtstrahls in zwei andere durch Krystalle, wird man den Schluſs ziehn müssen, daſs, welcher Art auch die Natur des Lichts seyn mag, das auf einen doppelt brechenden Körper einfällt, die zwei dadurch entstehenden Strahlen, der eine in einer Ebene und der andere in einer darauf senkrechten Ebene, polarisirt sind, das heiſst, daſs die Vibrationen des einfallenden Strahls in zwei andere zerlegt werden, deren Richtungen auf einander senkrecht stehn und deren Wellen daher auch verschiedene Wege einschlagen. Aus dieser in §. 50. angeführten Darstellung folgt ferner, daſs diese zwei zerlegten oder getrennten Strahlen, oder vielmehr diese zwei verschiedenen Wellengattungen, durch den Krystall mit *verschiedenen Geschwindigkeiten* gehn, also auch bei ihrem Austritte aus dem Krystall verschiedene Phasen haben. Ihre Wiedervereinigung wird daher eine Art von Licht erzeugen, das nicht nothwendig polarisirt oder doch nicht nothwendig in derselben Ebene polarisirt seyn muſs, als zuvor, wo es durch den Krystall ging, so daſs demnach ihre Reflexionsfähigkeit von der analysirenden Platte K (Fig. 225) wieder hergestellt wird. Da aber die Lage der zwei Polarisationsebenen sowohl, als auch die Differenz der Geschwindigkeit der zwei Strahlen von der Richtung ihrer Wege durch den Krystall abhängig sind, so wird die Natur des Lichts, das durch die Vereinigung der zwei aus dem Krystall austretenden Strahlen entsteht, mit der Richtung dieser Strahlen sich ändern, so daſs also auch die Intensität dieser Strahlen, die von der analysirenden Platte K in das Auge kommen, je nach ihren verschiedenen Richtungen ebenfalls verschieden seyn wird. Auf diese Weise könnten daher jene hellen Curven von verschiedener Intensität entstehn. Die Differenz der Wellen wird, wie man leicht sieht, im Allge-

---

1 Vergl. Baumgartner's Physik. Wien 1832. S. 376 ff.

meinen eine Function der Wellenlänge λ seyn, und so wird denn auch die Gestalt dieser Curven verschieden ausfallen, jenachdem die Farbe des Lichts, von dem sie gebildet werden, verschieden ist. Und wenn endlich alle diese verschieden gestalteten und verschieden gefärbten Curven sich unter einander vermischen, so werden, als Endresultat der Erscheinung, andere Curven und Lichtbilder entstehn, in welchen die Farbenmischung beinahe für jeden Punct eine andere ist, wie man dieses bei den oben erwähnten Fransen der Interferenz und bei Newton's Farbenringen (§. 31. und 33.) zu beobachten pflegt.

I. Wir haben hier vorausgesetzt, dafs keine der beiden Polarisationsebenen der Strahlen innerhalb des Krystalls mit der Polarisationsebene des von dem Spiegel C reflectirten Lichts coincidirt. Nehmen wir aber den Fall an, dafs für eine bestimmte Richtung des Strahls die Polarisationsebene des gewöhnlichen Strahls O mit der Polarisationsebene des von C reflectirten Lichts coincidire. In diesem Falle wird der reflectirte Strahl (nach §. 48. II.) nur den gewöhnlichen Strahl O erzeugen, und sonach wird die durch den Krystall bewirkte Trennung der Strahlen von keiner weiteren Folge seyn, da doch nur ein einziger der beiden Strahlen noch übrig ist. Der gewöhnliche Strahl wird also dann aus dem Krystall ganz ebenso heraustreten, als er in denselben hineingetreten ist, d. h. unvermischt mit andern Strahlen, und derselbe wird dann auch auf die Reflexionsebene K ganz ebenso fallen, als ob er gar nicht durch das Krystallblättchen gegangen wäre, so dafs er also auch nicht reflectirt werden wird. Dasselbe wird, mit gehörigen Modificationen, der Fall seyn, wenn die Polarisationsebene des aufsergewöhnlichen Strahls E mit der Polarisationsebene des von C reflectirten Lichts coincidirt. Will man also alle die Richtungen der Strahlen bestimmen, in welchen die Polarisationsebene jedes gewöhnlichen und jedes ungewöhnlichen Strahls mit der Reflexionsebene von C coincidirt, so werden die in dieser Richtung fortgehenden Strahlen keiner Reflexion von K fähig seyn und das Bild, welches solche Strahlen dem Auge darstellen, wird das von einer oder mehreren *dunklen Linien* oder *Streifen* seyn, von welchen die oben erwähnten farbigen Curven durchschnitten werden.

II. Wird aber die Reflexionsebene K um ihre Axe gedreht, bis sie mit der Reflexionsebene C coincidirt, so werden die in Nr. I. angegebenen Bedingungen diejenigen Richtungen bestimmen, in welchen das Licht die *gröſstmögliche* Fähigkeit der Reflexion von K besitzt, so daſs also dann ein heller Streifen entsteht, von dem die farbigen Ringe durchschnitten werden. Wird K in eine Lage gedreht, die zwischen jenen beiden enthalten ist, so wird man auf dieselbe Weise finden, daſs die Richtungen der Strahlen (für welche die Ebenen der gewöhnlichen oder auſsergewöhnlichen Strahlen mit der Reflexionsebene von C oder von K coincidiren) die Gestalt derjenigen Linien bestimmen, welche alle jene farbigen Ringe durchschneiden und in welchen die Intensität des Lichtes gleichförmig und dieselbe ist, die auch ohne Beihülfe des Krystallplättchens statt gehabt hätte. Diese besondern Fälle sind hier nur als die auffallendsten Puncte in der allgemeinen Erscheinung herausgehoben worden. Die nähere Bestimmung der Gestalt dieser Linien und Curven werden wir erhalten, wenn wir den analytischen Ausdruck der Intensität des Lichtes aufstellen, das von der Reflexionsebene K in allen Richtungen zurückgeworfen wird.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen wollen wir nun zu der nähern Erklärung der Ursachen dieser Erscheinungen übergehn.

63) Fresnel's Erklärung der Ursachen dieser Erscheinungen.

Wir nehmen in dem Folgenden an, daſs der in der Polarisationsmaschine (Fig. 224) durch den Spiegel C polarisirte Lichtstrom senkrecht auf eine Krystallplatte falle, die parallel mit ihrer optischen Axe geschnitten ist. Auch setzen wir dieses Licht homogen oder von einer bestimmten Farbe voraus, so daſs z. B. λ die Wellenlänge des rothen Lichts bezeichnen soll. Dieses vorausgesetzt wollen wir nun die relativen Intensitäten desjenigen Lichtes bestimmen, welches, nachdem es jene Krystallplatte verlassen hat, auf den Spiegel K, oder auch auf ein doppeltbrechendes Prisma von isländischem Spath fällt, das durch ein Glasprisma achromatisirt worden ist, wo dann dieses Doppelprisma mit seinen Kanten nahe senkrecht auf die Rich-

tung CK gestellt wird. Es sey nun für eine der Krystallplatte parallele Ebene C der Durchschnitt der Axe des einfallenden Strahlbündels und PCP′ die Richtung seiner Polarisationsebene, so wie LCL′ und RCR′ die Richtungen der Hauptschnitte des Krystallplättchens und des Prisma's. Seyen φ und Θ die Winkel, welche diese Schnitte mit der ersten Ebene bilden, und seyen endlich die Linien pCp′, lCl′ und rCr′ in derselben Ordnung senkrecht auf PCP′, LCL′ und RCR′. Dieses vorausgesetzt wird, nach dem Vorhergehenden, die Richtung der Vibration des einfallenden Strahls parallel mit pp′ seyn und von den beiden polarisirten, aus der Krystallplatte heraustretenden Lichtstrahlen wird ll′ die Richtung der Vibration für den gewöhnlichen und LL für den aufsergewöhnlichen Strahl seyn. Für die aus dem Prisma kommenden Strahlen endlich wird rr′ die Richtung der Vibration für den gewöhnlichen und RR′ für den aufsergewöhnlichen Strahl vorstellen. Nimmt man nun die Intensität des einfallenden Lichts als die Einheit der Intensitäten an, so wird, bei dem Austritte des Lichts aus der Krystallplatte, die Geschwindigkeit der Vibration, deren Coefficient die Einheit ist und deren anfängliche Richtung Cp war, sich in zwei andere Geschwindigkeiten zerlegen, von denen die eine Cl mit dem Coefficienten Cos. φ und die andere CL′ mit dem Coefficienten Sin. φ ist. Demnach wird der nach PP′ polarisirte Lichtstrom, dessen Intensität die Einheit ist, durch die Krystallplatte in zwei Ströme getheilt, von welchen der eine Fo die Intensität Cos.$^2\varphi$ hat und nach der Ebene des Hauptschnitts polarisirt ist, während der andere Fe die Intensität Sin.$^2\varphi$ haben und senkrecht auf jene Ebene polarisirt seyn wird. Da aber diese zwei Lichtströme wegen der hier sehr klein angenommenen Dicke der Krystallplatte nur eine sehr geringe Spaltung erlitten haben können, selbst wenn diese Platte schief gegen die Richtung des einfallenden Stroms läge, so kann man annehmen, dafs diese zwei Ströme bei dem Austritte aus der Platte wieder alle in einander fliefsen und so vereinigt zu dem oben erwähnten Prisma gelangen. Bei dem Austritte aus diesem Prisma wird jene erste Vibration Fo (deren Coefficient Cos. φ und deren Richtung ll′ ist) in zwei andere zerlegt werden, die eine nach Cr mit dem Coefficienten Cos.φ Cos.$(\varphi-\Theta)$, die andere nach CR mit dem Coefficienten Cos.φ Sin.$(\varphi-\Theta)$.

Fig. 235.

Der Strom Fo also, dessen Intensität $\text{Cos.}^2\varphi$ war und der nach dem Hauptschnitt der Platte polarisirt ist, wird in zwei Ströme getheilt werden, von denen der erste $Fo+o'$ die Intensität $\text{Cos.}^2\varphi\,\text{Cos.}^2(\varphi-\Theta)$ hat und nach dem Hauptschnitte des Prisma's polarisirt ist, während der zweite $Fo+e'$ die Intensität $\text{Cos.}^2\varphi\,\text{Sin.}^2(\varphi-\Theta)$ haben und senkrecht auf jene Richtung polarisirt seyn wird. Ganz auf dieselbe Weise wird aber auch die Geschwindigkeit der Vibration Fe (deren Coefficient $\text{Sin.}\varphi$ und deren Richtung CL' ist) durch das Prisma in zwei andere zerlegt werden, deren eine parallel mit CR' ist und den Coefficienten $\text{Sin.}\varphi\,\text{Cos.}(\varphi-\Theta)$ hat, während die andere parallel mit Cr seyn und den Coefficienten $\text{Sin.}\varphi\,\text{Sin.}(\varphi-\Theta)$ haben wird. Der Lichtstrom Fe also, dessen Intensität $\text{Sin.}^2\varphi$ ist und der in einer zum Hauptschnitt der Platte senkrechten Ebene polarisirt ist, wird durch das Prisma in zwei andere Ströme getheilt, von welchen der erste $Fe+e'$ die Intensität $\text{Sin.}^2\varphi\,\text{Cos.}^2(\varphi-\Theta)$ hat und senkrecht auf den Hauptschnitt des Prisma's polarisirt ist, während der zweite $Fe+o'$ die Intensität $\text{Sin.}^2\varphi\,\text{Sin.}^2(\varphi-\Theta)$ haben und nach der Richtung dieses Hauptschnitts polarisirt seyn wird. In Folge aller dieser Zerlegungen wird das sämmtliche, aus dem Prisma austretende Licht Jo, nachdem es in demselben die gewöhnliche Brechung erlitten hat und nach der Ebene RCR' vollständig polarisirt worden ist, seine Vibrationen parallel mit rCr' fortschicken und aus den zwei Lichtströmen $Fo+o'$ und $Fe+o'$ bestehn, deren Intensitäten $\text{Cos.}^2\varphi\,\text{Cos.}^2(\varphi-\Theta)$ und $\text{Sin.}^2\varphi\,\text{Sin.}^2(\varphi-\Theta)$ sind. Ganz ebenso wird aber auch das sämmtliche aus dem Prisma tretende Licht Je, das nach der Richtung rCr' polarisirt ist, seine Richtungen parallel mit RCR' fortschicken und aus den zwei Lichtströmen $Fo+e'$ und $Fe+e'$ bestehn, deren Intensitäten $\text{Cos.}^2\varphi\,\text{Sin.}^2(\varphi-\Theta)$ und $\text{Sin.}^2\varphi\,\text{Cos.}^2(\varphi-\Theta)$ sind.

Wenn nun die Phasen der in einem gemeinschaftlichen Puncte zusammentreffenden Wellen der beiden Lichtströme Jo und Je *dieselben* wären, so würde man nur ihre beiden Intensitäten summiren dürfen, um die Intensität des gewöhnlichen und des aufsergewöhnlichen Bildes zu erhalten. Allein diese Phasen sind im Allgemeinen verschieden, und zwar aus folgenden zwei Ursachen. Die erste Ursache ist die verschiedene Verzögerung, welche in der Krystallplatte die bei-

den Lichtströme F o + o′ und F e + o′ oder F o + e′ und F e + e′ erlitten haben, da in jedem dieser beiden Paare der eine die gewöhnliche, der andere die aufsergewöhnliche Refraction erhalten hat. Um diese Verzögerungen auszumitteln, ist es genug, die bekannte Dicke der Krystallplatte mit dem Index der (gewöhnlichen und aufsergewöhnlichen) Refraction dieser Platte zu multipliciren. Die so erhaltenen zwei Producte, die wir E und E′ nennen wollen, werden uns die Wege geben, welche das Licht in der Luft während der zwei Zeiten durchläuft, die das Licht gebraucht, um die Krystallplatte mit dem gewöhnlichen und mit dem aufsergewöhnlichen Strahl zu durchlaufen. Die aus dieser Ursache entspringende Verzögerung der beiden Lichtströme wird also $E - E'$ seyn, wofür wir der Kürze wegen Δ setzen wollen. Die zweite Ursache der Ungleichheit der Phasen der beiden coincidirenden Wellen wird in den verschiedenen Zeichen zu suchen seyn, welche die Geschwindigkeiten dieser Wellen in demselben Augenblicke haben. In der That, wenn auch die beiden Lichtströme F o und F e mit *derselben Phase* in dem Prisma anlangen und wenn der eine die Geschwindigkeit von C nach l, der andere aber von C nach L′ hat, so werden die zwei daraus entstehenden, mit r r′ parallelen Seitengeschwindigkeiten das Aethertheilchen von C nach r treiben, so dafs also die zwei von J o kommenden Geschwindigkeiten *dasselbe* Zeichen haben. Die zwei primitiven, mit R R′ parallelen Geschwindigkeiten aber werden dieses Aethertheilchen die eine von C nach R, die andere von C nach R′ treiben, so dafs sie sich also gegenseitig vermindern oder theilweise aufheben, weil hier die beiden Geschwindigkeiten *verschiedene* Zeichen haben oder, was dasselbe ist, weil ihre Phasen um eine halbe Wellenlänge verschieden sind.

I. Diesem gemäfs wird also der Lichtstrom J o in zwei andere aufgelöst seyn, deren Phasen um die Gröfse $E - E' = \Delta$ verschieden sind und deren Intensität $\text{Cos.}^2\varphi\ \text{Cos.}^2(\varphi - \Theta)$ und $\text{Sin.}^2\varphi\ \text{Sin.}^2(\varphi - \Theta)$ seyn wird, und der Lichtstrom J e wird in zwei andere aufgelöst seyn, deren Phasen um die Gröfse $(\Delta + \frac{1}{2}\lambda)$ verschieden sind und deren Intensität $\text{Cos.}^2\varphi\ \text{Sin.}^2(\varphi - \Theta)$ und $\text{Sin.}^2\varphi\ \text{Cos.}^2(\varphi - \Theta)$ ist. Verbindet man also dieses mit dem, was oben (§. 19. III.) über die Zusammensetzung der Wellen gesagt worden ist, so erhält man für die Intensitäten

der Bilder, die aus den zwei Lichtströmen Jo und Je nach ihrem Durchgang durch das Prisma entstehn, die folgenden Ausdrücke:

$$(Jo) = \mathrm{Cos.}^2\varphi\,\mathrm{Cos.}^2(\varphi-\Theta)+\mathrm{Sin.}^2\varphi\,\mathrm{Sin.}^2(\varphi-\Theta) + 2\,\mathrm{Sin.}\,\varphi\,\mathrm{Cos.}\,\varphi\,\mathrm{Sin.}\,(\varphi-\Theta)\,\mathrm{Cos.}\,(\varphi-\Theta)\,\mathrm{Cos.}\frac{2\pi\Delta}{\lambda}$$

und

$$(Je) = \mathrm{Cos.}^2\varphi\,\mathrm{Sin.}^2(\varphi-\Theta)+\mathrm{Sin.}^2\varphi\,\mathrm{Cos.}^2(\varphi-\Theta) - 2\,\mathrm{Sin.}\,\varphi\,\mathrm{Cos.}\,\varphi\,\mathrm{Sin.}\,(\varphi-\Theta)\,\mathrm{Cos.}\,(\varphi-\Theta)\,\mathrm{Cos.}\frac{2\pi\Delta}{\lambda}$$

die man durch eine einfache Transformation der trigonometrischen Functionen auch so darstellen kann

$$(Jo) = \mathrm{Cos.}^2\Theta - \mathrm{Sin.}2\varphi\,\mathrm{Sin.}2(\varphi-\Theta)\,\mathrm{Sin.}^2\frac{\pi\Delta}{\lambda}$$

und

$$(Je) = \mathrm{Sin.}^2\Theta + \mathrm{Sin.}2\varphi\,\mathrm{Sin.}2(\varphi-\Theta)\,\mathrm{Sin.}^2\frac{\pi\Delta}{\lambda} \quad \ldots \text{(I)}$$

wo die Summe dieser beiden Intensitäten (Jo) und (Je) wieder gleich der Einheit ist, wie es seyn mufs.

II. Demnach wird also der anfänglich polarisirte homogene Lichtstrahl während seines Durchganges in der Krystallplatte und im Prisma in zwei Strahlen zerlegt, die im Allgemeinen ungleich sind und daher auch den von ihnen erzeugten Bildern eine ungleiche Intensität geben. Da der Index der Refraction für die verschiedenen Farben des Spectrums von einer Farbe zur andern in seinem numerischen Werthe nur sehr wenig variirt, so wird auch die Gröfse Δ für jede Farbe sehr nahe denselben constanten Werth beibehalten. Hat man also zu seinen Experimenten weifses (aus allen Farben zusammengesetztes) Sonnenlicht genommen, so wird man die *Farben der zwei Bilder* auf folgende Weise bestimmen können. Man dividirt die Gröfse Δ nach und nach durch die Wellenlänge λ einer jeden einzelnen der sieben bekannten Farben, die so erhaltenen Quotienten, in den letzten Gleichungen substituirt, werden also sieben Gruppen für die Werthe von (Jo) und (Je) geben. Diese sieben Werthe von (Jo) werden dann die relativen Intensitäten der sieben Farben in dem gewöhnlichen

Bilde geben, und ganz ebenso wird man auch aus (J e) die sieben Farben des aufsergewöhnlichen Bildes erhalten. Dabei ist für sich klar, dafs die Farben jedes zweiten Bildes die complementären zu den Farben des analogen ersten Bildes seyn werden, da nach den letzten Gleichungen die Summe von (J o) und (J e) gleich der Einheit ist. FRESNEL hat diese Rechnungen für mehrere Fälle ausgeführt und sie mit den Beobachtungen vollkommen übereinstimmend gefunden.

III. Wenn die Dicke der Platte und die Gröfse Δ dieselbe bleibt, aber dafür der Hauptschnitt der Platte oder des Prisma's eine andere Lage erhält, d. h. wenn die Gröfsen φ und Θ sich ändern, so werden auch die Intensitäten der beiden Bilder sich ändern, aber die Farbe derselben wird ungeändert bleiben. Denn wenn sich die Werthe von (J o) und (J e) der Gleichungen (I) auf ihre ersten Glieder $\mathrm{Cos.}^2\,\Theta$ und $\mathrm{Sin.}^2\,\Theta$ reduciren, so wird das Verhältnifs dieser zwei Intensitäten dasselbe bleiben, wenn man auch von einer Farbe zur andern übergeht, so dafs also die Bilder weifs seyn würden, d. h. dafs das weifse Licht, dessen Intensität die Einheit ist, sich ohne Decomposition über die beiden Bilder vertheilen, und ihnen blofs die zwei ungleichen Intensitäten $\mathrm{Cos.}^2\,\Theta$ und $\mathrm{Sin.}^2\,\Theta$ geben würde. Aber die zweiten Glieder dieser Gleichungen (I) zeigen, dafs sich diese Vertheilung auf eine ganz andere Weise macht. Denn ein Theil von jeder Farbe, der durch die Gröfse

$$\mathrm{Sin.}\,2\varphi\ \mathrm{Sin.}\,2(\varphi-\Theta)\ \mathrm{Sin.}^2\,\frac{\pi\Delta}{\lambda},$$

vorgestellt worden ist, wirkt gleichsam dem einen Bilde entgegen, um dafür auf das andere übergetragen zu werden. So lange das Product $\mathrm{Sin.}\,2\varphi\,\mathrm{Sin.}\,2(\varphi-\Theta)$ positiv ist, gewinnt dadurch das aufsergewöhnliche Bild, während das gewöhnliche verliert, und das Gegentheil hat statt, wenn jenes Product negativ wird. Wenn dieser gegenseitige Austausch für alle Farben denselben Werth hätte, so würden auch dann die beiden Bilder weifs bleiben, nur würde das eine auf Kosten des andern mehr beleuchtet seyn. Allein da diese Gröfse für jede Farbe einen andern Werth hat (weil nämlich der Factor $\mathrm{Sin.}^2\,\frac{\pi\Delta}{\lambda}$ sich mit der Farbe ändert), so wird z. B. das begünstigte Bild von

den verschiedenen Farben des andern Bildes ungleiche Antheile dieser Farben an sich gerissen haben und daher in denselben Farben gewinnen, in welchen das andere verliert. Auch werden diese Farben der beiden Bilder, die immer unter sich complementär sind, *dieselben* bleiben für alle Werthe von φ und Θ, und ihre Intensität wird der Gröſse $\text{Sin.}^2 2\varphi \, \text{Sin.}^2 2(\varphi - \Theta)$ proportional, das heiſst für ein constantes φ mit der Gröſse Θ veränderlich seyn. Auch muſs noch bemerkt werden, daſs die beiden Bilder die ihnen zukommenden Farben nicht jedes für sich ausschlieſsend behalten, sondern daſs sie, in diesen Farben, mit einander abwechseln werden, sobald der Factor $\text{Sin.}\, 2\varphi \, \text{Sin.}\, 2(\varphi - \Theta)$ ebenfalls sein Zeichen wechselt.

IV. Um aber auf diese Weise in der That *farbige* Bilder zu erhalten, muſs nothwendig die Krystallplatte sehr dünn seyn. Denn da das Sonnenspectrum nicht bloſs sieben, sondern eigentlich unzählig viele Farben enthält, so daſs also auch jede dieser sieben Hauptfarben aus unzähligen Lichtwellen besteht, deren jede ihre eigene Länge λ hat, so wird der von einem Bilde auf das andere übergehende Antheil von Licht desto gröſser seyn, je gröſser Δ ist. Ist daher die Dicke der Krystallplatte bedeutend, so enthält die Gröſse Δ eine beträchtliche Menge von Wellen jeder Art und die Bilder erscheinen daher in allen Farben zugleich, d. h. sie erscheinen weiſs. Wenn aber, für sehr dünne Platten, die Gröſse Δ nur eine sehr geringe Anzahl von den Wellen jeder Art enthält, so werden die Wellen der einen Art, d. h. der einen Farbe, die Wellen der andern Arten leichter überwiegen können und das Bild wird daher in der Farbe dieser überwiegenden Wellen erscheinen.

Nach diesen vorläufigen Betrachtungen wollen wir nun zu der eigentlichen mathematischen Theorie dieser interessanten Phänomene übergehn.

64) Bestimmung des durch Krystallplatten gegangenen Lichts.

Nehmen wir an, daſs ein dünnes Plättchen von isländischem (oder einem anderen einaxigen) Krystall senkrecht auf die Axe des Krystalls geschnitten ist und daſs auf dasselbe

das Licht nahe in der Richtung dieser Axe auffalle. Man suche die Geschwindigkeiten der dadurch entstandenen gewöhnlichen sowohl als aufsergewöhnlichen Wellen, und die Retardationen, welche jede dieser zwei Wellen während ihres Durchganges durch den Krystall erleidet.

I. Betrachten wir zu diesem Zwecke zuerst den aufsergewöhnlichen Strahl E. Es sey AB die Richtung des einfallenden Strahls (oder, was dasselbe ist, die Normale auf die einfallende Wellenfronte) und BC die Normale auf die Wellenfronte des aufsergewöhnlichen Strahls (welche Normale nicht immer mit der Richtung des gebrochenen aufsergewöhnlichen Strahls zusammenfällt). Sey ferner CD die zu AB parallele Richtung des Austritts der Strahlen aus der Krystallplatte MN und bezeichne man durch I den mit der Linie AB gebildeten Incidenzwinkel, sowie durch R den mit BC gebildeten Refractionswinkel. Endlich sey noch ν die Geschwindigkeit der aufsergewöhnlichen Welle vor und ν' nach ihrem Eintritt bei B in die Platte, senkrecht auf die Fronte dieser Welle genommen, und T die Dicke der Platte. Dieses vorausgesetzt, wird die Zeit, während welcher das Licht durch die Linie BC im Innern des Krystalls geht, gleich

Fig. 236.

$$\frac{T}{\nu' \text{Cos.} R}$$

und der Raum, welchen dieses Licht während derselben Zeit in der Luft beschrieben hätte, wird gleich

$$\frac{T\nu}{\nu' \text{Cos.} R}$$

seyn. Da aber die Wellenfronte bei ihrem Eintritt in B senkrecht zu AB und bei ihrem Austritt in C senkrecht zu CD ist, so ist der ganze Weg, um welchen die Welle vorgeschritten ist,

$$BE = T . \frac{\text{Cos.}(I - R)}{\text{Cos.} R} .$$

Nennt man also ϱ' die Retardation der Welle oder ist ϱ' der Raum in der Luft, um welchen die Welle zurückgeblieben ist, so hat man

$$\varrho' = \frac{T}{\text{Cos.} R}\left(\frac{\nu}{\nu'} - \text{Cos.}(I - R)\right)$$

oder

$$\varrho' = \frac{T}{\text{Cos. R}}\left(\frac{\nu}{\nu'} - \text{Cos. I Cos. R} - \text{Sin. I Sin. R}\right).$$

Allein wenn GH eine der Lagen der Wellenfronte vor und BK nach dem Einfall des Lichts in B bezeichnet, so müssen die Wege GB und HK in derselben Zeit beschrieben werden, so dafs man daher hat

$$\frac{GB}{HK} = \frac{\nu}{\nu'},$$

und da auch $\frac{GB}{HK} = \frac{\text{Sin. I}}{\text{Sin. R}}$ ist, so hat man

$$\text{Sin. R} = \frac{\nu'}{\nu}.\text{Sin. I}.$$

Da endlich das Loth auf die brechende Fläche (nach der obigen Voraussetzung der Aufgabe) mit der Axe des Krystalls coincidirt, so ist auch (§. 51. II.)

$$\nu' = \sqrt{a^2 \text{Cos.}^2 R + c^2 \text{Sin.}^2 R}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\text{Sin. R} = \frac{a \text{Sin. I}}{\sqrt{\nu^2 - (c^2 - a^2)\text{Sin.}^2 I}},$$

$$\text{Cos. R} = \frac{\sqrt{\nu^2 - c^2 \text{Sin.}^2 I}}{\sqrt{\nu^2 - (c^2 - a^2)\text{Sin.}^2 I}}$$

und

$$\nu' = \frac{a\nu}{\sqrt{\nu^2 - (c^2 - a^2)\text{Sin.}^2 I}},$$

so dafs man daher, wenn man diese Ausdrücke in den obigen Werth von ϱ' substituirt, für die gesuchte Retardation des aufsergewöhnlichen Strahls erhält

$$\varrho' = T.\left(\frac{\sqrt{\nu^2 - c^2 \text{Sin.}^2 I}}{a} - \text{Cos. I}\right).$$

II. Um ebenso die Retardation ϱ für den gewöhnlichen Strahl zu finden, wird man in dem Werthe von ϱ' nur a statt c setzen (vergl. §. 51. I. und II.), so dafs man daher hat

$$\varrho = T.\left(\frac{\sqrt{\nu^2 - a^2 \text{Sin.}^2 I}}{a} - \text{Cos. I}\right).$$

Bemerken wir, daſs die Constante c gröſser ist als a für den isländischen Spath, für Beryll, Rubin, Smaragd, Turmalin, Sapphir und für mehrere andere Krystalle, die man deshalb *negative* Krystalle nennt, weil für sie auch a — c eine negative Gröſse ist; für *positive* Krystalle aber, wie für Bergkrystall, Eisenoxyd, für Apophyllit, Boracit, Eis u. s. w. ist c kleiner als a, also auch a — c eine positive Gröſse.

III. Hier aber haben wir es bloſs mit der Differenz dieser beiden Gröſsen oder mit der Gleichung zu thun

$$\varrho - \varrho' = \frac{T}{a} \cdot \left(\sqrt{\nu^2 - a^2 \,\text{Sin.}^2 I} - \sqrt{\nu^2 - c^2 \,\text{Sin.}^2 I}\right).$$

Ist nun der Incidenzwinkel I nur klein oder fällt das Licht nahe senkrecht auf die Krystallplatte, so hat man den genäherten Ausdruck

$$\varrho - \varrho' = T \cdot \frac{c^2 - a^2}{2 a \nu} \cdot \text{Sin.}^2 I,$$

wo wir der Kürze wegen $\varrho - \varrho' = \varDelta$ setzen wollen.

IV. Um daher die Verrückung in den Aethertheilchen, die durch diese zwei Lichtströme hervorgebracht wird, auszudrücken, haben wir die Vibration des gemeinen Lichts bisher durch

$$a \,\text{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x)$$

dargestellt, so daſs daher die hier zu betrachtende Vibration seyn wird

$$a \,\text{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda}[\alpha t - (x - \varDelta)] \text{ oder } a \,\text{Sin.} \left[\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x) + \frac{2\pi\varDelta}{\lambda}\right].$$

65) Bestimmung des durch Krystallplatten gehenden Lichtes, wenn die Platte zwischen zwei Spiegel gelegt wird.

Es werde nun die im Anfange des §. 63. erwähnte Krystallplatte, die auf die Axe senkrecht geschnitten ist und auf welche das Licht nahe in der Richtung dieser Axe auffällt, zwischen die zwei Reflexionsebenen C und K (Fig. 225) gelegt. Man suche die Intensität des Lichts für verschiedene

Puncte des Bildes, welches nach der Reflexion des Lichts von der analysirenden Ebene K gesehn wird. Um dieses interessante Problem aufzulösen, stellen wir uns die Richtung irgend eines Lichtstrahls senkrecht zu der Papierebene vor. Nennen wir φ den Winkel der durch den Strahl und durch die Axe des Krystalls (d. h. nach §. 51. I. durch die *Hauptebene* für diesen Strahl) gehenden Ebene mit der ersten Polarisationsebene und sey ebenso Θ der Winkel dieser ersten Polarisationsebene mit der analysirenden Reflexionsebene K. Wird dann die Vibration des von der ersten Reflexionsebene C polarisirten Lichtes durch

Fig. 237.

$$a \,\mathrm{Sin.}\, \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha t - x)$$

dargestellt, die senkrecht auf die erste Polarisationsebene ist, so wird, wenn das Licht in den Krystall tritt, diese Vibration in zwei andere zerlegt werden, nämlich in

$$a \,\mathrm{Cos.}\, \varphi \,.\, \mathrm{Sin.}\, \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha t - x)$$

senkrecht zur Hauptebene, wodurch der gewöhnliche Strahl entsteht, und in

$$a \,\mathrm{Sin.}\, \varphi \,.\, \mathrm{Sin.}\, \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha t - x)$$

parallel zur Hauptebene, wodurch der aufsergewöhnliche Strahl entsteht. Der erste dieser beiden Ausdrücke kann auch noch als richtig angenommen werden, nachdem der *gewöhnliche* Strahl schon aus dem Krystall ausgetreten ist, wenn man nämlich nur die Werthe von x und t gehörig ändert; aber für den aufsergewöhnlichen Strahl mufs man dann (nach §. 63. IV.) den Ausdruck nehmen

$$a \,\mathrm{Sin.}\, \varphi \,.\, \mathrm{Sin.} \left[\frac{2\pi}{\lambda} (\alpha t - x) + \frac{2\pi\Delta}{\lambda}\right].$$

Wenn nun das Licht, wie es aus der Krystallplatte kommt, unmittelbar ins Auge treten sollte, so würde die Intensität des Lichts, obschon es in verschiedenen Richtungen aus dem Krystalle kommt, doch nicht geändert werden; denn die Intensität des gewöhnlichen Lichtes würde gleich $a^2 \,\mathrm{Cos.}^2\, \varphi$ und die des aufsergewöhnlichen würde $a^2 \,\mathrm{Sin.}^2\, \varphi$ seyn, so dafs also die Summe dieser beiden Ausdrücke oder die Gröfse a^2

die Intensität der vereinigten Lichtwellen bezeichnete. Wenn aber das Licht, nachdem es die Krystallplatte verlassen hat, zuerst auf die analysirende Ebene K des Polarisationsinstruments fällt, so bleiben nur diejenigen aufgelösten Theile der Vibrationen übrig, die senkrecht zu dieser Ebene K stehn[1]. Diese aufgelösten Theile sind für den gewöhnlichen Strahl

$$a \operatorname{Cos.} \varphi . \operatorname{Cos.} (\varphi + \Theta) . \operatorname{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda} (at - x)$$

und für den aufsergewöhnlichen Strahl

$$a \operatorname{Sin.} \varphi . \operatorname{Sin.} (\varphi + \Theta) \operatorname{Sin.} \left[\frac{2\pi}{\lambda} (at - x) + \frac{2\pi\Delta}{\lambda}\right]$$

und nun wird die *Summe* dieser zwei Ausdrücke die Vibration des Lichtes bezeichnen, welches von der Ebene C polarisirt durch die Krystallplatte H durchgelassen und von der analysirenden Platte K in das Auge des Beobachters reflectirt worden ist. Um diese Summe zu erhalten, mufs man zuerst den Ausdruck

$$\operatorname{Sin.} \left[\frac{2\pi}{\lambda} (at - x) + \frac{2\pi\Delta}{\lambda}\right]$$

in seine zwei Theile auflösen, wo man denn

$$a \operatorname{Cos.} \varphi \operatorname{Cos.} (\varphi + \Theta) + a \operatorname{Sin.} \varphi \operatorname{Sin.} (\varphi + \Theta) \operatorname{Cos.} \frac{2\pi\Delta}{\lambda}$$

für den Factor von $\operatorname{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda} (at - x)$ und ebenso

$$a \operatorname{Sin.} \varphi \operatorname{Sin.} (\varphi + \Theta) \operatorname{Sin.} \frac{2\pi\Delta}{\lambda}$$

für den Factor von $\operatorname{Cos.} \frac{2\pi}{\lambda} (at - x)$ findet. Die Summe der Quadrate dieser zwei Factoren wird (nach §. 21. II.) das Mafs der gesuchten Intensität (I) seyn. Diese Summe ist aber

1 Nach dem Vorhergehenden wird zwar nicht alles auf die Reflexionsebene K gehende Licht zurückgeworfen, sondern auch ein Theil desselben durch die in dem Rahmen G liegenden Glasplatten durchgelassen, so dafs man also die vorhergehenden Ausdrücke noch mit einem constanten Factor (mit einem eigentlichen Bruche) multipliciren sollte, der aber hier vernachlässigt werden kann, da man doch nur die *Verhältnisse*, nicht die absoluten Gröfsen der Lichtintensitäten sucht.

$$(I) = a^2 \text{Cos.}^2 \varphi \, \text{Cos.}^2 (\varphi + \Theta) + a^2 \text{Sin.}^2 \varphi \, \text{Sin.}^2 (\varphi + \Theta)$$
$$+ 2 a^2 \text{Sin.} \varphi \, \text{Cos.} \varphi \, \text{Sin.} (\varphi + \Theta) \, \text{Cos.} (\varphi + \Theta) \, \text{Cos.} \frac{2\pi\Delta}{\lambda},$$

welchen Ausdruck man auch so schreiben kann

$$(I) = \tfrac{1}{2} a^2 \left[1 + \text{Cos.} 2\varphi \, \text{Cos.} 2(\varphi + \Theta) + \text{Sin.} 2\varphi \, \text{Sin.} 2(\varphi + \Theta) \, \text{Cos.} \frac{2\pi\Delta}{\lambda} \right]$$

oder auch

$$(I) = a^2 \left[\text{Cos.}^2 \Theta - \text{Sin.} 2\varphi \, \text{Sin.} 2(\varphi + \Theta) \, \text{Sin.}^2 \frac{\pi\Delta}{\lambda} \right]$$

oder endlich, wenn man der Kürze wegen $\varphi + \Theta = \psi$ setzt,

$$(I) = a^2 \left(\text{Cos.}^2 \Theta - \text{Sin.} 2\psi \, \text{Sin.} 2(\psi - \Theta) \, \text{Sin.}^2 \frac{\pi\Delta}{\lambda} \right),$$

und ganz dieselben Ausdrücke haben wir auch oben (§. 63. I.) erhalten, wenn man hier $a = 1$ setzt und den Winkel Θ negativ nimmt.

I. Dieser Ausdruck für (I) giebt also die Intensität des in einer bestimmten Richtung in das Auge des Beobachters eintretenden Lichtstrahls oder die Helligkeit eines bestimmten Punctes des Lichtbildes. Um zu bestimmen, welcher Punct dieses Bildes gemeint ist, haben wir nur zu bemerken, dafs dieser Strahl den Incidenzwinkel I mit demjenigen Strahle macht, der in der Richtung der Axe und in einer Ebene eintritt, die um $\varphi + \Theta$ gegen die analysirende Ebene K geneigt ist, vorausgesetzt, dafs der Beobachter in der Richtung der Bewegung des Strahls auf das Bild sieht. Durch die Reflexion von der Ebene K wird zwar diese Richtung der Strahlen in Beziehung auf *oben* und *unten* umgekehrt, während sie in Beziehung auf *rechts* und *links* keine Aenderung erleidet. Aber da das Auge, um das Licht aufzufangen, mit dem Beschauer der Figur in entgegengesetzter Stellung steht, so giebt es noch eine zweite Umkehrung in Beziehung auf *rechts* und *links*, nicht aber auch auf *oben* und *unten*. Im Ganzen also kommt dieser Lichtstrahl von einem Puncte, dessen scheinbare Winkeldistanz von einem andern fixen Puncte (durch welchen die zur Axe parallelen Strahlen gehn) gleich dem Incidenzwinkel I ist, und diese Distanz wird in derjenigen Richtung gemessen, die den Winkel $\psi = \varphi + \Theta$ mit der analysirenden Ebene K bildet, wenn man

von dem oberen Theile dieser Ebene nach der rechten Seite zu fortgeht. In dem dem Auge dargestellten Bilde kann der Incidenzwinkel I als der Radius Vector und $\psi = \varphi + \Theta$ als der Winkel betrachtet werden, den der Radius Vector mit dem oberen Theile derjenigen Linie bildet, welche die analysirende Ebene K vorstellt.

66) Erster besonderer Fall des §. 64.

Bei der allgemeinen Betrachtung des in §. 64. behandelten-Problems müssen wir zwei besondere Fälle als vorzüglich wichtig eigens untersuchen. Der erste Fall ist der, wenn die analysirende Ebene K des Polarisationsinstruments senkrecht auf der ersten Polarisationsebene, d. h. wenn die Ebene K so steht, dafs ohne Zwischenlegung der Krystallplatte kein Licht reflectirt wird. Für diesen Fall ist der Winkel Θ gleich einem rechten Winkel, und dann geht der oben erhaltene Ausdruck der Intensität in den folgenden über

$$(I) = a^2 \text{Sin.}^2 2\psi . \text{Sin.}^2 \frac{\pi\Delta}{\lambda}.$$

Dieser Ausdruck verschwindet also, welches auch der Werth von λ seyn mag, so oft als $\text{Sin.}^2 2\psi = 0$ ist, das heifst für

$$\psi = 0,\ 90°,\ 180°,\ 270° \ldots$$

also auch für

$$\varphi = 0,\ 90°,\ 180°,\ 270° \ldots$$

und daraus folgt, dafs für jedes farbige Licht ein *schwarzes Kreuz* besteht, das sich über das Lichtbild verbreitet, dafs ferner die beiden Arme dieses Kreuzes gegen einander senkrecht stehn, und dafs endlich der Durchschnittspunct dieser Arme durch denjenigen Punct des Bildes geht, der von dem zur Axe parallel einfallenden Lichte erzeugt wird. Für alle übrigen Zwischenwerthe von φ verschwindet die Intensität (I) nur dann, wenn

$$\frac{\pi\Delta}{\lambda} = 0,\ \pi,\ 2\pi \ldots \text{ oder } \Delta = 0,\ \lambda,\ 2\lambda \ldots$$

ist, oder, da $\Delta = T . \frac{c^2 - a^2}{2 a \nu} . \text{Sin.}^2 I$ war, nur dann, wenn

$$\text{Sin. } I = 0,\ \sqrt{\frac{2 a \nu \lambda}{(c^2 - a^2) T}},\ \sqrt{\frac{4 a \nu \lambda}{(c^2 - a^2) T}},\ \sqrt{\frac{6 a \nu \lambda}{(c^2 - a^2) T}} \ldots$$

ist. Am hellsten aber ist das Bild oder die Intensität ist am gröſsten und gleich $(I) = a^2 \,\text{Sin.}^2 2\psi$, wenn

$$\Delta = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2} \ldots\ldots$$

oder, was dasselbe ist, wenn

$$\text{Sin. I} = \sqrt{\frac{a\nu\lambda}{(c^2-a^2)\,T}}, \sqrt{\frac{3a\nu\lambda}{(c^2-a^2)\,T}} \ldots$$

ist. Man sieht aus diesen Ausdrücken, daſs die vier Räume zwischen den Armen des Kreuzes von concentrischen hellen und dunklen Ringen eingenommen werden, von welchen die Halbmesser der hellen Ringe sich wie die Zahlen $\sqrt{1}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ .. und die von den dunklen sich wie $\sqrt{2}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{6}$ .. verhalten. Jeder dieser einzelnen Ringe selbst ist der Gröſse $\frac{1}{\sqrt{T}}$ proportionirt, so daſs also dünnere Ringe zu dickeren Platten und umgekehrt gehören. Dieselben Halbmesser verhalten sich überdieſs noch verkehrt wie die Gröſse $\sqrt{\frac{c^2-a^2}{a\nu}}$, und da dieser Ausdruck für ein schickliches Maſs der doppeltbrechenden Kraft eines Prisma's oder einer Krystallplatte genommen werden kann, so werden diese Ringe kleiner seyn, wenn diese brechende Kraft des Krystalls gröſser ist, und umgekehrt.

Endlich verhalten sich die Halbmesser dieser Ringe noch wie die Gröſse $\sqrt{\lambda}$, wenn man die Gröſse $\frac{a\nu}{c^2-a^2}$ als von λ unabhängig betrachtet. Da nun λ für die rothen Strahlen (nach §. 17.) am gröſsten und für die violetten am kleinsten ist, so sind auch die Kreise für das rothe Licht die gröſsten und die für das violette die kleinsten. Das Resultat ist also hier genau dasselbe, als welches schon oben (§. 22. VIII.) bei den Fransen der Interferenz und (§. 28. IV. V.) bei Newton's Farbenringen gefunden worden ist. Die Ringe, anfangs nur weiſs und schwarz, erhalten sehr bald eine Beimischung von Farben, die für jeden der aufeinander folgenden Ringe verschieden sind und endlich in einem nahe gleichen Gemenge aller Farben wieder verschwinden. Wäre die Gröſse $\frac{a\nu}{c^2-a^2}$ con-

stant, so würde die Proportion der Halbmesser für verschiedene Farben, also auch die Farbenmischung selbst dieselbe wie in Newton's Ringen seyn. Da aber $\frac{a\nu}{c^2 - a^2}$ im Allgemeinen eine Function von λ ist, so variiren die Halbmesser der Ringe von verschiedenen Farben wie die Gröfse

$$\sqrt{\frac{a\nu\lambda}{c^2 - a^2}}$$

und die Farbenscale ist daher nicht dieselbe, wie bei Newton's Ringen. Diese Gröfse

$$\frac{a\nu}{c^2 - a^2}$$

variirt für die verschiedenen Werthe von λ in manchen Krystallen so stark, dafs Herschel in einer Varietät des einaxigen Apophyllits die Gröfse

$$\frac{a\nu\lambda}{c^2 - a^2}$$

beinahe ganz constant gefunden hat, so dafs er mehr als 35 gefärbte Ringe deutlich sehn konnte, während für eine andere Varietät desselben Krystalls der Werth von $c^2 - a^2$ für rothe Strahlen positiv, für violette negativ und für die Mittelfarbe des Spectrums gleich Null wurde, und er nur mit Mühe einen oder zwei Ringe erblicken konnte. Dafs übrigens alle diese Resultate der Theorie mit den oben angezeigten Experimenten auf das Schönste übereinstimmen, bedarf keiner weiteren Erinnerung. Bemerken wir nur noch, dafs, da nach dem Vorhergehenden die Halbmesser der Ringe sich wie die Gröfsen $\sqrt{\frac{a\nu}{c^2 - a^2}}$ verhalten, daraus noch nicht gefolgert werden kann, dafs für $c^2 < a^2$, wo jener Ausdruck imaginär wird, keine Ringe möglich seyen. Wenn man den Gang der Analyse des §. 63. näher betrachtet, so sieht man, dafs die Schlufsfolgen dieselben bleiben, wenn man auch $a^2 - c^2$ statt $c^2 - a^2$ setzt.

67) Zweiter besonderer Fall des §. 64.

Der zweite, hier eigens zu betrachtende, besondere Fall der in §. 64. geführten allgemeinen Untersuchung tritt ein,

wenn die zur analysirenden Ebene K gehörende Reflexionsebene mit der polarisirenden Ebene C parallel ist. Für diesen Fall ist Θ gleich Null und der oben gefundene Ausdruck der Intensität geht in den folgenden über

$$(1) = a^2 . \left(1 - \text{Sin.}^2\, 2\psi . \text{Sin.}^2\, \frac{\pi \varDelta}{\lambda}\right).$$

Addirt man diesen Ausdruck zu dem im Anfange des §. 66. aufgestellten, so erhält man zur Summe beider die Gröfse a^2, woraus folgt, dafs für diesen Fall die Intensität jedes Punctes des Bildes jene des §. 66. zur Einheit ergänzt, so dafs also statt des *dunklen* die Ringe durchbrechenden Kreuzes jetzt ein *helles* Kreuz über diesen Ringen sichtbar seyn wird. Ganz ebenso werden statt der dunklen Ringe des §. 66. mit ihren Halbmessern

$$\sqrt{\frac{2 a \nu \lambda}{(c^2 - a^2) T}},\ \sqrt{\frac{4 a \nu \lambda}{(c^2 - a^2) T}} \ldots$$

und statt jener hellen Ringe mit ihren Halbmessern

$$\sqrt{\frac{a \nu \lambda}{(c^2 - a^2) T}},\ \sqrt{\frac{3 a \nu \lambda}{(c^2 - a^2) T}} \ldots$$

jetzt die hellen Ringe jene ersten und die dunklen Ringe diese letzten Halbmesser haben.

68) Allgemeine Bemerkungen zu dem Vorhergehenden.

Im Allgemeinen bleibt, wenn die Gröfse $\text{Sin.}\,2\psi\,\text{Sin.}\,2(\psi - \Theta)$ gleich Null ist, die Intensität constant für alle Werthe von $\varDelta$ oder von I (da nach §. 64. III. die Gröfse $\varDelta = T . \frac{c^2 - a^2}{2 a \nu} . \text{Sin.}^2\, I$ ist) oder man sieht in diesem Falle nur einen die Ringe unterbrechenden Streifen. Denn die Aufeinanderfolge der Ringe hängt von der Variation der Werthe von $\text{Sin.}^2 \frac{\pi \varDelta}{\lambda}$ ab und diese Gröfse wird durch die Verschwindung ihres Factors $\text{Sin.}\,2\psi\,\text{Sin.}\,2(\psi - \Theta) = 0$ ganz vernichtet. Die letzte Gleichung giebt aber

$$\psi = 0^\circ \text{ oder } 90^\circ,\ 180^\circ,\ 270^\circ \text{ oder auch}$$
$$\psi = \Theta \text{ oder } 90^\circ + \Theta,\ 180^\circ + \Theta,\ 270^\circ + \Theta,$$

so dafs man also zwei rechtwinklige Kreuze sieht, die um den Winkel Θ gegen einander geneigt sind und welche die Ringe unterbrechen. Die Intensität des Lichtes in diesen Kreuzen ist $a^2 \text{Cos.}^2 \Theta$. Für die Theile zwischen

$$\psi = 0 \text{ und } \psi = \Theta, \text{ oder zwischen } \psi = 90° \text{ und } \psi = 90° + \Theta,$$

und ebenso zwischen

$$\psi = 180° \text{ und } \psi = 180° + \Theta,$$

oder endlich zwichen

$$\psi = 270° \text{ und } \psi = 270° + \Theta$$

ist der Factor von $\text{Sin.}^2 \frac{\pi \Delta}{\lambda}$ positiv, und die Beleuchtung des Bildes ist am gröfsten, wenn $\Delta = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2} \ldots$, und am kleinsten, wenn $\Delta = \lambda, 2\lambda, 3\lambda \ldots$ ist. Die vier durch diese Kreuze entstehenden Sectoren sind durch solche Ringtheile eingenommen, die den in §. 66. angegebenen gleichen, so dafs die Intensität der hellen Ringe gleich

$$\tfrac{1}{2} a^2 [1 + \text{Cos.} 2 (2\psi - \Theta)] \text{ oder } a^2 \text{Cos.}^2 (2\psi - \Theta)$$

und die der dunkleren Ringe gleich $a^2 \text{Cos.}^2 \Theta$ ist.

Aber für die Theile zwischen $\psi = \Theta$ und $\psi = 90°$ u. s. w. ist der Factor von $\text{Sin.}^2 \frac{\pi \Delta}{\lambda}$ negativ und das Licht am kleinsten für $\Delta = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2} \ldots$, am gröfsten dagegen für $\Delta = \lambda$, $2\lambda, 3\lambda \ldots$, so dafs daher hier diese Sectoren durch solche Ringtheile eingenommen werden, die denen in §. 67. ähnlich sind, und dafs die Intensität der hellen Ringe gleich $a^2 \text{Cos.}^2 \Theta$, die der dunklen aber gleich $a^2 \text{Cos.}^2 (2\psi - \Theta)$ ist. Uebrigens haben die helleren Ringe in den letztgenannten Sectoren dieselben Halbmesser und dieselbe Helligkeit, wie die dunklern Ringe in den erstgenannten Sectoren, und diese Helligkeit ist dieselbe mit der in den acht Armen der beiden Kreuze.

69) Erscheinungen des polarisirten Lichtes durch Fresnel's Rhombus.

Wir wollen nun wieder, wie in §. 65., eine auf ihre Axe senkrecht geschnittene Krystallplatte zwischen die zwei

Ebenen C und K (Fig. 225) der Polarisationsmaschine, überdieſs aber zwischen die polarisirende Ebene C und die Krystallplatte den oben (§. 57. III.) erwähnten Rhombus Fresnel's so legen, daſs die Reflexionsebene um 45 Grad gegen die Polarisationsebene geneigt ist, wodurch also das auf die Krystallplatte fallende Licht eine circuläre Polarisation (§. 58. VI.) erhalten hat. Um auch für diesen Fall die Intensität des von der Ebene K reflectirten Lichts und die Gestalt der farbigen Ringe zu finden, wird man die Vibration

$$a \operatorname{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x),$$

die senkrecht auf die Ebene der ersten Polarisation ist, in zwei andere zerlegen, von welchen die eine

$$\frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x)$$

senkrecht zu der Reflexionsebene des Rhombus, die andere

$$\frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x)$$

parallel zu derselben Ebene ist. Da die Phase der letzten (nach §. 57. II.) um 90^0 gröſser ist, so werden diese zwei Vibrationen nach ihrem Durchgange durch den Rhombus durch die zwei folgenden Ausdrücke dargestellt werden

$$\frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x)$$

und

$$\frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{Cos.} \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x).$$

Löst man diese Vibrationen in solche auf, die senkrecht und parallel zur Hauptebene des Krystalls sind, so findet man für die Vibration des gewöhnlichen Strahls

$$\frac{a}{\sqrt{2}} \operatorname{Cos.}(45^\circ - \varphi) \operatorname{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x) + \frac{a}{\sqrt{2}} \operatorname{Sin.}(45^\circ - \varphi) \operatorname{Cos.} \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x)$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{Sin.} \left(\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x) + 45^\circ - \varphi\right)$$

und für die des auſsergewöhnlichen Strahls

$$-\frac{a}{\sqrt{2}}\text{Sin.}(45^\circ-\varphi)\text{Sin.}\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t-x)+\frac{a}{\sqrt{2}}\text{Cos.}(45^\circ-\varphi)\text{Cos.}\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t-x)$$

$$=\frac{a}{\sqrt{2}}\text{Cos.}\left(\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t-x)+45^\circ-\varphi\right).$$

Bei dem Austritte dieser Strahlen aus der Krystallplatte wird die gewöhnliche Vibration ihren vorigen Ausdruck unverändert beibehalten, die aufsergewöhnliche aber wird folgende Gestalt annehmen

$$\frac{a}{\sqrt{2}}\text{Cos.}\left(\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t-x)+45^\circ-\varphi+\frac{2\pi\varDelta}{\lambda}\right).$$

Der zur analysirenden Ebene K senkrecht zerlegte Theil dieser Vibration (der allein das Auge des Beobachters erreicht) wird seyn

$$\frac{a}{\sqrt{2}}\text{Cos.}(\varphi+\Theta)\,\text{Sin.}\left(\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t-x)+45^\circ-\varphi\right)$$

$$+\frac{a}{\sqrt{2}}\text{Sin.}(\varphi+\Theta)\,\text{Cos.}\left(\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t-x)+45^\circ-\varphi+\frac{2\pi\varDelta}{\lambda}\right).$$

Entwickelt man den letzten Ausdruck, so findet man für den Coefficienten von Sin. $\left(\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t-x)+45^\circ-\varphi\right)$ die Gröfse

$$\frac{a}{\sqrt{2}}\text{Cos.}(\varphi+\Theta)-\frac{a}{\sqrt{2}}\text{Sin.}(\varphi+\Theta).\text{Sin.}\frac{2\pi\varDelta}{\lambda}$$

und für den Coefficienten von Cos. $\left(\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t-x)+45^\circ-\varphi\right)$ die Gröfse

$$\frac{a}{\sqrt{2}}\text{Sin.}(\varphi+\Theta).\text{Cos.}\frac{2\pi\varDelta}{\lambda},$$

so dafs daher die gesuchte Intensität des Lichts (oder die Summe der Quadrate dieser Ausdrücke) seyn wird

$$(\text{I})=\tfrac{1}{2}a^2\left\{1-\text{Sin.}2(\varphi+\Theta)\,\text{Sin.}\frac{2\pi\varDelta}{\lambda}\right\}$$

oder, was dasselbe ist, da $\psi=\varphi+\Theta$ ist,

$$(\text{I})=\tfrac{1}{2}a^2.\left\{1-\text{Sin.}2\psi\,\text{Sin.}\frac{2\pi\varDelta}{\lambda}\right\}.$$

I. Da in diesem letzten Ausdrucke von (I) die Gröfse Θ nicht mehr enthalten ist, so wird auch die Erscheinung

nicht geändert werden, wenn man die analysirende Ebene K um ihre Axe dreht. Wenn $\text{Sin.}2\psi = 0$ ist, das heifst für $\psi = 0^0$, 90^0, 180^0 oder 270^0, ist die Intensität gleich $\frac{1}{2}a^2$, und dieses zeigt, dafs hier ein Kreuz von mittlerer Intensität die Ringe unterbricht. Ist aber $\psi > 0$ und $< 90°$, oder ist $\psi > 180°$ und $< 270°$, so wird der Ausdruck von (I) ein Maximum für

$$\frac{2\pi\Delta}{\lambda} = \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \,.\,. \text{ oder für } \Delta = \frac{3\lambda}{4}, \frac{7\lambda}{4} \,.\,.,$$

hingegen ein Minimum für

$$\frac{2\pi\Delta}{\lambda} = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \,.\,. \text{ oder für } \Delta = \frac{\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4} \,.\,.$$

Ist aber $\psi > 90°$ und $< 180°$ oder ist $\psi > 270°$ und $< 360°$, so wird der Ausdruck ein Maximum für

$$\Delta = \frac{\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4} \ldots$$

und ein Minimum für

$$\Delta = \frac{3\lambda}{4}, \frac{7\lambda}{4} \ldots$$

Demnach sind von den vier Quadranten, in welche das Bild von dem Kreuze getheilt wird, die gegenüberstehenden ähnlich und die anliegenden zwei unähnlich, indem die hellen Ringe in dem einen Quadranten dieselben Halbmesser haben, wie die dunklen Ringe in dem nächsten Quadranten. Vergleicht man diese Ausdrücke mit denen in §. 66., so sieht man, dafs die Wirkung der Zwischenstellung des Rhombus von Fresnel eigentlich darin besteht, dafs die Ringe in zwei einander gegenüberstehenden Quadranten um $\frac{1}{4}\lambda$ auswärts und in den zwei andern entgegenstehenden Quadranten um $\frac{1}{4}\lambda$ einwärts gedrängt worden sind und dafs das früher ganz dunkle Kreuz jetzt einiges Licht erhalten hat. Die wichtigste Veränderung aber, die dieser Rhombus hervorgebracht hat, ist die, dafs die Erscheinung selbst ganz dieselbe bleibt, wenn auch die Ebene K ringsum gedreht wird.

70) Bestimmung des Doppelstrahls bei einem zweiaxigen Krystalle.

Wenn von einem zweiaxigen Krystalle, dessen optische Axen nur wenig gegen einander geneigt sind (wie bei Salpeter oder Arragonit), eine dünne Platte senkrecht auf die Ebene geschnitten wird, die durch die beiden Axen geht, und wenn ein Lichtstrahl auf diese Platte unter einem sehr kleinen Einfallswinkel auffällt, so haben wir oben (§. 64. III.) für die Differenz der Retardationen der beiden Strahlen nahe

$$\Delta = T.\frac{c^2 - a^2}{2a\nu} \text{Sin.}^2 I$$

oder, was dasselbe ist,

$$\Delta = T.\frac{\nu.(c^2 - a^2)}{2a^3} \text{Sin.}^2 R$$

erhalten, wo die Differenz δ der Quadrate der Geschwindigkeiten der zwei Strahlen $(c^2 - a^2)$ Sin. ^{2} R ist, so dafs man also auch

$$\Delta = \frac{T.\nu}{2a^3}.\delta$$

setzen kann. Da nun die Differenz der Retardationen blofs von der Differenz dieser Geschwindigkeiten kommt, so wird man der Wahrheit sehr nahe denselben letzten Ausdruck auch für den oben erwähnten zweiaxigen Krystall annehmen können. Aber nach §. 53. III. erleidet keiner der beiden Strahlen die gewöhnliche Refraction oder keiner von ihnen hat eine constante Geschwindigkeit. Da man hier aber nur die Differenz der beiden Geschwindigkeiten sucht, so wird man die Geschwindigkeit des einen doch noch der constanten Gröfse a gleich annehmen können, wo dann, wenn ν' die Geschwindigkeit des andern Strahls bezeichnet, die Gleichung bestehn wird

$$\frac{1}{\nu'^2} - \frac{1}{a^2} = C.\text{Sin.}m'.\text{Sin.}n',$$

wo m′ und n′ die Winkel sind, welche die zur Wellenfronte normale Linie mit den beiden Axen des Krystalls bildet, und wo C immer eine gegen die Einheit sehr kleine Gröfse bezeichnet. Daraus folgt

$$\nu'^2 = a^2 - C . a^4 \text{ Sin.} m' \text{ Sin.} n'$$

oder

$$a^2 - \nu'^2 = C . a^4 \text{ Sin.} m' . \text{ Sin.} n'$$

so daſs man daher für die obige Gröſse $\varDelta$ den Ausdruck erhält

$$\varDelta = \tfrac{1}{2} T . C . a \nu . \text{ Sin.} m' \text{ Sin.} n' .$$

Dieses vorausgesetzt betrachten wir das System der Strahlen in der Luft, welches bei seinem Eintritt in den Krystall in den beiden bezeichneten Richtungen fortgeht. Seyen m und n die Winkel, die derselbe Strahl in der Luft mit denjenigen Strahlen macht, die bei ihrem Eintritt in den Krystall in der Richtung der zwei optischen Axen desselben fortgehn. Da alle gebrochene Strahlen (die durch die zur Wellenfronte normalen Linien dargestellt werden) in denselben zu der brechenden Oberfläche senkrechten Ebenen liegen, wie die einfallenden Strahlen, und da alle Refractionswinkel sehr nahe in demselben Verhältniſs zu den Einfallswinkeln stehn, so werden alle übrigen von ihnen abhängigen Winkel, so wie ihre Sinus, ebenfalls nahe dasselbe Verhältniſs beibehalten. Sonach wird man die genäherten Ausdrücke haben

$$\text{Sin.} m' = \frac{a}{\nu} \text{ Sin.} m \text{ und Sin.} n' = \frac{a}{\nu} \text{ Sin.} n,$$

so daſs also der Werth von $\varDelta$ in den folgenden übergeht

$$\varDelta = \tfrac{1}{2} \frac{T C a^3}{\nu} \text{ Sin.} m \text{ Sin.} n .$$

I. Lassen wir nun diese Krystallplatte zwischen die polarisirende und analysirende Ebene (Fig. 224) treten und suchen wir auch hier die Intensität des Lichts für verschiedene Puncte des Bildes, das nach der Reflexion von der analysirenden Ebene K entsteht. Ist φ der Winkel, welchen die Polarisationsebene eines jeden Strahls mit der Ebene der ersten Polarisation bildet, so wird der Ausdruck von (I), den wir oben (§. 65.) gefunden haben, auch hier noch gelten, oder man wird haben

$$(I) = a^2 \left[\text{Cos.}^2 \Theta - \text{Sin.} 2\varphi \text{ Sin.} 2(\varphi + \Theta) \text{ Sin.}^2 \frac{\pi \varDelta}{\lambda} \right].$$

Sey nun die Projection der Strahlenrichtungen und der Ebenen auf der Oberfläche einer Kugel (oder vielmehr auf der Fig. 236.

eine Kugel tangirenden Ebene), deren Halbmesser r ist und in deren Mittelpuncte das Auge des Beobachters steht. Die Puncte A und B sollen die optischen Axen, P irgend einen Lichtstrahl und DE die Ebene der ersten Polarisation vorstellen. Wenn nun die Linie PQ den Winkel APB habirt, so stellt (nach §. 53. II.) PQ die Polarisationsebene des Lichtstrahls vor und es ist $PQA = \varphi + \beta$, und da auch nahe

$$\text{Sin. m} = \frac{AP}{r} \text{ und Sin. n} = \frac{BP}{r}$$

ist, so hat man

$$\varDelta = \tfrac{1}{2}.\frac{TCa^3}{\nu r^2}.AP.BP.$$

II. Was nun die Gestalt der Streifen betrifft, die auch hier über die Ringe hinziehn, so wird man diese Streifen erhalten, wenn man den Factor von $\text{Sin.}^2 \frac{\pi\varDelta}{\lambda}$ in dem letzten Ausdrucke gleich Null setzt, das heifst, wenn man annimmt

$$\text{Sin.} 2\varphi = 0 \text{ oder auch Sin.} 2(\varphi + \Theta) = 0,$$

woraus folgt

$$\text{Tang.} 2(\varphi + \beta) = \text{Tang.} 2\beta \text{ oder Tg.} 2(\varphi + \beta) = \text{Tg.} 2(\beta - \Theta).$$

Bezieht man nun P auf den (die Linie AB halbirenden) Punct C durch die rechtwinkligen Coordinaten x und y, wo x in der Richtung CA und y darauf senkrecht ist, und setzt man $CA = b$, so hat man

$$\text{Tang. PAF} = \frac{y}{x - b} \text{ und Tang. PBF} = \frac{y}{x + b}$$

und daher

$$\text{Tang.} 2(\varphi + \beta) = \text{Tang. 2PQA} = \text{Tang.}(\text{PBF} + \text{PAF})$$

oder, was dasselbe ist,

$$\text{Tang.} 2(\varphi + \beta) = \frac{\text{Tang. PBF} + \text{Tang. PAF}}{1 - \text{Tang. PBF . Tang. PAF}}.$$

Substituirt man in der letzten Gleichung die vorhergehenden Werthe von Tang. PAF und Tang. PBF, so erhält man

$$\text{Tang.} 2(\varphi + \beta) = \frac{2xy}{x^2 - b^2 - y^2}.$$

Demnach sind jene Streifen durch die zwei Gleichungen bestimmt

$$\frac{2xy}{x^2-b^2-y^2}=\text{Tang.}\,2\beta \text{ und } \frac{2xy}{x^2-b^2-y^2}=\text{Tang.}\,2(\beta-\Theta)$$

oder, was dasselbe ist, durch die zwei Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} (x^2-b^2-y^2)\ \text{Tang.}\,2\beta\ -2xy=0 \\ \text{und} \\ (x^2-b^2-y^2)\,\text{Tang.}\,2(\beta-\Theta)-2xy=0 \end{array}\right\}.$$

Allein diese zwei Gleichungen gehören offenbar zu Hyperbeln, deren Mittelpunct C ist. Da in beiden $y=0$ für $x=\pm b$ wird, so gehn diese Hyperbeln durch die Puncte A und B. Die Lage ihrer Asymptoten aber wird man erhalten, wenn man die Coordinaten x und y sehr grofs gegen b annimmt. Diese Annahme giebt in der ersten Gleichung

$$\frac{y^2}{x^2}+\frac{2y}{x}\,\text{Cotg.}\,\beta-1=0,$$

das heifst,

$$\frac{y}{x}=+\text{Tang.}\,\beta \text{ oder }=-\text{Cotg.}\,\beta,$$

und ebenso in der zweiten Gleichung

$$\frac{y}{x}=+\text{Tang.}\,(\beta-\Theta) \text{ oder }=-\text{Cotg.}\,(\beta-\Theta),$$

woraus folgt, dafs beide Hyperbeln rechtwinklig sind und dafs die Asymptoten der einen Hyperbel zu der Ebene der ersten Polarisation parallel und senkrecht sind, während die Asymptoten der andern gegen jene um den Winkel Θ geneigt sind. Endlich ist noch die Intensität des Lichts in diesen Streifen

$$(I)=a^2\ \text{Cos.}^2\,\Theta.$$

III. Ist $\beta=0$ oder 90°, so ist Tang. $2\beta=0$ und die vorhergehenden ersten Hyperbeln verwandeln sich in gerade Linien, deren eine die Richtung FG hat, die andere darauf senkrecht steht und durch den Punct C geht. Ebenso, wenn $\beta=\Theta$ oder $90^\circ+\Theta$ ist, so gehn die zweiten Hyperbeln in ein ähnliches geradliniges Kreuz über. Welches auch der Werth von β seyn mag, ist $\Theta=0$ oder 90°, so fallen die zwei Hyperbeln auf einander, aber der Werth $\Theta=0$ giebt die Intensität a^2 oder einen sehr hellen Streifen und der Werth $\Theta=90^0$ giebt die Intensität Null oder einen ganz dunklen Streifen.

IV. Die Gestalt der Ringe selbst aber ist durch die Variation des Werthes des letzten Gliedes

$$-\text{Sin.}2\varphi\,\text{Sin.}2(\varphi+\Theta).\text{Sin.}^2\frac{\pi\Delta}{\lambda}$$

jenes Ausdrucks von (I) gegeben. Ist nämlich

$$\varphi \begin{matrix}>0\\<90^\circ-\Theta\end{matrix}\Big\}\text{ oder }\varphi\begin{matrix}>90^\circ\\<180^\circ-\Theta\end{matrix}\Big\}\text{ oder }\varphi\begin{matrix}>180^\circ\\<270^\circ-\Theta\end{matrix}\Big\}$$

$$\text{oder }\varphi\begin{matrix}>270^\circ\\<360^\circ-\Theta\end{matrix}\Big\},$$

wo die Grenzen dieser Gröfsen durch die bereits verzeichneten Hyperbeln bestimmt sind, so ist die Intensität am gröfsten für

$$\Delta=0,\ \lambda,\ 2\lambda,\ 3\lambda\ \ldots$$

und am kleinsten für

$$\Delta=\tfrac{1}{2}\lambda,\ \tfrac{3}{2}\lambda,\ \tfrac{5}{2}\lambda\ \ldots.$$

Ist aber $\varphi\begin{matrix}>90^\circ-\alpha\\<90^\circ\end{matrix}\Big\}$, so ist die Intensität am gröfsten für

$$\Delta=\tfrac{1}{2}\lambda,\ \tfrac{3}{2}\lambda,\ \tfrac{5}{2}\lambda\ \ldots$$

und am kleinsten für

$$\Delta=0,\ \lambda,\ 2\lambda,\ 3\lambda\ \ldots$$

Ebenso wird man leicht die Fälle für $\Theta=0$ oder $\Theta=90^\circ$ u. s. w. entwickeln.

V. Daraus folgt, dafs das Bild im Allgemeinen aus Ringen, die durch andere Streifen durchbrochen sind, bestehn wird, so zwar, dafs die hellen Bogen auf einer Seite der Streifen den dunklen auf der andern Seite entsprechen (die Fälle $\Theta=0$ oder $\Theta=90^\circ$ ausgenommen) und dafs die Gestalt dieser Ringe durch die Gleichung

$$\Delta=\lambda.\text{Const.}$$

bestimmt werden wird, das heifst (nach Nr. I.), durch die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{\text{T C a}^3}{\nu\,\text{r}^2}\,\text{AP.PB}=\lambda.\text{Const.},$$

wo die Constante die Ordnung der Ringe bestimmt. Die durch diese Gleichung

$$\text{AP.PB}=\frac{2\nu\,\text{r}^2\lambda}{\text{T C a}^3}.\text{Const.}$$

bestimmten Curven sind von derjenigen Art, die man *Lemniscaten* nennt, wo nämlich das *Product* der beiden Radien, die aus zwei festen innern Puncten an irgend einen Punct der Curve gezogen werden, eine constante Gröſse ist, während z. B. bei der Ellipse die *Summe* der zwei Radien constant ist. Ist die Constante sehr klein, so werden diese Curven sehr nahe Kreise seyn, die A und B zu ihren Mittelpuncten haben. Wenn diese Constante wächst, so erweitern sich diese Kreise gegen die Seite von C hin. Für eine noch gröſsere Constante gehn je zwei dieser Curven in eine der ∞ ähnliche Figur über, wo der Durchschnittspunct der Bogen in den Punct C fällt; weiter gehn sie wieder in einzelne Figuren über, die einem zu beiden Seiten eingedrückten Kreise ähnlich sind, und endlich nehmen sie die Gestalt eines zu beiden Seiten schwach abgeflachten Kreises an. Alle diese Gestalten sind bereits in der Fig. 104 (des Art. *Polarisation* Seite 789) dargestellt worden.

VI. Da das Product AP.BP gleich einer Constante ist, welche die Ordnung der Ringe bestimmt, so werden sich die Halbmesser der auf einander folgenden Ringe, so lange sie noch klein sind, nahe wie die Zahlen 1, 2, 3 . . verhalten. In dieser Beziehung sind sie also verschieden von jenen, die wir oben (§. 66.) für einen einaxigen Krystall gleich $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$... gefunden haben. Da sich ferner das Product AP.BP, wenn alles Uebrige gleich ist, wie verkehrt die Gröſse T verhält, so wird eine dickere Platte desselben Krystalls kleinere Ringe geben, als eine dünne, und da ebenso das Product AP.BP, alles Uebrige gleich gesetzt, sich wie verkehrt die Gröſse C verhält, so werden die Ringe kleiner seyn für einen Krystall, der eine groſse Differenz der Geschwindigkeiten der beiden Strahlen giebt. Da endlich dasselbe Product AP.BP, alles Andere gleich genommen, sich direct wie die Wellenlänge λ verhält, so werden alle oben erwähnte Curven für die rothen Strahlen gröſser seyn, als für die violetten.

VII. Noch muſs hier eine sonderbare und bisher noch nicht bemerkte Differenz zwischen den Curven von verschiedenen Farben erwähnt werden, daſs nämlich die optischen Axen für die verschiedenen Farben nicht coincidiren, während doch in allen andern Beziehungen die Stellenveränderun-

gen rücksichtlich dieser zwei Axen symmetrisch sind. So können die rothen Axen mit jeder andern einen kleinern Winkel bilden, als z. B. die violetten Axen, aber der Winkel zwischen einer rothen und einer violetten Axe ist doch derselbe, wie der zwischen einer andern rothen und einer andern violetten Axe. In einigen wenigen Fällen kann dieses bis auf zehn Grade gehn. Die Folge davon ist, daſs die Farben in verschiedenen Theilen der Ringe von derselben Ordnung auch verschieden sind. Bei dem Salpeter z. B. sind die rothen Axen weniger geneigt, als die violetten. Da nun die rothen Ringe breiter sind, als die violetten, so werden wir, wenn wir die auſserhalb von A und B liegenden Puncte betrachten, solche Lagen finden, wo entweder alle Farben unter einander gemischt, oder keine einzige derselben da ist, d. h., wo alle Ringe nahe weiſs oder alle schwarz sind. Aber bei denselben Ringen zwischen den Puncten A und B werden die rothen die andern violetten stark überwiegen und so werden verschieden gefärbte Ringe sichtbar werden.

Bisher wurde stillschweigend vorausgesetzt, daſs die Axen der verschiedenen Farben alle in derselben Ebene liegen. Aber Herschel hat gefunden, daſs dieses bei einigen Krystallen, dem Borax z. B., nicht der Fall ist, obschon, so viel man bis jetzt weiſs, doch alle Ebenen durch die Linie gehn, welche den Winkel der zwei Axen halbirt.

71) Bestimmung der Bilder eines zweiaxigen Kystalls, wenn Fresnel's Rhombus zwischen die beiden Spiegel gelegt wird.

Legen wir nun den Rhombus von Fresnel (§. 57. III.) zwischen die polarisirende Ebene C des Polarisationsinstruments und zwischen die in §. 70. erwähnte zweiaxige Krystallplatte und suchen wir auch hier die Gestalt des Bildes, so hat man nach §. 69. für die Intensität des Lichts in irgend einem Puncte desselben

$$(I) = \tfrac{1}{2} a^2 \left[1 - \text{Sin.}\, 2(\varphi + \Theta)\, \text{Sin.}\, \frac{2\pi\Delta}{\lambda}\right].$$

Dieses giebt demnach einen die Ringe unterbrechenden Streifen für

$$\text{Sin.}\,2(\varphi+\Theta)=0,$$

und dieses ist dieselbe Gleichung, die oben (§. 70. II.) die zweiten Hyperbeln bestimmte, welche für $\beta=\Theta$ oder $\beta=90^0+\Theta$ in ein Kreuz übergehn. Ist nun $\text{Sin.}\,2(\varphi+\Theta)$ positiv, so wird die Intensität ein Maximum für

$$\varDelta=\frac{3\lambda}{4},\ \frac{7\lambda}{4},\ \frac{11\lambda}{4}\ldots$$

und ein Minimum für

$$\varDelta=\frac{\lambda}{4},\ \frac{5\lambda}{4},\ \frac{9\lambda}{4}\ldots,$$

und das Gegentheil tritt ein, wenn $\text{Sin.}\,2(\varphi+\Theta)$ negativ ist. Diese Räume sind durch jene Streifen getrennt, so dafs daher die hellen Ringe auf der einen Seite des Streifens den dunklen Ringen auf der andern Seite entsprechen. Die Gestalt der Ringe aber ist ganz dieselbe wie in §. 70. V.

72) Gestalt der Bilder für willkürlich geschnittene Krystallplatten.

Nehmen wir den allgemeinen Fall, wo die Krystallplatte aus einem ein- oder zweiaxigen Krystalle auf eine ganz willkürliche (von den besondern in §. 50. und §. 62. angeführten Arten verschiedene) Art geschnitten und dann zwischen die beiden Ebenen C und K des Polarisationsinstruments gelegt wird. Der allgemeine Ausdruck der Intensität wurde oben (§. 65.) gleich

$$(\mathrm{I})=\tfrac{1}{2}a^2\left[1+\text{Cos.}2\varphi\,\text{Cos.}2(\varphi+\Theta)+\text{Sin.}2\varphi\,\text{Sin.}2(\varphi+\Theta)\,\text{Cos.}\frac{2\pi\varDelta}{\lambda}\right]$$

gefunden. Betrachten wir von diesem Ausdruck nur die vorzüglichsten Fälle und setzen wir $\Theta=90°$, wodurch man erhält

$$(\mathrm{I})=\tfrac{1}{2}a^2\,\text{Sin.}^2\,2\varphi\left[1-\text{Cos.}\frac{2\pi\varDelta}{\lambda}\right],$$

wo hier durch $\varDelta$ der Raum verstanden wird, um welchen der eine, z. B. der gewöhnliche Strahl, mehr retardirt wird, als der aufsergewöhnliche, und auf welchen daher der Ausdruck von §. 70. noch anzuwenden ist, wenn man nur bemerkt, dafs in demselben R den Winkel des Strahls mit der Axe bezeichnet.

I. Ist die Platte des ein- oder zweiaxigen Krystalls von beträchtlicher Dicke, so werden alle Spuren von Farbe gänzlich verschwinden, wie wir auch schon oben (§. 63. IV.) bemerkt haben. Ist nämlich Δ eine schon beträchtliche Gröſse, so wird schon eine sehr kleine Aenderung von λ die Gröſse $\frac{2\pi\Delta}{\lambda}$ um 2π ändern können, und so würde dann in jedem kleinen Theile des Bildes die Gröſse Cos. $\frac{2\pi\Delta}{\lambda}$ alle ihre verschiedenen Werthe haben, die positiven so wie die negativen, und die Intensität würde daher gleich $\frac{1}{2}a^2 \text{Sin.}^2 2\varphi$ seyn, ein Ausdruck, der für alle Farben derselbe bleibt. Wenn die Platte in ihrer Ebene rundum gedreht wird, so variirt φ von 0 bis 360° und das Licht wird viermal gänzlich verschwinden, so wie es wieder für $\varphi = 45°$, 135°, 225° und 315° am hellsten erscheint.

II. Jedoch wird man auch mit dickeren Platten noch farbige Bilder erzeugen können, wenn man nämlich zwei solche nahe gleichdicke Platten, die beide aus demselben Krystalle und auf dieselbe Weise geschnitten sind, so über einander legt, daſs sie sich kreuzen. Denn ist Δ die Retardation des gewöhnlichen Strahls über den auſsergewöhnlichen in der ersten und Δ' in der zweiten Platte, so wird also die Gröſse $\Delta - \Delta'$ nahe gleich Null seyn. Werden nun die Platten nahe unter rechten Winkeln auf einander gelegt, so wird der gewöhnliche Strahl der ersten Platte für die zweite der auſsergewöhnliche seyn oder Δ' wird die Beschleunigung in der zweiten Platte für dieselbe Vibration seyn, für welche Δ die Retardation in der ersten Platte ist, so daſs daher die ganze Retardation gleich $\Delta - \Delta'$ und die eigentliche Intensität

$$(I) = \tfrac{1}{2} a^2 \text{Sin.}^2 2\varphi \left[1 - \text{Cos.}^2 \frac{\pi(\Delta - \Delta')}{\lambda}\right]$$

oder auch

$$(I) = a^2 \text{Sin.}^2 2\varphi . \text{Sin.}^2 \frac{\pi(\Delta - \Delta')}{\lambda}$$

seyn wird, und dieser Werth von $\frac{\pi(\Delta - \Delta')}{\lambda}$ kann allerdings so klein seyn, daſs er für die verschiedenen Farben nur um einen Bruch von π oder doch um ein geringes Multiplum von

π verschieden ist wo demnach wieder lebhafte Farben zum Vorschein kommen.

III. Auch wird man durch Platten von blofs einaxigen Krystallen farbige Bilder erzeugen können, wenn man zwei Platten von Krystallen über einander legt, von denen der eine zur positiven, der andere zur negativen Classe gehört, wie z. B. Quarz und Beryll. Denn in dem einen dieser Krystalle ist der gewöhnliche, in dem andern der aufsergewöhnliche Strahl am meisten retardirt, und da der gewöhnliche Strahl des einen Krystalls auch den gewöhnlichen des andern bildet, so ist der in dem ersten Krystalle am meisten retardirte Strahl zugleich derjenige, der in dem andern am wenigsten retardirt wird; sonach kann denn auch hier wieder die Differenz der Retardation so klein, als man will, gemacht werden.

IV. Doch werden in allen hier erwähnten Fällen die Bilder nicht mehr aus kleinen regelmäfsig angeordneten Ringen, sondern aus scheinbar unordentlich durch einander laufenden helleren und dunkleren Streifen bestehn.

V. Die obige Gleichung

$$(I)=\tfrac{1}{2}a^2\left[1+\mathrm{Cos.}2\varphi\,\mathrm{Cos.}2(\varphi+\Theta)+\mathrm{Sin.}2\varphi\,\mathrm{Sin.}2(\varphi+\Theta)\,\mathrm{Cos.}\frac{2\pi\Delta}{\lambda}\right]$$

geht, wenn man in ihr $90^\circ+\Theta$ statt Θ setzt, in die folgende über

$$(I)=\tfrac{1}{2}a^2\left[1-\mathrm{Cos.}2\varphi\,\mathrm{Cos.}2(\varphi+\Theta)-\mathrm{Sin.}2\varphi\,\mathrm{Sin.}2(\varphi+\Theta)\,\mathrm{Cos.}\frac{2\pi\Delta}{\lambda}\right].$$

Wenn man also bei solchen Krystallen, die das Licht in zwei unter rechten Winkeln getrennte Strahlen auflösen, die analysirende Platte K des Polarisationsinstruments um 90^0 dreht, so ist die Intensität des Bildes für jeden Punct die complementäre zu derjenigen, die vor der Drehung statt hatte, weil die Summe der beiden letzten Ausdrücke gleich a^2 ist. Ist also ein Punct des Bildes in der einen Lage schwarz, so wird er in der andern weifs seyn, und sieht man in der einen Lage einen Ueberschufs von Roth und einen Mangel an Blau, so wird in der andern das Roth fehlen und das Blau überwiegen u. s. w.

73) Allgemeine Bemerkungen.

Aus dem Vorhergehenden ist klar, dafs man alle Körper in Beziehung auf die von ihnen ausgehenden Lichterscheinungen in zwei wesentlich von einander verschiedene Classen eintheilen kann. Die einen brechen den Lichtstrahl auf eine sehr einfache Weise so, dafs die Sinus der Incidenz- und Refractionswinkel ein constantes Verhältnifs unter sich behalten, während die andern Körper den auf sie fallenden und durch sie gehenden Lichtstrahl in zwei Theile spalten, von welchen der eine (gewöhnliche) Strahl auf die eben erwähnte einfache Weise, der andere (aufsergewöhnliche) Strahl aber nach ganz andern Gesetzen gebrochen wird. Man glaubt, dafs die Körper der ersten Classe in ihrem Innern homogen gebildet sind und dafs ihre Elemente nach allen Richtungen dieselbe Elasticität besitzen, während dieses bei den Körpern der zweiten Classe, in welche die meisten unserer krystallinischen Körper gehören, nicht der Fall seyn soll. In einer krystallinischen Masse sind die kleinsten Theile derselben wahrscheinlich durch regelmäfsige Spaltungen oder Klüftungen getrennt, so dafs daher diese Massen von andern flüssigen und feinen Medien in der einen Richtung leichter, als in anderen durchdrungen werden können und dafs auch wohl die Elasticität im Innern dieser Massen von einem ihrer Puncte zum andern mit der Richtung derselben veränderlich seyn mag.

Bemerken wir zuerst, dafs nicht alle Krystalle in diese zweite Classe gehören. Alle diejenigen müssen nämlich noch zur ersten Classe gezählt werden, bei denen die primitive Form des Krystalls ein *regelmäfsiges Polyeder* ist, d. h. ein Würfel, dessen Seiten alle Quadrate sind, oder ein Oktaeder, dessen Seiten alle aus gleichseitigen Dreiecken bestehn; zur zweiten Classe aber gehören alle die Krystalle, deren primitive Form ein Rhomboid (wie der isländische Kalkspath) oder ein rechtwinkliges Parallelepipedum mit zwei gleichen Seiten ist. Es giebt aber auch Krystalle, deren primitive Form ein ganz unregelmäfsiges Polyeder ist, und durch solche wird gleichfalls ein Lichtstrahl in zwei andere gespalten, von welchen keiner die gewöhnliche Refraction erleidet, sondern wo *beide* nach ganz andern Gesetzen gebrochen werden. Diese letzten fallen hier ganz aufser Betrachtung.

Allein diese Körper der zweiten Classe, d. h. also die aus regelmäfsigen Polyedern bestehenden Krystalle, werden selbst wieder in zwei Gattungen geschieden. Die erste Gattung hat immer nur eine solche Seite, für welche ein auf diese Seite normal einfallender Lichtstrahl *ohne alle Spaltung* durchgeht, und die zweite Gattung hat zwei solcher Seiten. Jene wurden daher oben einaxige und diese zweiaxige Krystalle genannt, indem man unter der Benennung *Axe* die Richtung des erwähnten nicht gespaltenen Strahls versteht. Man setzt dabei voraus, dafs schon in den kleinsten Elementen, aus welchen diese ganzen Krystallmassen gebildet werden, solche Axen vorhanden sind, deren Richtungen alle unter sich parallel laufen, so dafs also die erwähnte Axe des ganzen Krystalls nur eine imaginäre Linie von bestimmter Richtung ist, die nämlich mit der Axe jener Elemente parallel läuft.

Ueberhaupt scheinen alle ponderablen Körper, feste, flüssige und luftförmige, aus Elementen oder Molecülen (kleinsten Theilchen) zu bestehn, die durch anziehende und abstofsende Kräfte von einander in bestimmten Entfernungen gehalten werden. Wenn der statische Zustand des Gleichgewichts dieser Elemente durch irgend eine äufsere Einwirkung, z. B. durch einen Stofs oder Druck, durch Erwärmung u. s. w., gestört wird, so tritt sofort eine Reihe von dynamischen Erscheinungen (von Bewegungen dieser Elemente) hervor, die so lange dauern, bis der Körper wieder zu seinem vorigen Gleichgewicht zurückgekommen ist. In Folge dieser äufsern Einwirkung fangen die Elemente des Körpers an, sich zu nähern oder sich von einander zu entfernen und dadurch, gleich einem gestörten Pendel, um den Ort ihres Gleichgewichtes in isochronen Bewegungen auf und ab zu schwingen, deren Amplitüden immer kleiner werden, bis sie endlich ganz verschwinden. Von diesen inneren Bewegungen der Körper, von diesen Schwingungen ihrer kleinsten Theile bilden diejenigen, welche durch den Sinn des Gehörs zu unserer Perception gebracht werden, den *Ton*, so wie die, welche auf unseren Gesichtssinn wirken, das *Licht* und die *Farben* erzeugen. Es ist aber möglich, es ist sogar sehr wahrscheinlich, dafs es noch andere Gattungen dieser Schwingungen gebe, die für andere, den Menschen versagte Sinne bestimmt sind, wie wir denn auch schon im Vorhergehenden Gelegenheit ge-

habt haben, die Spuren solcher uns nicht wahrnehmbaren Eigenschaften des Lichtes zu bemerken.

Allein auf welche Weise und durch welche Mittel werden jene zwei uns allein bekannten Oscillationen, die im Innern der Körper vor sich gehn, dem Organ des Gehörs und des Gesichts zugeführt? Denn dafs dieser Uebergang nicht unmittelbar geschieht, ist für sich klar. Mit andern Worten: ist die *ponderable Materie* die einzige in der Natur und sind ihre Elemente die einzigen, aus welchen das Weltall zusammengesetzt ist? Die Undurchdringlichkeit der Materie und die Erscheinungen der allgemeinen Schwere lassen über die Existenz *dieser* Materie keinen Zweifel übrig. Aber es giebt noch andere Erscheinungen, die auf eine zweite, der Schwere nicht unterworfene Materie deuten, die nicht weniger, als jene, durch die ganze Natur verbreitet ist. Die Phänomene der Wärme, des Lichts, der Elektricität und selbst die des Magnetismus lassen sich aus jener ponderablen Materie allein ebenso wenig genügend erklären, als der oben erwähnte Zustand des Gleichgewichts der inneren Elemente der Körper für bestimmte Distanzen derselben, als die Schwingungen, welche diese Elemente um den Ort jenes Gleichgewichtes machen, sobald das letztere gestört wird, und endlich als jene allgemeine Ursache, die sich der Molecülar-Attraction widersetzt, und aus welcher die Dichtigkeit, die Gestalt und überhaupt der jedesmalige Zustand des Körpers in allen den Verhältnissen hervorgeht, denen er ausgesetzt wird. Diese allgemeine Ursache aber, worin sie auch zu suchen seyn mag, scheint doch von der ponderablen Materie unabhängig und gleichsam für sich bestehend zu seyn, da selbst ihre noch so oft wiederholten Einwirkungen auf jene Materie nicht im Stande sind, die charakteristische Eigenschaft derselben, das *Gewicht*, zu verändern und da unter den Einwirkungen dieses Agens jene blofs ponderablen Atome der Körper eine passive Rolle zu spielen scheinen. Diese Betrachtungen führen daher unmittelbar auf die Annahme von noch anderen, imponderablen Agentien in der Natur, da ohne sie die Erscheinungen der Wärme, des Lichts und der Elektricität nicht zu erklären seyn würden. Soll man aber für jedes dieser drei Phänomene eine eigene, oder darf man für alle nur eine einzige, ihnen allen gemeinsame Ursache voraussetzen, die blofs durch ihre Modi-

ficationen jene Erscheinungen hervorbringt? Die Antwort auf diese Frage wird erst aus der vollständigen Ergründung eines jeden dieser Phänomene für sich und besonders aus der Ergründung derjenigen Eigenschaften hervorgehn, die allen dreien gemeinschaftlich sind. Die Undulationstheorie des Lichtes scheint uns den Weg zur Auflösung dieses Problems zu bahnen, da sie uns, wie wir im Vorhergehenden gesehn haben, auf die Annahme eines durch den ganzen Weltraum verbreiteten und von der Schwere ganz unabhängigen, äuſserst dünnen und höchst elastischen Fluidums beinahe mit derselben Sicherheit und Nothwendigkeit führt, als uns die Undurchdringlichkeit und die allgemeine Schwere zur Annahme einer ebenfalls durch die ganze Natur verbreiteten ponderablen Materie gezwungen hat. Die neuesten Versuche der Physik haben es bereits sehr wahrscheinlich gemacht, daſs dasselbe Fluidum, aus welchem wir die sämmtlichen Erscheinungen des Lichts mit so überraschender Vollkommenheit erklären, auch als die erste Ursache der sämmtlichen Wärmephänomene zu betrachten sey, daſs die sogenannte *strahlende Wärme* ihren Ursprung ebenfalls in Aetherschwingungen hat, die sich aber von den das Licht erzeugenden Schwingungen durch besondere Eigenheiten unterscheiden, und daſs die *statische Wärme* der Körper bloſs in der gröſseren oder geringeren Menge des in diesen Körpern eingeschlossenen Aethers besteht.

Uebrigens wollen wir zum Schlusse dieses Gegenstandes gestehn, daſs unsere Kenntnisse desselben, so sehr sie auch besonders in den letzten Zeiten erweitert worden sind und so gut auch die Beobachtungen mit der bisher aufgestellten Theorie übereinstimmen, doch noch viel zu neu sind, um sie schon jetzt als vollständig betrachten zu können. Konnten wir doch nicht einmal die dieser Theorie zu Grunde liegenden Gleichungen ((A) des §. 14.) zwischen partiellen Differentialen der zweiten Ordnung anwenden, ehe wir ihnen durch Abkürzungen und Suppositionen, auf die wir nicht durch den Gegenstand selbst, sondern nur durch die Schwäche unserer Analyse geführt wurden, eine einfachere Gestalt (m. s. die Gleichungen (B) des §. 14. I.) gegeben hatten. Selbst von diesen letzten konnten wir die wahren und vollständigen Integrale (m. s. Gleichung (C) des §. 15. IV. oder Gleichung

(1), (3) der Anmerkung II. und die Integrale der Anmerkung III. des §. 15.) wegen ihrer zu grofsen Allgemeinheit nicht anwenden, sondern mufsten uns mit dem einfachsten aller dieser Integrale, nämlich mit dem Ausdrucke (m. s. §. 15. Anmerk. I. Gleichung (2))

$$A \text{ Sin.} \left[\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - x) + C\right]$$

begnügen, der zwar auch jenen Differentialgleichungen der zweiten Ordnung genügt, der aber doch nur als ein sehr specieller Fall des wahren und allgemeinen Integrals dieser Gleichungen betrachtet werden mufs, daher denn auch Alles, was in der Folge auf diesem Ausdrucke als auf einer Basis erbaut worden ist, demselben Vorwurfe eines Mangels an Allgemeinheit ausgesetzt bleiben mufs. Mit andern Worten, wir haben die Vibrationen des Aethers von derselben Form wie die eines Pendels angenommen, das zu beiden Seiten seiner Gleichgewichtslage in unendlich kleinen, isochronen Schwingungen auf und nieder geht, aber wodurch ist die Richtigkeit dieser Annahme verbürgt? Die oben erwähnte Uebereinstimmung der Beobachtungen mit der Theorie zeigt nur, dafs jene Annahme als eine Näherung zur Wahrheit und auch nur für *diese* Beobachtungen als eine Näherung betrachtet werden kann, während sie vielleicht eine grofse Anzahl von Erscheinungen nur sehr unvollständig oder gar nicht darstellt, die wir entweder noch nicht beobachtet haben, oder auch, der Einrichtung unserer Sinne wegen, gar nicht beobachten können. Wir haben durch die Vibrationen des Aethers, die durch den vorhergehenden Ausdruck wenigstens genähert dargestellt werden, die Erscheinungen der Refraction, der Reflexion, der Interferenz, der Diffraction des Lichts u. s. w. mit einer uns genügenden Genauigkeit darstellen können. Allein derselbe Aether kann, wie die erwähnten allgemeinen Integrale der Gleichungen (A) des §. 14. zeigen, ohne Zweifel noch sehr viele andere, von jenen ganz verschiedene Vibrationen annehmen, von deren Existenz wir bisher ebenso wenig wissen, als von den Erscheinungen, welche sie hervorbringen. Auf welche Weise können wir z. B. die Annahme, die allem Vorhergehenden zum Grunde liegt, verbürgen, dafs die *Farbe* blofs von der *Länge* der Lichtwelle abhängt? Könnte sie

nicht ebenso gut die Folge irgend einer andern Eigenheit dieser Welle, könnte sie nicht selbst das Resultat von anderen uns noch gänzlich unbekannten Vibrationen seyn, die vielleicht alle bei jeder Störung des Gleichgewichtes zu gleicher Zeit entstehn und von denen bald die eine, bald die andere vorherrschend ist? Wie es sich aber auch mit diesen und allen übrigen Fragen, die sich dem aufmerksamen Leser dieses Artikels von selbst aufdringen werden, verhalten mag, wir wollen uns mit dem Glücke begnügen, in einer Zeit gelebt zu haben, wo man in der Erkenntnifs einer der schönsten Seiten der Natur so weit vorgedrungen ist, unsern späten Nachkommen und der künftigen Vervollkommnung der mathematischen Analyse überlassend, das zu vollenden, was wir begonnen haben. In dieser Erwartung wird es auch erlaubt seyn, uns der guten Hoffnung hinzugeben, dafs unsere Nachfolger nebst der Erweiterung der Kenntnifs der Natur, die schon an sich selbst als ein reiner Gewinn zu achten ist, auch über die uns so lange verborgene innere Construction und Organisation der Körper und der Wirkungen ihrer Elemente auf einander genügende Aufschlüsse erhalten werden. Nachdem uns Haüy's schöne Entdeckungen die regelmäfsige Gestalt dieser Elemente der krystallinischen Körper kennen gelehrt hat und nachdem uns die Phänomene der doppelten Brechung des Lichtes durch dieselben Körper ein Mittel an die Hand gegeben haben, jene Gestalten und ihre Wirkungen gleichsam im Grofsen zu sehn und durch Hülfe der Analyse mit Sicherheit zu messen, werden wir uns der Versuchung nicht weiter entziehn können, diesen bisher so dunklen und unzugänglichen Weg noch weiter zu verfolgen. Denn welches auch der Werth der Hypothese eines Alles durchdringenden Aethers und der auf dieser Basis bereits aufgeführten Theorie seyn mag, die Eigenschaft allein, dafs die Erscheinungen der Polarisation nur bei krystallinischen Körpern statt haben, und vielleicht noch mehr der Umstand, dafs auch solche Körper, welche in ihrem natürlichen Zustande jene wunderbaren Farbenbilder nicht zeigen, wie Glas und mehrere Metalle, doch durch Compression oder einseitige Erwärmung (nach §. 61. IV. und V.) zur Erzeugung solcher Bilder, also gleichsam zum Uebergang in die krystallinische Organisation gezwungen werden können, läfst nicht weiter daran zweifeln, dafs diese und vielleicht alle

Körper der Natur aus einem sehr regelmäſsigen Gewebe bestehn, und daſs die Elemente dieses Gewebes einer bestimmten Form, einer bestimmten Anordnung und endlich auch einem bestimmten Gesetze ihrer gegenseitigen Attraction unterworfen sind, deren genaue Erkenntniſs uns in künftigen Zeiten für die Körper der Natur im Kleinen ebenso wichtig und fruchtbringend seyn wird, als es die Entdeckung des Gesetzes der allgemeinen Gravitation für dieselben Körper im Groſsen bereits gewesen ist.

L.

Unschattige.

Ascii; Asciens; *Ascii.* So heiſsen die Bewohner der heiſsen Zone, in welcher alle senkrecht stehende Körper zu der Zeit, wo die Sonne in ihrem Zenithe ist, um Mittag keinen Schatten werfen. Die Bewohner des Aequators sind unschattig an den beiden Tagen der Nachtgleichen; die Bewohner der beiden Wendekreise an dem Tage des Solstitiums, nämlich die Bewohner eines jeden Wendekreises an dem Tage ihres Sommersolstitiums; endlich die Bewohner eines jeden anderen Orts der heiſsen Zone sind dann unschattig, wenn die Declination der Sonne der geographischen Breite ihres Wohnorts gleich ist, an welchem Tage sie nämlich wieder die Sonne in ihrem Zenithe haben [1]. *L.*

Untergang.

Untergang der Gestirne; *Occasus;* Coucher; *Setting;* das Herabsteigen der Gestirne unter dem Horizont des Beobachters. Die Berechnung dieses Untergangs ist schon oben [2] gezeigt worden. Kennt man die Zeit T der Culmination und die Zeit D der Dauer der Sichtbarkeit oder den Tagbogen des Gestirns, so ist die Zeit seines

Aufgangs . . . . $= T - \frac{1}{2} D$ und die seines

Untergangs . . . . $= T + \frac{1}{2} D$.

---

1 Vergl. Art. *Umschattige.*

2 S. Art. *Aufgang.* Bd. I. S. 516. und *Tagbogen.* Bd. IX. S. 80.

Für die Sonne ist T = 12 Uhr, wenn man die Zeit des Auf- und Untergangs in *wahrer Sonnenzeit* ausdrücken will. Für alle Gestirne überhaupt ist T gleich der Rectascension derselben, wenn man die Zeit des Auf- und Untergangs in *Sternzeit* ausdrücken will. Wie man dabei auf die Refraction und auf die eigene Bewegung der Gestirne Rücksicht nehmen soll, ist auch bereits in den zwei angeführten Artikeln gezeigt worden, wozu man noch den Art. *Strahlenbrechung*[1] nachsehn kann. Auf eine blofs mechanische Weise, aber ohne auf Genauigkeit Anspruch zu machen, kann man den Auf- und Untergang der Gestirne sehr leicht mit Hülfe eines Himmelsglobus finden. Zu diesem Zwecke stellt man den Globus auf die Polhöhe des Orts, bringt das Gestirn unter den Meridian und stellt den Stundenzeiger auf zwölf Uhr, wenn das Gestirn die Sonne ist. Dann dreht man den Globus gen Ost, bis der Ort der Sonne im Horizonte erscheint, wo sodann die Rose die wahre Zeit des Aufgangs zeigt. Ebenso erhält man die wahre Zeit des Untergangs der Sonne, wenn man den Globus gen West so lange dreht, bis der Ort der Sonne wieder den Horizont berührt. Für alle andere Gestirne verfährt man ebenso, nur mit dem Unterschiede, dafs man zuerst, nachdem man das Gestirn unter den Meridian des Globus gestellt hat, die Rose auf die Zeit bringt, welche den Augenblick der Culmination (in mittlerer Zeit) des Gestirns anzeigt, wodurch man dann ebenfalls die *mittlere Zeit* des Auf- und Untergangs des Gestirns erhält. Einfacher noch ist es, die Rose, nachdem das Gestirn unter den Meridian gebracht worden ist, auf diejenige Zeit zu stellen, welche die Rectascension des Gestirns anzeigt, wo man dann durch die Drehung des Globus nach Ost und West die *Sternzeit* des Auf- und Untergangs des Gestirns erhält. Sey p die Distanz des Gestirns vom Pole des Aequators und φ die Polhöhe oder die geographische Breite des Beobachters. Ist p kleiner als φ, so geht das Gestirn für den Beobachter nicht mehr auf und unter, sondern es bleibt immer über seinem Horizonte sichtbar. Ist aber p gröfser als $180° - \varphi$, so geht der Stern für den Beobachter nicht mehr auf, oder er ist für diesen Ort der Erde oder eigentlich für den ganzen Parallelkreis des Beobachters immer unsichtbar.

1 Bd. VIII. S. 1146.

Um die Zeit zu finden, während welcher für jeden Ort in den beiden kalten Zonen der Erde die Sonne nicht unter- oder nicht mehr aufgeht, so hat man für den Anfang und das Ende dieser Zeit die einfache Gleichung

$$p = \varphi \;. \;. \;. \quad (I)$$

Auch ist allgemein, wenn L die Länge der Sonne und e die Schiefe der Ekliptik bezeichnet,

$$\text{Sin. } L = \frac{\text{Cos. } p}{\text{Sin. } e},$$

also ist auch für den Anfang oder das Ende der erwähnten Zeit

$$\text{Sin. } L = \frac{\text{Cos. } \varphi}{\text{Sin. } e} \;. \;. \;. \quad (II)$$

Ist also z. B. durch die Ephemeriden die Poldistanz p oder die Länge L der Sonne für jeden Tag des Jahres gegeben, so kann man mittelst der Gleichung (I) oder (II) jene Zeit bestimmen. Für den Parallelkreis von $\varphi = 80^0$ z. B. ist auch $p = 80^0$, diese Poldistanz aber erreicht die Sonne nach den Ephemeriden am 16. April und am 27. August, um die Zeit zwischen diesen beiden Tagen geht daher die Sonne in der nördlichen kalten Zone nicht unter und in der südlichen nicht auf. Für $\varphi = 66^0\ 32'$ oder $p = 66^0\ 32'$ findet man in den Ephemeriden bloſs den einzigen Tag des 21. Juni oder den Tag des Solstitiums. Für diesen Tag allein geht also die Sonne am Rande der nördlichen kalten Zone nicht unter und am Rande der südlichen kalten Zone nicht auf. Kleinere Werthe von φ oder p als $66^o\ 32'$ finden sich nicht mehr in den Ephemeriden, daher giebt es auch für solche Polhöhen, d. h. für alle Orte der gemäſsigten und heiſsen Zone der Erde, keine Tage mehr, an welchen die Sonne nicht auf- und untergeht. Auch zeigt die Gleichung (II), daſs für diesen Fall Sin. L gröſser als die Einheit, also der Winkel L unmöglich oder imaginär ist. Endlich geben diese beiden Gleichungen für $\varphi = 90^o$ auch $p = 90^0$ und $L = 0$ oder $L = 180^0$, das heiſst, für die Bewohner der Pole fallen die beiden Grenzen jener Periode, wo die Sonne nicht auf- oder nicht mehr untergeht, in die Zeiten der Frühlings- oder der Herbstnachtgleiche, also auf den 21. März und 21. September, so daſs daher für diese zwei Orte der Erde immer ein halbes Jahr Tag und ein halbes Jahr Nacht ist, wie bekannt, wenn

man die Refraction und den Halbmesser der Sonne unberücksichtigt läſst[1].

Es ist oben[2] bereits des kosmischen, helischen und akronyktischen Auf- und Untergangs Erwähnung geschehn. Diese den Alten wichtigen und auch uns noch zur Erklärung ihrer Schriften nothwendigen Erscheinungen fördern auch die Kenntniſs ihrer Berechnung, die dort nicht gegeben wurde. Wir wollen zu diesem Zwecke den *helischen* Auf- und Untergang eines Sterns suchen, da sich aus ihm die beiden andern leicht ableiten lassen. Der helische Aufgang eines Sterns hat dann statt, wenn er kurz vor der Sonne aufgeht. Wenn er nämlich einige Zeit zuvor mit der Sonne zugleich auf derselben Stelle des Himmels steht, so ist er, da sein Licht von dem der nahen Sonne verdunkelt wird, für uns unsichtbar. Allein bald darauf geht die Sonne in ihrer jährlichen Bewegung weiter ostwärts von dem Sterne, und der Stern geht daher bereits so viel früher als die Sonne auf, daſs man ihn in der Morgendämmerung, kurz vor dem Aufgange der Sonne, am östlichen Himmel wieder erblicken kann. Der Tag, wo man diesen Stern, der früher wegen der Nähe der Sonne längere Zeit unsichtbar war, wieder zum ersten Male erblickt, ist der *Tag des helischen Aufgangs*. Nehmen wir an, daſs er auf diese Weise wieder zuerst sichtbar wird zu einer Zeit, wo die Sonne vor ihrem Aufgange noch die Tiefe von h Graden unter dem Horizonte hat. Gewöhnlich setzt man für diese Tiefe h zehn oder auch wohl zwölf Grade. Man suche nun die Länge L der Sonne (und damit den Jahrestag), für welche diese Erscheinung statt hat.

Sey S der eben aufgehende Stern und S′ die Sonne unter dem Horizonte SB. Man ziehe $SA = \delta$ senkrecht auf den Aequator ♈QA und $S'B = h$ senkrecht auf den Horizont. Sey noch ♈ der Frühlingspunct und ♈C die Ekliptik. Dieses vorausgesetzt ist also (Fig. 239.)

♈A $= \alpha$ die Rectascension,
AS $= \delta$ die Declination des Sterns,
♈S′ $=$ L die gesuchte Länge der Sonne,
AQS $= 90^0 - \varphi$ die Aequatorhöhe, also φ die Pol-

1 Vergl. *Refraction*. Bd. VIII. S. 1146. und *Tagbogen* S. 80.
2 S. Art. *Aufgang*. Bd. I. S. 517.

höhe oder die geographische Breite des Beobachtungsortes auf der Erde, und

$C\Upsilon Q = e$ die Schiefe der Ekliptik.

Nennen wir noch die Gröſsen AQ, ΥC und CS' in derselben Ordnung x, y und z.

Dieses vorausgesetzt hat man im sphärischen Dreiecke QAS

$$\text{Sin.}\,x = \text{Tang.}\,\delta\,.\,\text{Tang.}\,\varphi$$

und im Dreieck $Q\Upsilon C$

$$\text{Cotg.}\,y = \frac{\text{Tang.}\,\varphi\,\text{Sin.}\,e + \text{Cos.}\,e\,\text{Cos.}\,(\alpha - x)}{\text{Sin.}\,(\alpha - x)}$$

und

$$\text{Sin.}\,\Upsilon CQ = \frac{\text{Cos.}\,\varphi\,\text{Sin.}\,(\alpha - x)}{\text{Sin.}\,y},$$

endlich im Dreieck CBS'

$$\text{Sin.}\,z = \frac{\text{Sin.}\,h}{\text{Sin.}\,\Upsilon CQ}.$$

Wir erhalten daher zur Auflösung unserer Aufgabe folgende Ausdrücke:

$$\text{Sin.}\,x = \text{Tang.}\,\delta\,.\,\text{Tang.}\,\varphi,$$

$$\text{Cotg.}\,y = \frac{\text{Tang.}\,\varphi\,\text{Sin.}\,e + \text{Cos.}\,e\,\text{Cos.}\,(\alpha - x)}{\text{Sin.}\,(\alpha - x)},$$

$$\text{Sin.}\,z = \frac{\text{Sin.}\,h\,\text{Sin.}\,y}{\text{Cos.}\,\varphi\,\text{Sin.}\,(\alpha - x)}.$$

Kennt man aber auf diese Weise die Gröſsen y und z, so ist die gesuchte Länge der Sonne für den Tag des helischen Aufgangs des Sterns

$$L = y - z.$$

Zur bequemern Uebersicht stellen wir die sechs hier in Rede stehenden Erscheinungen mit ihren kurzen Erklärungen tabellarisch zusammen, wie sie in der Zeitordnung auf einander folgen.

I. Der *kosmische Aufgang* hat statt, wenn der Stern genau bei dem Aufgange der Sonne aufgeht, wenn also beide Gestirne, falls der Stern nahe bei der Ekliptik steht, in Conjunction sind.

II. Der *helische Aufgang*, wenn der Stern kurz vor dem Aufgange der Sonne aufgeht, nahe 12 Tage nach I.

III. Der *kosmische Untergang*, wenn der Stern genau beim Aufgange der Sonne untergeht, wenn also beide Gestirne in Opposition sind, nahe ein halbes Jahr nach I.

IV. Der *akronyktische Aufgang*, wenn der Stern genau bei dem Untergange der Sonne aufgeht, um dieselbe Zeit, wie III.

V. Der *helische Untergang*, wenn der Stern kurz nach dem Untergange der Sonne untergeht, nahe 5 Monate nach III. oder IV. oder kurz vor der Conjunction beider Gestirne.

VI. Der *akronyktische Untergang* endlich hat statt, wenn der Stern genau beim Untergange der Sonne untergeht, wenn also beide Gestirne in Conjunction sind, nahe 12 Tage nach V.

Für Sterne, die nahe bei der Ekliptik stehn, ist daher die Zeit des kosmischen Aufgangs gleich der Zeit des akronyktischen Untergangs, bei der Conjunction beider Gestirne, und ebenso ist für diese Sterne die Zeit des akronyktischen Aufgangs gleich der des kosmischen Untergangs, bei der Opposition beider Gestirne.

L.

U r a n.

Uranium; Urane; *Uranium.* Dieser von Klaproth entdeckte Körper findet sich als Oxydul und als mit Wasser oder Säuren verbundenes Oxyd. Grau, metallglänzend, von 9,0 spec. Gewicht, spröde, sehr strengflüssig, läſst sich in regelmäſsigen Oktaedern erhalten, die an den Kanten das Licht mit rothbrauner Farbe durchlassen und ein rothbraunes Pulver geben.

Das *Uranoxydul* (217 Uran auf 8 Sauerstoff) findet sich als *Pechblende* und bildet sich beim Erhitzen des Urans an der Luft, wobei es unter Erglimmen zu einem schmuzig grünen Pulver verbrennt. Das *Uranoxydulhydrat* ist graugrün, die Uranoxydulsalze sind grün und werden durch reine Alkalien graugrün, durch hydrothionsaure schwarz, durch blausaures Eisenoxydulkali braunroth gefällt. Das *Uranoxyd* (217 Uran auf 12 Sauerstoff) ist nicht für sich bekannt. Sein Hy-

drat, der Uranocher der Mineralogen; und seine Verbindungen mit Säuren haben eine citrongelbe Farbe; letztere geben mit ätzenden Alkalien einen pomeranzengelben Niederschlag, welcher eine Verbindung des Uranoxyds mit Alkali ist, mit kohlensauren Alkalien einen blafsgelben, welcher sich im Ueberschusse derselben mit gleicher Farbe löst, mit hydrothionsauren Alkalien einen schwarzen und mit blausaurem Eisenoxydulkali, so wie mit Galläpfeltinctur einen braunrothen. Der *Uranglimmer* ist phosphorsaures Uranoxyd in Verbindung entweder mit phosphorsaurem Kalk oder mit phosphorsaurem Kupferoxyd.

G.

U r a n u s.

Uranus ist der entfernteste Planet unsers Sonnensystems. Seine Umlaufszeit um die Sonne in Beziehung auf die Fixsterne oder seine *siderische Revolution*[1] beträgt nach den neuesten Bestimmungen 30686,82083 Tage oder nahe 84 Jahre und 6 Tage, das Jahr zu 365,25 Tagen gezählt. Die mittlere Entfernung dieses Planeten von der Sonne oder die halbe grofse Axe seiner elliptischen Bahn ist 19,18239 Halbmesser der Erdbahn. Die Excentricität dieser elliptischen Bahn beträgt 0,0466 der halben grofsen Axe. Die Länge seines Periheliums[2] war im Anfang dieses Jahrhunderts oder am 0 Januar 1801 gleich 167° 32′ 6″, und für dieselbe Zeit war auch die Länge des aufsteigenden Knotens seiner Bahn mit der Ekliptik 72° 59′ 35″ und die Neigung seiner Bahn gegen die Ekliptik 0° 46′ 28″. Die säcularen Aenderungen dieser Elemente sind:

der Excentricität	— 0,000025			
der Neigung	+ 0°	0′	3″,13	
der Knoten	+ 0	23	43,2	
der Länge des Periheliums	+ 1	27	40,5.	

Der Durchmesser dieses Planeten ist gleich 4,33 Erddurchmessern, und seine Masse, so viel uns dieselbe bisher be-

1 S. Art. *Umlaufszeit*.
2 S. Art. *Sonnennähe*. Bd. VIII. S. 872.

kannt geworden ist, gleich 0,000056 der Sonnenmasse. Endlich ist noch die sogenannte *Epoche* oder die mittlere Länge dieses Planeten für den 0ten Januar 1801 (oder 31. December 1800) im mittleren Pariser Mittag gleich 177° 46′ 56″, so wie seine tägliche tropische Bewegung 42,367981 Secunden. Dieses sind die sogenannten *Elemente* dieses Planeten, wodurch er von allen andern Planeten unseres Sonnensystems charakteristisch unterschieden wird und wodurch zugleich nach den bekannten astronomischen Vorschriften sein wahrer Ort, wie er von der Sonne sowohl als auch von der Erde aus gesehn wird, für jeden gegebenen Augenblick bestimmt werden kann.

Wenn die mittlere *Entfernung* der Erde von der Sonne gleich 20879000 geogr. Meilen genommen wird, so folgt aus den so eben angegebenen Elementen, dafs die mittlere Entfernung des Uranus von der Sonne über 400 Millionen Meilen beträgt. Wegen der Excentricität der Bahn kann diese Entfernung bis 382 Mill. Meilen ab- und bis 419 Mill. Meilen zunehmen. Von der Erde aber steht Uranus in seiner

gröfsten Entfernung . . . 424,
kleinsten 348,
mittleren . . . . 386 Mill. Meilen ab,

indem nämlich die Excentricität seiner Bahn nahe 18693000 Meilen beträgt.

Der wahre *Durchmesser* dieses Planeten beträgt 7500 Meilen, während der der Erde 1720 beträgt. Wenn also Uranus nur so weit wie unsere Erde von der Sonne entfernt wäre, so würde man ihn aus der Sonne unter dem scheinbaren Durchmesser von 74½ Secunden sehn, während unsere Erde daselbst nur den scheinbaren Durchmesser von 17 Secunden hat. In seiner gegenwärtigen Entfernung aber erscheint Uranus der Erde in seinem Durchmesser nur zwischen 3 und 4 Secunden. Die Sonne selbst endlich, die uns unter einem Durchmesser von 32 Min. erscheint, hat auf dem Uranus nur 1¾ Min. im Durchmesser, ist also nahe 19mal kleiner im Durchmesser und 360mal kleiner in der Oberfläche. Uranus selbst aber hat eine Oberfläche von 166 Mill. Quadratmeilen oder 18mal mehr, als die Oberfläche der Erde, und einen körperlichen Inhalt von 201230 Millionen Kubikmeilen oder 76mal so viel, als der körperliche Inhalt der Erde beträgt. Die mittlere Geschwindigkeit, mit welcher dieser Planet um die Sonne geht,

beträgt in jeder Secunde nahe eine deutsche Meile, während die Erde in derselben Zeit 4,4 Meilen zurücklegt. Die Rotation des Uranus um seine Axe ist noch nicht genau bekannt. Nach HERSCHEL's Beobachtungen kann man sie auf die sehr kurze Zeit von 7,1 unserer Stunden schätzen, so daſs also dieser so viel gröſsere Himmelskörper nahe 3,4mal schneller als unsere Erde sich um seine Axe dreht. Aus der oben angegebenen Masse, die man vorzüglich aus den Perturbationen abgeleitet hat, welche Uranus auf Saturn ausübt, und aus dem körperlichen Volumen dieses Planeten hat man die *Dichte* seiner Masse nahe gleich dem fünften Theil der Dichte der Erdmasse gefunden, so daſs demnach die Dichte der Uranusmasse nahe gleich der Dichte unseres Wassers seyn würde, und daraus folgt endlich, daſs die Körper durch die Wirkung der Schwere auf der Oberfläche dieses Planeten in der ersten Secunde durch 14,6 Par. Fuſs fallen, nahe ebenso viel, wie auf der Oberfläche der Erde, wo dieser Fall bekanntlich 15,09295 Par. Fuſs beträgt. Da die Sonne dem Uranus nach dem Vorhergehenden unter einer 360mal kleineren Oberfläche als der Erde erscheint, so wird auch im Allgemeinen die Beleuchtung der Sonne auf dem Uranus 360mal kleiner seyn, als bei uns. Die hellsten Mittage auf diesem Planeten mögen also kaum noch mit unseren mondhellen Nächten zu vergleichen seyn. Ebenso würde auch die Erwärmung, die Uranus von der Sonne erhält, nur der 360ste Theil derjenigen Wärme seyn, welche unsere Erde der Sonne verdankt, wenn anders die Beschaffenheit der Oberfläche und der Atmosphäre des Uranus von der der Erde nicht sehr verschieden seyn sollte.

Da Uranus so ungemein weit von uns entfernt ist, so wissen wir von seiner Oberfläche wenig mehr, als daſs sie uns wie eine kleine, runde, matt, aber durchaus gleichförmig beleuchtete Scheibe erscheint, auf der wir keine Streifen und Flecken mehr zu erkennen im Stande sind. Daher hat man auch die Rotation dieses Planeten um seine Axe, die man bloſs aus diesen Flecken erkennt, nicht genau bestimmen können. Da indeſs HERSCHEL mit seinen starken Teleskopen eine sehr bedeutende Abplattung an seinen Polen bemerkt hat, so schloſs man daraus die oben angeführte sehr kurze Rotationszeit. Wir mögen uns übrigens bei unsern geringen Kennt-

nissen von diesem entferntesten aller Planeten damit trösten, dafs die Astronomen desselben, wenn sie überhaupt existiren, wahrscheinlich nicht einmal von dem Daseyn unserer Erde eine Kenntnifs haben. Unsere Erde erscheint ihnen, wie gesagt, nur unter dem Winkel von einer Secunde im Durchmesser und sie entfernt sich überdiefs für die Bewohner des Uranus nie über drei Grade von der Sonne, so dafs sie also noch viel mehr, als uns Mercur, immer in den Strahlen der Sonne schwimmen und selbst für die stärksten Fernröhre gänzlich unsichtbar seyn wird. Haben wir doch auch lange genug von der Existenz des Uranus nichts gewufst und würden wahrscheinlich auch jetzt noch nichts davon wissen, wenn HERSCHEL nicht mit einem von ihm selbst verfertigten, ausgezeichneten Fernrohre ihn zufällig aufmerksamer beobachtet und eine zwar kleine, aber doch unverkennbare Scheibe an ihm bemerkt hätte, während alle andere ihn umgebende Fixsterne nur als lichte Puncte sich darstellten. Das Fernrohr, mit welchem er diesen Planeten entdeckte, war ein Spiegelteleskop von nur sieben Fufs Focallänge, mit einer 227maligen Vergröfserung. Mehr die Ahnung, als die wirkliche Beobachtung einer Scheibe an diesem Gestirn veranlafste ihn, sogleich stärkere Vergröfserungen von 460 und 930 anzuwenden, die sein Teleskop noch sehr gut vertrug, und nun erst war er von der scheibenartigen Gestalt des Gestirns überzeugt. Diese Gestalt gab ihm die erste Veranlassung, seine Aufmerksamkeit auf diesen Gegenstand zu richten, und als er, schon am zweiten Tage nach seiner Entdeckung, auch noch das regelmäfsige Fortrücken des neuen Gestirns unter den Fixsternen bemerkte, durfte er es wagen, dasselbe als einen neuen Planeten anzukündigen, eine Voraussagung, die bald darauf vollkommen bestätigt wurde. Erst sechs Jahre nach dieser merkwürdigen Entdeckung gelang es demselben vortrefflichen Beobachter, mit einem seitdem verfertigten, noch viel bessern Fernrohre auch zwei *Satelliten* oder Monde dieses Planeten aufzufinden[1]. Er bestimmte die Umlaufszeit derselben um ihren Hauptplaneten bei dem innersten zu 8 Tagen $17^h\ 1'\ 19'',3$ mit dem Abstande von $33'',1$ und bei dem äufseren zu 13 Tagen $11^h\ 5'\ 1'',5$ mit dem Abstande $44'',2$. Den Planeten entdeckte

---

1 S. Philos. Trans. T. LXXVIII. P. II.

Herschel am 13. März 1781 und diese zwei Satelliten am 11. Januar 1787. Diese zwei Monde hat auch Schröter[1] und später, im J. 1828, der jüngere Herschel, aber sonst wohl niemand gesehn, da sie, so wie die zwei innersten Monde Saturns, zu den lichtschwächsten Gegenständen des Himmels gehören. Der jüngere Herschel[2] sagt von den letztern: *they have never been discerned but with the most powerful telescopes, which human art has yet constructed, and this only under peculiar circumstances.* Der ältere Herschel[3] will auch noch vier andere Monde des Uranus gesehn haben, allein sie waren so schwach an Licht, dafs er an eine auch nur beiläufige Bestimmung ihrer Bahn nicht denken konnte, indem er sie nur zuweilen an Stellen matt schimmern sah, wo er kurz vorher oder einige Stunden darauf nichts mehr erblicken konnte[4]. Von diesen Satelliten sagt daher der jüngere Herschel, *two undoubtedly exist, and four more have been suspected.* Aber auch die zwei ersten schon sind uns aufserordentlich merkwürdig geworden durch eine Eigenthümlichkeit, die ganz allein und ohne Beispiel in unserem Sonnensysteme dasteht. Alle Planeten dieses Systems und alle Satelliten dieser Planeten ohne Ausnahme bewegen sich nach derselben Seite, von West nach Ost, und diese Bewegungen gehn durchaus in Bahnen vor sich, die nur sehr wenig gegen die Ebene der Ekliptik geneigt sind. Jene zwei Monde des Uranus aber machen von dieser allgemeinen Regel eine merkwürdige Ausnahme. Ihre Bahnen stehn nahe senkrecht auf der Ebene der Ekliptik und sie bewegen sich in diesen Bahnen rückwärts von Ost gen West. Ihre Bahnen sind überdiefs nahe kreisförmig und die Knoten derselben mit der Ekliptik scheinen sich, seit den funfzig Jahren, die man sie kennt, nicht verändert zu haben, während doch z. B. die Knoten unserer Mondbahn alle 19 Jahre um den ganzen Himmel herumgehn. Scheint es doch, setzt Herschel hinzu, als ob diese sonderbaren Anomalieen an der äufsersten Grenze unseres Sonnensystems uns gleichsam vorbereiten sollten auf ganz andere, den

---

1 Beiträge Th. II. Anhang 50.
2 Treatise on Astron. Lond. 1833. p. 298.
3 Philos. Trans. for 1798. p. 47.
4 Vergl. Art. *Nebenplaneten.* Bd. VII. S. 79.

bisher bekannten ganz entgegengesetzte Erscheinungen, die in den andern Fixsternsystemen statt haben mögen und zu deren näherer Kenntniſs wir uns allmälig anschicken werden, da unsere Fernröhre einen so hohen und ganz unerwarteten Grad von Vollkommenheit erreicht haben. Bemerken wir noch, daſs diese Uranusmonde wahrscheinlich sehr beträchtliche Körper seyn müssen, weil sie sonst auch Herschel mit seinen lichtstarken Teleskopen nicht hätte zu Gesicht bringen können. Unser Mond z. B. würde, in die Entfernung des Uranus von der Erde versetzt, uns nur unter einem Durchmesser von 0,25 Secunde erscheinen, und da sein Licht nach dem Vorhergehenden 360mal schwächer seyn würde, als es jetzt ist, so würden wir auch mit unsern besten Fernröhren wohl keine Spur von ihm bemerken können.

Der ältere Herschel glaubte auch einmal die *Spuren eines Ringes* um Uranus zu erkennen, und zuweilen schien es ihm sogar, als wäre er von zwei sich unter rechten Winkeln schneidenden Ringen umgeben. Später konnte er mit seinen besten Teleskopen wieder nichts von diesen Erscheinungen erblicken und der vorsichtige Mann wollte selbst seine früheren Wahrnehmungen für optische Täuschungen ausgeben. Wie dieses immer seyn mag, schon die erwähnte gegen die Ekliptik nahe senkrechte Lage jener zwei Satellitenbahnen führt uns auf den höchst wahrscheinlichen Schluſs, daſs auch der Aequator des Uranus nahe senkrecht auf der Ebene seiner Bahn steht und daſs daher die *Schiefe seiner Ekliptik*, die bei uns nur 23,5 Grad beträgt, dort nahe einem rechten Winkel gleich ist. Sollte sich in der Folge die Vermuthung Herschel's von dem Ringe dieses Planeten bestätigen, dessen Ebene mit jener der Monde zusammenfällt, so würde dadurch jener Schluſs an Wahrscheinlichkeit ungemein gewinnen, da sich ein Ring nicht wohl anders, als in der Ebene des Aequators eines Planeten denken läſst. Daſs aber Uranus einen Aequator oder mit andern Worten eine Rotation um seine Axe habe, folgt schon aus der Analogie mit allen andern Planeten und aus der an zwei entgegengesetzten Stellen seines Umfangs bemerkten starken Abplattung. Eine so groſse Schiefe der Ekliptik muſs aber auf die Tages- und Jahreszeiten jenes Planeten einen ganz andern Einfluſs äuſsern, als der ist, den wir bei unserer Erde bemerken. Die heiſse, gemäſsigte und kalte Zone, das

Wort in der für die Erde gewöhnlichen Bedeutung genommen, wird nämlich auf dem Uranus nicht mehr auf einen bestimmten Theil seiner Oberfläche beschränkt seyn, sondern jede dieser drei Zonen würde zu verschiedenen Zeiten des Jahres alle Puncte dieser Oberfläche durchwandern. Zur Zeit des Sommeranfangs in der nördlichen Hemisphäre wird nämlich die Sonne senkrecht über dem Nordpol stehn, während der andere Pol eine längere Zeit hindurch in Nacht begraben liegt. Dann wird nämlich die Lichtgrenze mit dem Aequator des Uranus zusammenfallen und die Pole werden der eine in der Mitte der heifsen, der andere in der Mitte der kalten Zone liegen. Nach einem Vierteljahre des Uranus (d. h. nach 21 unserer Erdenjahre) aber, im Anfange des Herbstes, wird diese Lichtgrenze, die den Aequator immer halbirt, auf die eine Seite gegen den Nordpol sich erhebend und auf die andere ebenso viel gegen den Südpol herabsinkend, jetzt durch die beiden Pole gehn, und die Sonne wird für die Bewohner des Aequators im Zenith stehn. Nach neuen 21 unserer Jahre wird der Südpol in der Mitte der heifsen Zone liegen und die Sonne in seinem Scheitel erblicken, so dafs jetzt, im Sommer der südlichen Hemisphäre, die ganze südliche Halbkugel immerwährenden Tag und die ganze nördliche lange Zeit durch stets Nacht haben wird u. s. w. So lange es sich also blofs um Temperatur, um Beleuchtung oder um den Fortgang der Vegetation handelt, wird es den Bewohnern des Uranus nahe gleich seyn, ob sie unter dem Aequator oder in den beiden Polen ihres Planeten wohnen, da sie alle bald die höchste, bald wieder die niedrigste Temperatur, bald sehr langes und bald wieder sehr kurzes oder auch gar kein Tageslicht haben werden. Aber dafür wird demjenigen, der seinen fixen Wohnort nicht verlassen kann, daran gelegen seyn, ob er eben seinen Sommer oder seinen Winter hat, da dort die Jahreszeiten und ihre Temperatur wegen der grofsen Schiefe der Ekliptik viel mehr von einander verschieden, viel schroffer von einander getrennt und endlich auch von einer beinahe 84mal längeren Dauer sind, als bei uns.

Da wir uns aber um die Schicksale so entfernter Nachbarn nicht sehr zu bekümmern brauchen, so wollen wir dafür eine andere interessante Frage zu beantworten suchen. Ist

es wahrscheinlich, dafs unsere Nachfolger, wenn sie einmal mit noch viel besseren Fernröhren versehn seyn werden, noch einen entfernteren Planeten auffinden können, oder ist Uranus schon als der letzte Planet unseres Sonnensystems anzunehmen? Der berühmte Olbers hat es versucht, diese Frage, auf die man in der That nicht sobald eine genügende Antwort hoffen konnte, wenigstens aus sehr sinnreichen Wahrscheinlichkeitsgründen zu entscheiden. Wir werden weiter unten[1] sehn, dafs bei allen Planeten und selbst bei den Satelliten unseres Sonnensystems die Bahnen derselben im Allgemeinen nur sehr wenig gegen die Ebene der Ekliptik geneigt sind und dafs die Bewegungen dieser Körper in ihren Bahnen sämmtlich nach einer und derselben Richtung, von West nach Ost, vor sich gehn. Die Ursache dieser so allgemeinen Erscheinungen kann nur in einer uns immerhin unbekannten Kraft liegen, deren Wirksamkeit aber zur Zeit der Entstehung des Planetensystems von seinem Mittelpuncte, der Sonne, bis zu den äufsersten Grenzen dieses Systems ausgedehnt seyn mufste, vielleicht in dem durch ursprüngliche Hitze so weit ausgedehnten Sonnenkörper selbst oder seiner Atmosphäre, die anfänglich den ganzen kugelförmigen Raum erfüllte, an dessen äufserster Grenze später durch Folge der Rotation und Ablagerung der Sonnenmasse in der Nähe ihres Aequators der entfernteste Planet entstanden ist. Dieses vorausgesetzt, und wir werden weiter unten sehn, dafs diese Voraussetzung sehr viel Wahrscheinlichkeit für sich hat, folgt sofort, dafs innerhalb der Wirkungssphäre jener Kraft oder jenes Agens keine solchen Bahnen entstehn und fortdauern konnten, die entweder eine sehr grofse Neigung gegen die Ekliptik haben, oder in welchen der Himmelskörper in einer der vorhin erwähnten entgegengesetzten Richtung, von Ost nach West, fortgeht. Wenn wir aber noch einen unbekannten Planeten jenseit der Uranusbahn annehmen wollten, in welche Distanz von der Sonne müfsten wir ihn setzen? Zur Beantwortung dieser Frage haben wir die bekannte schöne Reihe, die sich über sämmtliche bisher bekannte Planeten mit einer immer auffallenden Genauigkeit erstreckt und auf die man auch bereits früher [illegible] Vermuthung gebaut hat, dafs zwischen Mars und Jupiter noch

1 S. Art. *Weltsystem.*

ein uns bisher unbekannter Planet sich befinden müsse, eine Vermuthung, die im Anfange unsers Jahrhunderts durch die Entdeckung der vier neuen Planeten, Ceres, Pallas, Juno und Vesta, so schön bestätigt worden ist. Nimmt man nämlich die mittlere Entfernung Mercurs von der Sonne, die nahe 8 Millionen geogr. Meilen beträgt, gleich 4 an, so erhält man folgende kleine Tafel:

Mercur	4	4	oder	8 Mill. Meilen
Venus	$4+2^0.3$ ..	7	—	14
Erde	$4+2^1.3$ ..	10	—	20
Mars	$4+2^2.3$ ..	16	—	32
Ceres, Pallas, Juno, Vesta	$4+2^3.3$ ..	28	—	56
Jupiter	$4+2^4.3$ ..	52	—	104
Saturn	$4+2^5.3$ ..	100	—	200
Uranus	$4+2^6.3$ ..	196	—	392

ollte daher über dem Uranus noch ein neuer Planet seyn, so müſste derselbe nach der vorhergehenden Tafel in der mittleren Entfernung von der Sonne von

$$4+2^7.3 = 388 \text{ oder } 776 \text{ Millionen Meilen}$$

seine Bahn um die Sonne beschreiben.

Nun kennen wir aber bereits zwei Kometen, welche beide die Aphelien ihrer elliptischen Bahnen weit auſserhalb der Uranusbahn liegen haben. Der Komet nämlich, welchen Olbers am 6. März 1815 entdeckte und dessen Umlaufszeit nahe 75 Jahre beträgt, hat zur halben groſsen Axe seiner elliptischen Bahn 17,6 und zur Excentricität 16,4 Halbmesser der Erdbahn. Dieser Komet ist daher in seinem Aphelium oder in seiner gröſsten Distanz von der Sonne volle 34 Halbmesser der Erdbahn oder 680 Millionen Meilen von der Sonne entfernt. Der bekannte *Halley'sche Komet* aber hat die halbe groſse Axe seiner Bahn gleich 372 und ihre Excentricität gleich 360 Millionen Meilen oder seine gröſste Distanz von der Sonne ist gleich 732 Millionen Meilen. Demnach reicht die Bahn des Olbers'schen Kometen noch 288 und die des Halley'schen sogar 340 Millionen Meilen über die Uranusbahn hinaus, aber ihre gröſsten Entfernungen von der Sonne sind bei dem ersten um 96 und bei dem zweiten um 44 Millionen

Meilen kleiner, als die mittlere Entfernung von 776 Mill. Meilen jenes vorausgesetzten neuen äußersten Planeten, so daß also diese zwei Kometen zur Zeit ihrer größten Entfernung von der Sonne zwischen der Bahn des Uranus und der dieses neuen Planeten,] aber dem letzten viel näher als jenem stehn würden. Die Existenz dieses neuen unbekannten Planeten vorausgesetzt müßten also jene zwei Kometen zur Zeit des Ursprungs des Sonnensystems sich innerhalb der Wirkungssphäre jenes großen Agens befunden haben und sie müßten daher auch jene beiden, allen Körpern dieser Sphäre eigenthümlichen Eigenschaften, eine geringe Neigung ihrer Bahn und eine directe Bewegung in dieser Bahn, an sich tragen. Allein dieses ist keineswegs der Fall. Denn der von Olbers entdeckte Komet ist zwar direct oder er geht in seiner Bahn von West nach Ost, wie alle übrige Planeten, aber die Neigung seiner Bahn gegen die Ekliptik beträgt volle 44 Grade, also weit mehr, als selbst die größte Neigung der alten Planeten, die nur 7 Grade beträgt. Bei dem Halley'schen Kometen aber ist zwar die Neigung von 17,5 Graden noch klein genug, aber seine Bewegung ist retrograd oder von Ost nach West, und beide Kometen müssen daher zur Zeit des Ursprungs unseres Sonnensystems außerhalb der Uranusbahn in der Nähe ihres Apheliums oder sie müssen ganz außer der Wirkungssphäre jenes Agens gewesen seyn, welches den Planeten jene beiden ihnen charakteristischen Merkmale aufdrückte oder endlich, mit andern Worten, jenseit der Uranusbahn liegt die Grenze des Raumes, in welchem allein noch Planeten entstehn konnten, und Uranus ist daher höchst wahrscheinlich der äußerste Planet unseres Sonnensystems.

Noch ist uns übrig, das Vorzüglichste aus der Geschichte dieser merkwürdigen Entdeckung kurz zusammenzustellen, da durch sie die Ausdehnung, welche unser Planetensystem im Weltraume einnimmt, nahe um das Doppelte erweitert worden ist. Die erste verläßliche Nachricht, die über die Entdeckung dieses Planeten in Deutschland verbreitet wurde, findet man in dem Berliner astron. Jahrbuche[1]. Es heißt daselbst, daß ein Freund der Astronomie zu Bath in England am Abend des 13. März 1781 den gestirnten Himmel mit einem

1 Für d. Jahr 1784. Berlin 1781. S. 210.

siebenschuhigen Spiegelteleskope untersucht und zwischen den Hörnern des Stiers und den Füſsen der Zwillinge einen Stern von einem deutlich bemerkbaren Durchmesser aufgefunden habe, während doch die eigentlichen Fixsterne durch gute Fernröhre nur als einfache Puncte, ohne alle scheibenförmige Gestalt, erscheinen. Noch auffallender unterschied sich jener fremdartige Himmelskörper von den Fixsternen durch seine eigene Bewegung, die an dem ersten Tage nur 45 Secunden betrug, in den nächstfolgenden aber schon bis auf 3 Min. 30 Sec. täglich angewachsen war. Der Körper zeigte nichts Nebliges um sich, so daſs man ihn nicht wohl für einen Kometen halten konnte. „Dieser Freund der Astronomie," wird in einer Note hinzugefügt, „wird in der Gazette littéraire vom Juni 1781 Mersthel, im Journal Encyclopédique vom Juli Hertschel, in einem Schreiben des Astronomen Maskelyne an Messier aber Herthel und endlich von Darquier in Toulouse Hermstel genannt, und er soll, heiſst es, ein geborner Deutscher seyn. Welches ist nun der eigentliche Name dieses wackeren Mannes?" Dieses war die erste Ankündigung eines damals bereits dreiundvierzigjährigen und doch der wissenschaftlichen Welt noch ganz unbekannten Mannes, dessen wahrer Name bald darauf von dem Munde aller Gebildeten wiederhallte. Es sey uns, des Contrastes wegen, erlaubt, auch die Stelle hier anzuführen, in welcher Brewster funfzig Jahre später in seinem Life of Newton von seinem groſsen Landsmanne spricht, eine Stelle, die hier um so mehr angeführt werden darf, da Goldberg in seiner sonst so schönen Uebersetzung dieses Werks einige sehr bedeutende Perioden, man sieht nicht recht, aus welchen Gründen, gänzlich weggelassen hat. „So stieg Herschel in wenig Jahren von den untersten Stufen des Lebens, von einer militärischen Musikbande, deren Mitglied er war, bis zu der staunenswürdigen Höhe, auf welcher er uns ganz ebenso ruhmbekränzt erscheint, wie die gepriesenen Helden des Alterthums, und so unsterblich, wie die ewigen Gegenstände des Himmels selbst, welche er uns bekannt gemacht und auf denen er das Denkmal seines unvergänglichen Namens mit eigener Hand in Flammenzügen eingegraben hat. Obschon der groſse Mann bereits die Mitte seiner Lebensbahn erreicht hatte, als er die Bahn seiner Entdeckungen betrat, so lief er doch auf dieser Bahn

allen seinen Zeitgenossen, allen seinen Vorgängern weit zuvor; sein Ruhm wuchs fortan mit jedem neuen Tage, und erst am Abend seines Lebens war es, wo er die glänzendsten Entdeckungen machte und eine reichere Ernte sammelte, als alle Schnitter, die vor und mit ihm auf demselben Felde gearbeitet hatten. Die hohe Fluth der Wissenschaft und der Erkenntnifs, die sich in der glücklichen Zeit, wo der grofse Mann erschien, über unsern ganzen Welttheil ergofs, rollte noch manche Jahre nach seinem Hintritte ihre Wogen stolz dahin, bis sie endlich in England wenigstens wieder zu der früheren Ebbe herabsank. Mit ihr schwand die Macht und der Ruhm Britanniens, und nur eine einzige Barke wird jetzt noch auf dem verlassenen Strande gefunden, die des alten Deukalion der Sternkunde, dessen Geist so lange und so glorreich über den Wassern geschwebt hatte. Zwar findet man da und dort noch manchen Einzelnen, der Kraft und Muth in sich fühlt, den Kampf mit dem Verhängnifs einzugehn und den Verfall der Kunst und Wissenschaft aufzuhalten: *but what avails the enthousiasm and the efforts of individual minds in the intellectual rivalry of nations? When the proud science of England pines in obscurity, blighted by the absence of the royal favour and of nation's sympathy; when its chivalry fall unwept and unhonoured, how can it sustain the conflict against the honoured and marshalled genius of foreign lands?*"

Dieses merkwürdige neue Gestirn, um wieder zu der Geschichte seiner Entdeckung zurückzukehren, wurde zuerst von dem Königl. Astronomen Maskelyne zu Greenwich am 17ten März 1781 auf eine streng wissenschaftliche Weise beobachtet und sein Ort am Himmel genau angegeben. Bald darauf wurden solche Beobachtungen auch von Messier und Méchain in Paris und von Darquier in Toulouse angestellt. Herschel selbst hatte wohl die besten Fernröhre, um damit zu sehn, was den meisten Andern verborgen blieb, aber eigentliche genaue Mefsinstrumente besafs er weder damals, noch auch in spätern Zeiten. Alle übrige Sternwarten Europa's endlich standen jener zu Greenwich bei London zu weit nach, um von ihnen bedeutende Beiträge zu der neuen Entdeckung zu erwarten. Auch kam das Gestirn im Monat Mai schon der Sonne zu nahe, wo es mit gewöhnlichen Fernröh-

ren nicht mehr gesehn werden konnte. Erst am 18. Julius sah man dasselbe in Paris wieder, und nun mehrten sich die Beobachtungen desselben mit jedem Tage, so dafs man allmälig auch daran denken mufste, die *Elemente*[1] dieses neuen Planeten, denn dafür mufste man ihn gleich in den ersten Wochen nach seiner Entdeckung erkennen, zu bestimmen. Allein dieses Geschäft war damals, wo die mathematische Analysis in dieser Beziehung noch nicht sehr ausgebildet war, mit vielen Schwierigkeiten verbunden, wie man aus den häufigen mifslungnen Versuchen schliefsen mufs, die zu jener Zeit von den verschiedenen Astronomen zu Tage gefördert wurden. Und doch mufs man gestehn, dafs das im Allgemeinen wohl allerdings sehr schwere Problem in dem gegenwärtigen Falle durch zwei besondere Umstände, die offenbar sehr geringe Excentricität der elliptischen Bahn und die sehr kleine Neigung derselben gegen die Ekliptik, ungemein erleichtert wurde. Prof. Lexell in Petersburg war einer der Ersten, der diese Elemente des neuen Planeten durch Rechnung zu bestimmen suchte. Allein obschon er diese Rechnungen schon nach mehr als einem Jahre nach der Entdeckung vorgenommen hatte, so fand er doch, dafs die ungefähr 30 ihm vorliegenden Beobachtungen sich ebenso wohl durch einen Kreis als auch durch eine Parabel darstellen liefsen, zum Beweise, wie unvollkommen seine Methode gewesen seyn mufs, wenn er gleich am Ende sich gezwungen sah, die Parabel als die unwahrscheinlichere Bahn zu betrachten[2]. Hennert[3], Prof. der Mathematik in Utrecht, giebt eine andere und zwar indirecte Methode, diese Bahn zu berechnen, indem er sonderbarer Weise die directe als zweckwidrig ausschliefst. Er findet die halbe grofse Axe gleich 18,835 (statt 19,182), die Knotenlänge 74° 30′ (statt der wahren 72° 46′) und die Neigung 0° 46′, die allein der Wahrheit sehr nahe liegt. Später wandte er sich endlich doch zu den directen Methoden[4], es scheint aber, als habe er sie nicht gehörig zu behandeln gewufst. Er fand die halbe Axe = 19,028, die Knotenlänge = 71° 11′ und die Neigung = 0° 42′.

---

1 S. Art. *Elemente der Bahnen.* Bd. III. S. 785.

2 Astronomisches Jahrbuch f. 1785. S. 202.

3 Ebendaselbst S. 206.

4 Ebend. 1786. S. 224.

Ja er versuchte selbst eine elliptische Bahn, wobei er die Länge des Perihels = 177° 44′ (statt der wahren 167° 4′). und die Excentricität nahe genug gleich 0,043 fand. Lalande[1] beschäftigte sich auch mit dieser Bahnbestimmung, scheint aber zu keinem genügenden Resultate gekommen zu seyn, obschon er bei der Kreishypothese stehn blieb. Er giebt seinen Fund nur in ganzen Graden an. So ist nach ihm die Knotenlänge = 73° und die halbe grofse Axe = 18,931. Méchain fand aus seinen Calcüls die halbe grofse Axe oder den Halbmesser der kreisförmigen Bahn = 19,079, die Knotenlänge = 71° 49′,5 und die Neigung 0° 43′,6. Prosperin[2] in Upsala berechnete die bisher gesammelten Beobachtungen des Uranus nach der elliptischen Hypothese, die er aber nicht selbst, sondern nur seine Resultate, und auch diese nur unvollkommen und der Zeit nach sehr spät mittheilte. Er fand: Länge des aufsteigenden Knotens = 72° 10′,2, Neigung = 0° 45′,4, Länge des Perihels 173° 51′,4, halbe grofse Axe 18,944, Excentricität 0,023, wo die letzte um die Hälfte zu klein und die Länge des Perihels gegen 7 Grade zu grofs ist. Endlich berechnete auch Laplace die Elemente des neuen Planeten, indem er noch einige ältere Beobachtungen desselben zu Hülfe nahm, nach der elliptischen Hypothese, und diese wurden sofort als sehr gut anerkannt, da sie alle bis dahin angestellte Beobachtungen des neuen Gestirns sehr gut darstellten. Von diesem Geometer wurden folgende Bestimmungen gefunden[3].

Halbe grofse Axe	19,082
Excentricität	0°,0476
Länge des Perihels	173° 23′,0
Länge des aufsteigenden Knotens	73 1,0
Neigung der Bahn	0 46,2.

1 Astronomisches Jahrbuch 1785. S. 226.

2 Ebendaselbst 1787. S. 215.

3 Diese Elemente Laplace's wurden zuerst in der Connoissance des tems für d. J. 1786 und die darauf gegründeten, von Méchain verfertigten Tafeln ebendaselbst für d. J. 1787 bekannt gemacht. Vgl. Berl. Jahrbuch für d. J. 1787. S. 139, wo auch Bode S. 185 die von ihm nach denselben Elementen von Laplace berechneten Tafeln des neuen Gestirns mittheilt. Die erste, nach diesen Tafeln construirte astronomiche Ephemeride des Uranus aber findet man in demselben Berl. Jahrb. für d. J. 1788. S. 129.

Diese Elemente stellten die sämmtlichen neuen Beobachtungen seit dem Entdeckungstage und selbst die von T. Mayer von dem Jahre 1756, von welcher wir später reden werden, gut dar, aber nicht die noch ältere Beobachtung d. J. 1690 von Flamstead. Der Astronom Fixmillner[1] zu Kremsmünster unternahm es, auch diese letzte und älteste Beobachtung in seine Bestimmung der Elemente aufzunehmen, die er, wie folgt, fand:

Länge des Perihels . . .	167° 31′,6
Länge des Knotens . . .	72 50,8
Neigung	0 46,3
Excentricität	0,04612
Halbe grofse Axe	19,16525.

Es ist Schade, dafs Fixmillner die Methode nicht angiebt, durch welche er diese Resultate gefunden hat. So viel ist klar, dafs er darauf viel Mühe verwendet zu haben scheint und dafs diese Elemente nicht nur die neuern, sondern auch die zwei wichtigen ältern Beobachtungen von T. Mayer und Flamstead sehr gut darstellten.

Um eine dieser Methoden näher anzuführen, wollen wir diejenige etwas näher betrachten, die Klügel[2] für die kreisförmige Bahn mitgetheilt hat. Er nimmt dabei an, dafs erstens der Planet sehr weit von der Sonne entfernt ist und dafs zweitens seine kreisförmige Bahn in der Ebene der Ekliptik liegt, wodurch allerdings die Auflösung sehr erleichtert wird. Ist λ die geocentrische Länge des Planeten, und l, so wie L die heliocentrische Länge des Planeten und der Erde in der ersten Beobachtung, und bezeichnet man dieselben Gröfsen für eine zweite Beobachtung durch λ', l' und L', so hat man, wenn r der Halbmesser der kreisförmigen Planetenbahn ist, den Halbmesser der ebenfalls kreisförmigen Erdbahn gleich der Einheit vorausgesetzt, nach dem dritten Kepler'schen Gesetze

$$l' - l = \frac{L' - L}{r^{\frac{3}{2}}}.$$

In dem Dreiecke zwischen Sonne, Planet und Erde aber hat man

1 Astronom. Jahrb. 1787. S. 249.

2 Ebend. 1785. S. 193. 1786. S. 238.

$$\text{Sin.}(\lambda - L) = \frac{1}{r}.\text{Sin.}(\lambda - L)$$

oder da, nach der erwähnten Voraussetzung, der Planet sehr weit von der Sonne entfernt, also der Winkel $\lambda - l$ an dem Planeten sehr klein seyn soll,

$$\lambda - l = \frac{1}{r}.\text{Sin.}(\lambda - L)$$

und ebenso für die zweite Beobachtung

$$\lambda' - l' = \frac{1}{r}.\text{Sin.}(\lambda' - L').$$

Beider Gleichungen Differenz ist

$$l' - l = \lambda' - \lambda + \frac{1}{r}.[\text{Sin.}(\lambda - L) - \text{Sin.}(\lambda' - L')],$$

oder, wenn man darin den vorhergehenden Werth von $l' - l$ substituirt und der Kürze wegen

$$A = \text{Sin.}(\lambda - L) - \text{Sin.}(\lambda' - L')$$

setzt,

$$L' - L = A.\sqrt{r} + (\lambda' - \lambda).r\sqrt{r},$$

oder endlich, wenn $r = \varrho^2$ gesetzt wird,

$$(\lambda' - \lambda).\varrho^3 + A.\varrho - (L' - L) = 0.$$

Aus dieser kubischen Gleichung findet man den Werth von ϱ, also auch $r = \varrho^2$, und daraus die Umlaufszeit T des Planeten um die Sonne

$$T = \frac{2\pi}{\mu}.r^{\frac{3}{2}} \text{ Tage},$$

wo π die bekannte Ludolph'sche Zahl 3,14159 und wo $\mu = 0{,}017202$ die Charakteristik unseres Sonnensystems[1] bezeichnet. Diese einfache, aber durch ihre vielen Voraussetzungen auch zugleich sehr beschränkte Auflösung galt zur Zeit der Entdeckung des Uranus für sehr schön und sinnreich. Heutzutage, wo durch die Arbeiten unseres Gauss das schwere Problem der Bahnbestimmung der Himmelskörper so ungemein gefördert worden ist, würde man wohl Anstand nehmen, sich so viele Beschränkungen zu erlauben. In der That ist die Voraussetzung, dafs die Bahn ein Kreis sey, in dessen Mit-

1 S. Art. *Weltsystem.*

telpuncte die Sonne sich befinde, schon von der Art, dafs das Problem keiner weitern Bedingung unterworfen zu seyn braucht, um doch ohne Mühe aufgelöst zu werden.

Behalten wir für die obigen Zeichen l, λ und L die alte Bestimmung bei und setzen wir überdiefs

R den Radius Vector der Erde,

ϱ die Entfernung des Planeten von der Erde

und

β die geocentrische Breite des Planeten

in der ersten Beobachtung, wo wir wieder für die zweite Beobachtung dieselben Gröfsen mit einem Striche bezeichnen wollen. Sind dann x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten, welche die Lage des Planeten gegen die Sonne bestimmen, so dafs x in der Linie der Nachtgleichen und x, y in der Ebene der Ekliptik liegt, so hat man

$$x = \varrho \,\mathrm{Cos.}\beta \,\mathrm{Cos.}\lambda + R \,\mathrm{Cos.} L,$$
$$y = \varrho \,\mathrm{Cos.}\beta \,\mathrm{Sin.}\lambda + R \,\mathrm{Sin.} L;$$

und

$$z = \varrho \,\mathrm{Sin.}\beta .$$

Ist ferner a der gesuchte Halbmesser der kreisförmigen Planetenbahn, so ist auch

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 .$$

Substituirt man in dieser Gleichung die vorhergehenden Werthe von x, y, z und setzt man der Kürze wegen

$$A = R \,\mathrm{Cos.}\beta \,\mathrm{Cos.}(L - \lambda),$$

so erhält man

$$\varrho = -A + \sqrt{a^2 - (R^2 - A^2)}.$$

Ganz ebenso giebt auch die zweite Beobachtung

$$\varrho' = -A' + \sqrt{a^2 - (R'^2 - A'^2)},$$

wenn wieder $A' = R' \,\mathrm{Cos.}\beta' \,\mathrm{Cos.}(L' - \lambda')$ ist.

Dieses vorausgesetzt sey k die geradlinige Sehne, welche die Endpuncte der beiden Radien des Planeten verbindet, so dafs man hat

$$k^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 .$$

Substituirt man in dieser Gleichung die vorigen Werthe der Coordinaten, so erhält man

$$k^2 = 2a^2 - 2\varrho\varrho' [\text{Cos.}\beta \,\text{Cos.}\beta' \,\text{Cos.}(\lambda - \lambda') + \text{Sin.}\beta \,\text{Sin.}\beta']$$
$$- 2\varrho R' \,\text{Cos.}\beta \,\text{Cos.}(L' - \lambda)$$
$$- 2\varrho' R \,\text{Cos.}\beta' \,\text{Cos.}(L - \lambda')$$
$$- 2RR' \,\text{Cos.}(L - L').$$

Endlich hat man noch für die Fläche s des Kreissectors, der zwischen den beiden Beobachtungen enthalten ist,

$$s = a^2 . \text{Arc. Sin.} \frac{k}{2a}$$

und, wenn wieder

$$\mu = \frac{0{,}017202}{\text{Sin. } 1''} = 3548'',187$$

die Charakteristik des Sonnensystems bezeichnet,

$$s = \tfrac{1}{2}\mu t . \sqrt{a},$$

wo t die Zwischenzeit der Beobachtungen in Tagen ausgedrückt ist. Beide Werthe von s einander gleich gesetzt geben

$$\frac{k}{2a} - \text{Sin.} \frac{\mu t}{2a^{\frac{3}{2}}} = 0$$

und die vorhergehenden Ausdrücke reichen vollkommen hin, um unsere Aufgabe, ohne eine weitere erleichternde Nebenbedingung zu Hülfe zu nehmen, auf eine sehr einfache Weise aufzulösen. Man wird nämlich so verfahren. Zuerst suche man die Gröſsen A, B und C aus den folgenden Ausdrücken

$$A = R \,\text{Cos.}\beta \,\text{Cos.}(L - \lambda), \qquad B = 2R' \,\text{Cos.}\beta \,\text{Cos.}(L' - \lambda),$$
$$A' = R' \,\text{Cos.}\beta' \,\text{Cos.}(L' - \lambda'), \qquad B' = 2R \,\text{Cos.}\beta' \,\text{Cos.}(L - \lambda'),$$
$$\text{Tang.}\, C = \text{Cos.}(\lambda - \lambda') \,\text{Cotg.}\beta.$$

Hat man diese beständigen Hülfsgröſsen berechnet, so findet man in einer ersten Hypothese, mit einem angenommenen Werthe von a, die Gröſsen m, m', ϱ, ϱ' und k durch die folgenden Gleichungen

$$\text{Sin. } m = \frac{1}{a}\sqrt{R^2 - A^2}, \qquad \varrho = a \,\text{Cos. } m - A,$$

$$\text{Sin. } m' = \frac{1}{a}\sqrt{R'^2 - A'^2}, \qquad \varrho' = a \,\text{Cos. } m' - A',$$

$$k^2 = 2a^2 - 2\varrho\varrho' \frac{\text{Sin.}\beta \,\text{Sin.}(C - \beta')}{\text{Cos. } C} - B\varrho - B'\varrho' - 2RR' \,\text{Cos.}(L - L').$$

Genügt dann der so gefundene Werth von k der Gleichung

$$\frac{k}{2a} - \text{Sin.}\,\frac{\mu t}{2a^{\frac{3}{2}}} = 0$$

nicht, so wiederholt man mit einem zweiten Werthe von a die Berechnung von m, m', ϱ, ϱ' und k, wodurch man endlich nach dem bekannten Verfahren (von dem wir am Ende des Artikels näher sprechen werden) den *wahren* Werth des Halbmessers a der kreisförmigen Planetenbahn finden wird, womit zugleich die wahren Werthe der Entfernungen ϱ und ϱ' des Planeten von der Erde bekannt sind. Kennt man aber einmal diese Gröſsen, so findet man auch die heliocentrischen Längen l, l' und Breiten b, b' durch folgende Gleichungen:

$$\text{Sin.}\,b = \frac{\varrho}{a}\,\text{Sin.}\,\beta, \qquad \text{Sin.}\,(L - l) = \frac{\varrho\,\text{Cos.}\,\beta}{a\,\text{Cos.}\,b}\,\text{Sin.}\,(L - \lambda),$$

$$\text{Sin.}\,b' = \frac{\varrho'}{a}\,\text{Sin.}\,\beta', \qquad \text{Sin.}\,(L' - l') = \frac{\varrho'\,\text{Cos.}\,\beta'}{a\,\text{Cos.}\,b'}\,\text{Sin.}\,(L' - \lambda'),$$

und daraus endlich die Länge ☊ des aufsteigenden Knotens und die Neigung n der Bahn gegen die Ekliptik mittelst der Ausdrücke

$$\text{Tang.}\,n\,\text{Sin.}\,(l - ☊) = \text{Tang.}\,b \quad \text{und}$$

$$\text{Tang.}\,n\,\text{Cos.}\,(l - ☊) = \frac{\text{Tang.}\,b' - \text{Tang.}\,b\,\text{Cos.}\,(l' - l)}{\text{Sin.}\,(l' - l)}.$$

Es ist bekannt, daſs die Bestimmung der Elemente eines Planeten, besonders die der halben groſsen Axe oder, was dasselbe ist, der Umlaufszeit, desto genauer ist, je weiter die Beobachtungen, die man der Rechnung zum Grunde legt, von einander in der Zeit entfernt sind. Es war also sehr wünschenswerth, solche Beobachtungen der älteren Astronomen aufzufinden, die den Uranus als einen Fixstern angesehn und seine Lage am Himmel genau bestimmt haben. Bode[1], der sich mit dieser Untersuchung vorzüglich fleiſsig beschäftigte, fand bald eine solche Beobachtung von Tob. Mayer vom

1 Astronomisches Jahrbuch 1784. S. 219. 1785. S. 189.

25. Sept. 1756. Mayer[1] hat diese Beobachtung des Uranus, den er für einen Fixstern hielt, unter Nr. 964. in seinen Sternkatalog eingetragen. Damit hatte man also eine Beobachtung dieses Planeten, die 25 Jahre vor seiner Entdeckung oder Erkennung vorausging. Allein später fand Bode noch eine andere, volle 91 Jahre vor 1781 gemachte Beobachtung dieses Planeten von Flamstead[2], der ihn am 13. December alten (oder 23. Dec. neuen) Styls 1690 des Abends 10 Uhr bei seiner Culmination beobachtet hatte, wo Uranus unter der Nummer des 34sten Sterns im Stier aufgeführt wird. Bald darauf wurden noch zwei andere Beobachtungen desselben Gestirns von Flamstead und zwölf von Lemonnier aufgefunden, welche letzteren aus den Jahren 1763 und 1769 sind. Endlich kam zu diesen älteren Beobachtungen noch eine von Bradley aus dem Jahre 1753, so dafs man in allen 17 dergleichen gefunden hat, eine von Mayer, eine von Bradley, drei von Flamstead und zwölf von Lemonnier. Bode[3] wollte noch eine viel ältere Beobachtung dieses Planeten aufgefunden haben, indem er glaubte, Tycho Brahe habe ihn 1587 als einen Fixstern zunächst über dem Stern μ im Schweife des Steinbocks beobachtet. Dieses wäre demnach eine Beobachtung des Uranus, die volle 194 Jahre vor der Epoche seiner Entdeckung vorausgegangen seyn würde. Allein obschon Bode noch einmal wieder auf dieselbe Idee zurückkam und sie nur ungern aufgeben wollte, so hat man sie doch nicht angenommen, und man blieb bei den erwähnten 17 Beobachtungen stehn, um sie für die Bestimmung der Elemente auf das Beste zu benutzen. Jedoch geschah dieses nicht mit dem gewünschten Erfolge. Denn die neuesten Untersuchungen haben gezeigt, dafs sich diese alten Beobachtungen mit denjenigen, die seit 1781 angestellt worden sind, nicht vereinigen lassen und dafs daher die meisten von jenen nicht mit der gehörigen Genauigkeit angestellt worden sind, wie auch schon der Zustand der Instrumente und der Beobachtungskunst in jenen frühern Zeiten vermuthen lassen konnte.

---

1 Opera inedita. T. I. p. 72.

2 Histoire céleste. T. II. p. 86.

3 Astronomisches Jahrbuch 1786. S. 219 u. 223.

Bouvard[1] hat in seinen neuesten Tafeln der drei äufsersten Planeten unseres Sonnensystems diese älteren Beobachtungen mit den neueren durch eine sehr sorgfältige Rechnung zu verbinden gesucht, aber die auf diese Weise erhaltenen Elemente oder Tafeln gaben für die neuern Beobachtungen so grofse Fehler, dafs sie dem gegenwärtigen Zustande der Astronomie durchaus unangemessen erscheinen mufsten. Es blieb ihm daher nichts übrig, als auf diese älteren Beobachtungen, von denen man sich so viel versprochen hatte, gänzlich zu verzichten und sich blofs an die seit 1781 angestellten zu halten.

Dem Vorhergehenden mögen noch einige Worte über die Benennung und Bezeichnung dieses Planeten hinzugefügt werden. Bode[2] schlug vor, ihn *Uranus* zu nennen. Er hielt dieses vorzüglich deshalb für schicklich, weil in der Mythologie Uranus als der Vater des Saturn und Saturn als der Vater des Jupiter angeführt wird. Sein Vorschlag hat Beifall gefunden und ist mit Ausnahme einiger englischen und französischen Astronomen allgemein angenommen worden. Der Entdecker des Planeten, der das erste Recht auf seine Benennung haben sollte, wollte ihn *Georgium Sidus*, seinem König zu Ehren, genannt wissen; diese Benennung fand aber selbst in England wenig Beifall, und die meisten Astronomen dieses Landes, so wie auch die von Frankreich, nennen ihn *Herschel*, um dadurch den Entdecker selbst zu ehren und seinen Namen auf den Himmel zu versetzen. Lichtenberg wollte den neuen Planeten *Asträa* genannt wissen, was aber nicht beachtet wurde.

Auch von den verschiedenen Zeichen, die man für diesen Planeten vorgeschlagen hat, wurde das von Bode empfohlene ⛢ vorzugsweise angenommen, obschon einige noch ein dem H ähnliches Zeichen, als den Anfangsbuchstaben von Herschel, geltend machen wollen. Der Astronom Hell in Wien hat eine Denkmünze von Platin, welches Metall in der Mineralogie dasselbe Zeichen erhalten hat, auf den neuen Planeten schlagen lassen und ihn überdiefs in mehreren lateinischen Gedichten besungen[3].

---

1 Tables astronomiques de Jupiter, Saturne et Uranus. Par. 1821.

2 Astronomisches Jahrbuch 1785. S. 191.

3 S. Wiener Ephemeriden 1784.

Noch ist uns übrig, der obigen Zusage gemäfs das Verfahren anzuzeigen, mittelst dessen man jede numerische Gleichung mit einer unbekannten Gröfse auf eine zwar indirecte, aber ebenso sichere als bequeme Weise auflösen kann. Da dieses Verfahren in der Astronomie und selbst in der Physik so oft mit Nutzen angewendet wird, so wird eine kurze Darstellung desselben hier nicht unangemessen erscheinen.

Wenn eine Gleichung $X = 0$ als Function von gegebenen Zahlen und von der unbekannten Gröfse x aufgestellt wird, oder auch, wenn man, wie in dem oben erwähnten Falle, diese unbekannte Gröfse x aus mehrern gegebenen Gleichungen, in welchen sie enthalten ist, bestimmen soll, so ist es durch die gegebenen Verhältnisse der Aufgabe beinahe immer sehr leicht, durch einige einfache Versuche einen ersten, wenn auch nur noch wenig genäherten, Werth dieser Gröfse x oder der Wurzel der gegebenen Gleichung zu finden. Sey demnach $x = a$ ein solcher genäherter Werth von x. Substituirt man ihn in der gegebenen Gleichung $X = 0$, so wird er diese Gröfse X nicht genau auf Null bringen, da nur der wahre Werth von x dieses thun kann. Nehmen wir also an, dafs wir durch diese Substitution von $x = a$ in der Gleichung statt $X = 0$ den Ausdruck erhalten

$$X = \omega,$$

wo ω eine von Null desto weniger verschiedene oder eine desto kleinere Zahl seyn wird, je näher man bereits die Gröfse a dem wahren Werthe von x gewählt hat. Sey ebenso a' eine von a nur wenig verschiedene Gröfse, die demnach ebenfalls als ein zweiter genäherter Werth von x betrachtet werden kann. Substituirt man diesen Werth $x = a'$ in der gegebenen Gleichung, so soll diese dadurch in

$$X = \omega'$$

übergehn. Wir haben demnach zwei Hypothesen für den wahren Werth von x aufgestellt, nämlich $x = a$ und $x = a'$, und wir haben auch zugleich die Fehler dieser zwei Hypothesen, nämlich die beiden Gröfsen ω und ω' erhalten. Wir haben nämlich

	Fehler der Hypothese	Fehler des Resultats
in der ersten Voraussetzung	$a - x$	ω
in der zweiten Voraussetzung	$a' - x$	ω'

Je näher aber die beiden Hypothesen der gesuchten Wahrheit liegen, oder je kleiner die beiden Fehler $a - x$ und $a' - x$ dieser Hypothese sind, desto näher wird auch das Verhältniſs

$$\frac{a - x}{a' - x}$$

dem Verhältniſs der Fehler der Resultate oder der Gröſse

$$\frac{\omega}{\omega'}$$

liegen, so daſs man daher, da es sich hier doch nur um eine erste Näherung handelt, die Gleichung annehmen kann

$$\frac{a - x}{a' - x} = \frac{\omega}{\omega'},$$

woraus dann sofort folgt

$$x = \frac{a'\omega - a\omega'}{\omega - \omega'}$$

oder auch

$$x = a - \frac{a - a'}{\omega - \omega'} . \omega \quad \text{oder} \quad x = a' - \frac{a - a'}{\omega - \omega'} . \omega'$$

und jede dieser drei letzten Gleichungen wird einen anderen dritten Werth von x geben, welcher der Wahrheit näher liegt, als die beiden vorhergehenden $x = a$ und $x = a'$, so daſs man daher mit dieser neuen Hypothese, in Verbindung mit einer der vorhergehenden oder mit einer anderen der Wahrheit, die man jetzt schon besser kennt, näher liegenden Hypothese, dieselbe Rechnung wiederholen und so, durch eine, so weit man will, fortgesetzte Operation sich der gesuchten Wahrheit immer mehr nähern kann. In der That, um zu zeigen, daſs der letztgefundene Werth von x der Wahrheit desto näher kommt, je kleiner die Fehler der beiden Hypothesen sind, so kann man die gegebene Gleichung $X = 0$ als eine Function von x ansehn, die für den gesuchten Werth von x gleich Null ist, so daſs man daher hat

$$X = f(x) = 0.$$

Läfst man in diesem Ausdrucke die Gröfse x in $x+(a-x)$, das heifst, in a übergehn, so hat man nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$X' = X + (a-x).\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{(a-x)^2}{1.2}.\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \ldots$$

und ebenso erhält man auch, wenn man x in $x+(a'-x)$ oder in a' übergehn läfst,

$$X'' = X + (a'-x).\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{(a'-x)^2}{1.2}.\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \ldots$$

Je kleiner aber die Gröfsen $(a-x)$ und $(a'-x)$ sind, das heifst, je näher die beiden Hypothesen $x=a$ und $x=a'$ der Wahrheit liegen, desto mehr wird man auch in den beiden vorhergehenden Ausdrücken die zweiten und höhern Potenzen dieser Gröfsen $a-x$ und $a'-x$ gegen die erste Potenz vernachlässigen können, so dafs dann jene beiden Ausdrücke sich blofs auf ihre ersten Glieder oder, da $X'-X=\omega$ und $X''-X=\omega'$ ist, auf die beiden einfachen Gleichungen reduciren:

$$\omega = (a-x).\frac{\partial X}{\partial x}$$

und

$$\omega' = (a'-x).\frac{\partial X}{\partial x},$$

deren Division giebt

$$\frac{a-x}{a'-x} = \frac{\omega}{\omega'},$$

wie zuvor.

Um das Vorhergehende durch ein Exempel deutlich zu machen, sey die kubische Gleichung gegeben

$$X = x^3 - 2x + 1 = 0.$$

Um die eine Wurzel derselben zu finden, hat man, wenn $x=a=0{,}5$ gesetzt wird, $X=0{,}125$, und wenn ebenso $x=a'=0{,}7$ gesetzt wird, $X=-0{,}057$. Setzt man daher

$$a = 0{,}5 \text{ und } a' = 0{,}7,$$

so ist

$$\omega = 0{,}125 \text{ und } \omega' = -0{,}057$$

und mit diesen Werthen giebt die obige Gleichung

$$x = a - \frac{(a - a')}{\omega - \omega'} . \omega = 0,5 + 0,137 = 0,637 .$$

Wir wollen demnach in einer zweiten Berechnung $a = 0,637$ setzen, wodurch man erhält $X = \omega = -0,01552$. Da aber wegen dieses negativen Werthes von ω das letzte $a = 0,637$ noch etwas zu grofs ist, so kann man $a' = 0,620$ annehmen, wodurch man erhält $X = \omega' = -0,00176$. Wir haben demnach als zweites Hypothesenpaar

$$a = 0,637 \text{ und } a' = 0,620,$$
$$\text{daher } \omega = -0,01552 \text{ und } \omega' = -0,00176,$$

und damit giebt unsere Gleichung für das verbesserte x den Werth

$$x = 0,637 - 0,01905 = 0,61795.$$

Nimmt man noch in einer dritten Rechnung

$$a = 0,6180 \text{ und } a' = 0,6181,$$
$$\omega = 0,00002903 \text{ und } \omega' = -0,00005637,$$

so giebt unsere Gleichung

$$x = 0,6180 + 0,0000340 = 0,6180340,$$

und dieser letzte Werth von x ist noch in der letzten Decimalstelle genau, da die wahren Wurzeln der gegebenen Gleichung sind

$$1$$
$$\text{und } \tfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}) = 0,6180340$$
$$\text{und } \tfrac{1}{2}(-1 - \sqrt{5}) = -1,6180340.$$

Dafs man nach diesem Verfahren jede, auch selbst transcendente Gleichungen auflösen kann, ist für sich klar. Wäre z. B. die Gleichung gegeben

$$\frac{e^x - 1}{x} = 3,828,$$

wo $e = 2,7182818$ die bekannte Basis der natürlichen Logarithmen ist, so hat man auch, wenn man die Briggischen Logarithmen nimmt,

$$0,43429448\,x - \text{Log. Brig.}\,(3,828\,x + 1) = 0.$$

Setzt man nun $x = 2,2$, so erhält man $\omega = -0,01868$ und ebenso wird man für $x = 2,3$ erhalten $\omega' = +0,00744$. Mit

diesen Gröfsen giebt aber unsere Gleichung den verbesserten Werth von

$$x = 2{,}2715.$$

Setzt man wieder in einer zweiten Rechnung

$x = a = 2{,}2715$, so findet man $\omega = -\ 0{,}0000615$

und

$x = a' = 2{,}3$ - - - $\omega' = +\ 0{,}00744$

und damit giebt unsere Gleichung

$$x = 2{,}2715 + 0{,}0002337 = 2{,}2717337.$$

Eine dritte Rechnung endlich giebt

$x = a = 2{,}2717337$ . . . $\omega = -\ 0{,}0000001$
$x = a' = 2{,}2715$ . . . . $\omega' = -\ 0{,}0000615$

und damit erhält man durch unsere Gleichung

$$x = 2{,}2717337 + 0{,}00000038 = 2{,}27173408$$

so dafs man daher

$$x = 2{,}271734$$

als den wahren und in der letzten Ziffer noch richtigen Werth der gesuchten Gröfse x annehmen kann. Oft kann, selbst bei physikalischen Untersuchungen, der Fall eintreten, dafs man zwei Gleichungen mit zwei unbekannten Gröfsen hat, die so unter einander verwickelt sind, dafs man sie durch die gewöhnlichen Mittel der Elimination nicht trennen kann. Wenn z. B. die beiden Gleichungen gegeben sind,

$$\left.\begin{aligned} X &= x^3 y + y^3 x - 0{,}0078 = 0 \\ Y &= x^2 y^3 + y^2 x^3 - 0{,}0018 = 0 \end{aligned}\right\} \ldots \text{(A)}$$

so läfst sich daraus nicht leicht eine einzige Gleichung bilden, die blofs x oder blofs y enthält, daher man auch die vorhergehende Methode nicht unmittelbar auf sie anwenden kann. In solchen Fällen kann man, wie Gauss[1] gelehrt hat, auf folgende Weise verfahren. Wenn man, wie zuvor, die gesuchten Werthe von x und y nur einigermafsen genähert kennt und wenn man diese genäherten Werthe

$$x = a \text{ und } y = b$$

setzt, so berechne man damit aus den beiden gegebenen Gleichungen die Werthe von $X = \alpha$ und von $Y = \beta$, wo also $x - a$ und $y - b$ die Hypothesen, α und β die Fehler dieser Hypothesen sind, da eigentlich, wenn die Hypothesen fehlerfrei gewesen wären, α und β gleich Null seyn müfsten. Seyen ebenso für eine zweite Annahme

1 Theoria Motus corpor. coelest.

$x = a'$, $y = b'$ die Hypothesen und
$X = \alpha'$, $Y = \beta'$ die Fehler derselben.

Für eine dritte Voraussetzung endlich seyen
$x = a''$, $y = b''$ die Hypothesen und
$X = \alpha''$, $Y = \beta''$ die Fehler derselben.

Dieses vorausgesetzt findet man die gesuchten genäherten Werthe von x und y durch folgende Ausdrücke

$$\left.\begin{array}{l} x = a + \frac{\gamma}{\varepsilon}(a' - a) + \frac{\delta}{\varepsilon}(a'' - a) \\ y = b + \frac{\gamma}{\varepsilon}(b' - b) + \frac{\delta}{\varepsilon}(b'' - b) \end{array}\right\}$$

wo der Kürze wegen gesetzt wurde

$$\gamma = \alpha''\beta - \alpha\beta'',$$
$$\delta = \alpha\beta' - \alpha'\beta,$$
$$\varepsilon = \gamma + \delta + \alpha'\beta'' - \alpha''\beta'.$$

Mit diesem Verfahren findet man, daſs den beiden vorhergehenden Gleichungen (A) die Werthe $x = 0,2$ und $y = 0,3$ entsprechen.

L.

In demselben Verlage sind auch nachstehende Werke erschienen und durch alle Buchhandlungen zu haben.

Experimente erläutert wird, nebst einem Versuch über den Magnet. Aus d. Engl. mit 6 Kupfertafeln. gr. 8. 1785. 1 Thlr.

Bailly, Geschichte der Sternkunde des Alterthums bis auf die Errichtung der Schule zu Alexandrien. Aus dem Franz. 2 Bde. mit Kupfern. gr. 8. 1777. 1 Thlr. 18 Gr.

— — Geschichte der neuern Astronomie. 1r Bd., von der Stiftung der Alexandrinischen Schule bis zu ihrem Untergange. Mit 13 Kupf. gr. 8. 1796. 1 Thlr. 8 gr.

— — zweiter Band, v. Untergange der Alexandrinischen Schule bis Kepler. gr. 8. 1797. 1 Thlr.

Barneveld, Wilhelm van; medicinische Elektricität. Aus dem Holländischen mit 3 Kupfertafeln. gr. 8. 1787. 20 Gr.

Bertholon de St. Lazare, Hr. Abt, über die Elektricität, in Beziehung auf die Pflanzen; die Mittel, die Elektricität zum Nutzen der Pflanzen anzuwenden u. s. w. Nebst der Erfindung eines Elektrovegetometers mit 3 Kupfert. gr. 8. 1785. 1 Thlr.

Bicquilley, C. F. von, die Rechnung des Wahrscheinlichen. Aus dem Franz. übersetzt und mit Anmerkungen versehen von C. F. Rüdiger. gr. 8. 1788. 1 Thlr.

Cavallo, Tiberius, Abhandlung über dis Eigenschaften der Luft u. der übrigen beständig elastischen Materien, nebst einer Einleitung in die Chemie. Aus dem Engl. übersetzt mit 3 Kupfertafeln. gr. 8. 1783. 2 Thlr.

— — Geschichte und Praxis der Aerostatik. Aus dem Engl. übers. Mit 2 Kupfertaf. gr. 8. 1786. 16 Gr.

— — Theoretische und praktische Abhandlung der Lehre vom Magnet mit eignen Versuchen. Aus dem Engl. übersetzt. Mit 2 Kupfern. gr. 8. 1788. 16 Gr.

Cuthbertson's, J., Abhandlung von der Elektricität, nebst einer genauen Beschr. der dahin gehörigen Werkzeuge und Versuche. Aus dem Holl. mit 11 Kupfert. gr. 8. 1786. 1 Thlr. 12 Gr.

— — Dritte Fortsetzung mit einigen Zusätzen. gr. 8. 1796. 12 Gr.

Fabers Versuch über die vortheilhafte Bauart hydraulischer Maschinen, und insbesondre der Getreidemühlen. Aus d. Franz. übers. u. mit Anmerk. versehen v. M. A. F. Lüdicke, mit einer Vorrede von J. J. Ebert, nebst 6 Kupfert. gr. 8. 1786. 2 Thlr.

Habermalz, H. B. C., Anfangsgründe der Geometrie für Anfänger, mit 6 Kupfertafeln. 8. 1786. 6 Gr.

Hindenburg, C. Fr., über Combinatorische Analysis und Derivations-Calcul, einige Fragmente, gesammelt und zum Druck befördert. gr. 8. 1803. 2 Thlr.

Kramp Analyse des Réfractions Astronomiques et Terrestres. gr. 4. 1799. 2 Thlr.



